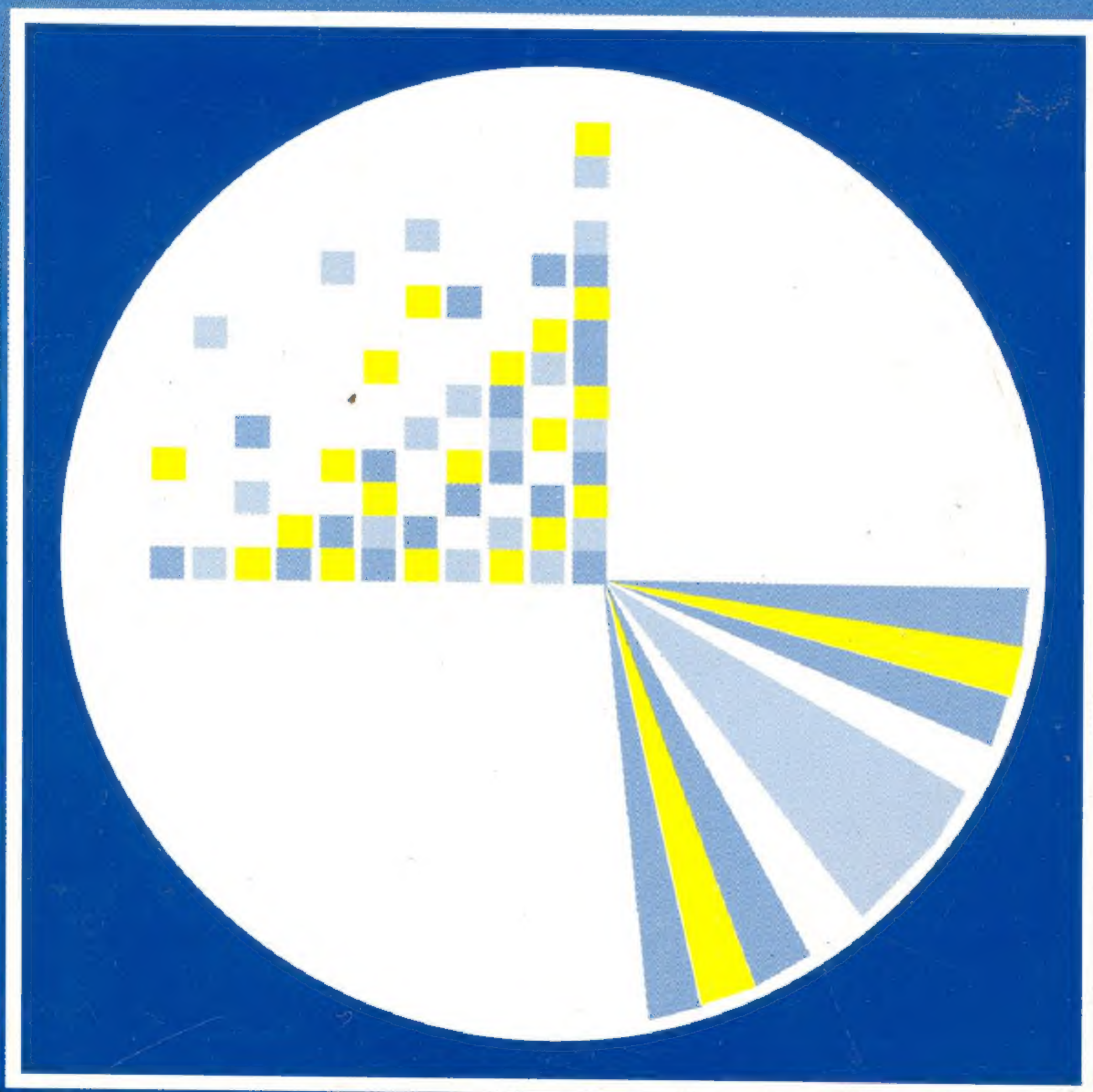


بحوث العمليات و تطبيقاتها فى  
**حل المشكلات وإتخاذ القرارات**

الجزء الأول : البرامج الخطية



**دكتور / فريد عبد الفتاح زين الدين**

أستاذ إدارة الأعمال - كلية التجارة

جامعة الزقازيق

١٩٩٧





بحوث العمليات وتطبيقاتها فى  
**حل المشكلات واتخاذ القرارات**

الجزء الأول : البرامج الخطية

وكثور

**فريد عبد الفتاح زين الدين**

أستاذ إدارة الأعمال

كلية التجارة - جامعة الزقازيق

١٩٩٧

رقم الإيداع بدار الكتب : ١٩٩٦/٧٤١٢  
الترقيم الدولي I.S.B.N. 7: 1715 - 04 - 977



**بسم الله الرحمن الرحيم**

**" وقالوا الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا**

**لنهدى لولا أن هدانا الله "**

**صدق الله العظيم**







# المحتويات

٢٣-٥	مقدمة: نشأة وتطور بحوث العمليات
٨-٥	* التعريف ببحوث العمليات
١٣-١٠	* تلخيص للتطور التاريخي لبحوث العمليات
٢٣-١٣	* الخطوات العامة لأساليب بحوث العمليات
٦٤-٢٥	الفصل الأول: البرامج الخطية والحل البياني
٢٩-٢٨	* تعريف البرمجة الخطية
٣٢-٢٩	* الشروط الواجب توافرها لتطبيق أسلوب البرمجة الخطية
٦٤-٣٣	* استخدام المدخل البياني في معالجة المشاكل الادارية
١٨٣-٦٥	الفصل الثاني: طريقة السمبلكس
٧٤-٦٧	* مقدمة
٧٦-٧٤	* خطوات منهج السمبلكس
١٠٨-٧٦	* حل مشاكل التعظيم بطريقة السمبلكس
١٣٠-١٠٩	* حل مشاكل تخفيض التكلفة بطريقة السمبلكس
	* معالجة بعض الحالات الخاصة في حل نماذج
١٨٣-١٣١	البرامج الخطية
١٤٠-١٣١	- حالة تعدد الحلول المثلى
١٥٠-١٤٠	- حالة الحلول غير المحددة
١٥٣-١٥٠	- حالة أن الحلول الممكنة غير موجودة
١٥٦-١٥٣	- حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول
١٧٢-١٥٧	- حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج
١٨٣-١٧٣	* أسئلة وتطبيقات
٢٩٢-١٨٥	الفصل الثالث: تحليل الحساسية والثباتية للبرامج الخطية
١٨٩-١٨٧	* مقدمة
٢٣٥-١٩١	* تحليل الحساسية



٢١٤-١٩٩	- تحليل حساسية التغيرات في معاملات دالة الهدف
٢٣٥-٢١٤	- تحليل التغيرات في طاقة الموارد
٢٨٣-٢٣٧	* الثنائية في البرامج الخطية
٢٤٩-٢٤١	- صياغة وحل المشكلة الثنائية
٢٥٥-٢٤٩	- العلاقة بين حل المشكلة الأولية والمشكلة الثنائية
٢٦٣-٢٥٥	- كيفية التعامل مع المشاكل ذات المتباينات المختلطة
	- استخدام نتائج النموذج الثنائي في تحليل حساسية
٢٦٩-٢٦٤	باقي العناصر
٢٨٣-٢٧٠	- استخدام أسعار الظل في ترشيده القرارات الإدارية
٢٩٢-٢٨٤	* أسئلة وتطبيقات
٣٩٣-٢٩٣	الفصل الرابع: برمجة الأهداف
٢٩٧-٢٩٥	* مقدمة
٣٠٣-٢٩٨	* حالة عدم وجود حل ممكن
٣٠٧-٣٠٣	* تعدد الأهداف ووضع الأولويات
٣١٦-٣٠٧	* صياغة وتمثيل وحل نموذج برمجة الأهداف بيانياً
	* صياغة وتمثيل وحل نموذج برمجة الأهداف
٣٧٧-٣١٦	بطريقة السمبلكس
٣٩٠-٣٧٧	* تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف
٣٩٣-٣٩١	* أسئلة وتطبيقات
٥٨٩-٣٩٥	الفصل الخامس: طرق خاصة في البرامج الخطية
٥٠٦-٣٩٩	* طريقة النقل
٤٠٠-٣٩٩	- مقدمة
٤١٠-٤٠٠	- علاقة مشكلة النقل بالبرامج الخطية
٤٣٨-٤١١	* طرق إيجاد الحل المبدئي الممكن
٤١٥-٤١٢	- طريقة الركن الشمالى الشرقى



٤١٧-٤١٥	- طريقة أدنى تكلفة في الصف
٤٢٠-٤١٨	- طريقة أدنى تكلفة في العمود
٤٢٣-٤٢٠	- طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة
٤٣٠-٤٢٣	- طريقة فوجل التقريبية
٤٣٧-٤٣٠	- طريقة رسل التقريبية
٤٦٩-٤٣٨	* تحديد أمثلية الحل
٤٥٦-٤٤٥	- طريقة نقطة الارتكاز
٤٦٩-٤٥٦	- طريقة التوزيع المعدل
٤٩٢-٤٦٩	* حالات خاصة لمشاكل النقل
٥٠٦-٤٩٢	* تطبيق طريقة النقل على مجالات إدارية أخرى
٥١٤-٥٠٧	* أسئلة وتطبيقات
٥٨٩-٥١٥	* طريقة التخصيص
٥٢٣-٥١٧	- مقدمة
٥٤٢-٥٢٣	- الطريقة المجبرية للتخصيص
٥٦١-٥٤٣	- طريقة الفرع والحد
٥٨٣-٥٦٢	* معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص
٥٨٩-٥٨٤	* أسئلة وتطبيقات
٥٩٢-٥٩٠	المراجع







## مقدمة

### نشأة وتطور بحوث العمليات

Operations Research

التعريف ببحوث العمليات

من ابرز التطورات التي لحقت بميدان الاعمال بحفة عامة ومجال الصناعة بصفة خاصة ، هو ذلك الاتجاه القوي الذى ظهر خلال القرن الاخير والذى يتمثل فى تطبيق الاساليب العلمية فى حل المشكلات المختلفة . ان تاريخ هذا الاتجاه يرتبط بتلك الجهود التى قام بها مجموعة من العلماء الاوائل رفضوا فكرة ان الادارة فن واعتنقوا مبدأ ان الادارة علم مبنى على قواعد واصول واسس علمية وذلك من خلال حركتهم التى سميت بحركة الادارة العلمية Scientific Management ، والتى برزت فى عام ١٩١١ م وذلك عندما نشر فردريك ونسلو تايلور كتابه الذى اثار جدلا كبيرا فى ذلك الوقت بعنوان الادارة العلمية Scientific Management والذى طرح فيه فكرة ضرورة احوال الطريقة العلمية والمبنية على الاسلوب العلمى الذى يركز على جمع الحقائق وتحليلها للوصول الى تفسير للظاهرة محل البحث ، وذلك بدلا من طريقة الحكم الشخصى والتجربة والخطأ . ولذلك يمكن ان يقال ان اهم ما جاء به " تايلور " لنهضة نظرية الادارة هو اصراره على ضرورة تطبيق الطريقة العلمية لحل ما يواجهه الادارة من مشكلات . ولقد كانت اساليب الادارة العلمية فى عهد " تايلور " تنحصر فى دراسة الزمن والحركة Time and Motion Study وتحديد

معدلات الاداء .

وبمرور الوقت اصبحت ادارة المشروعات عملية معقدة فى عالمنا المعاصر بسبب تعدد وتنوع وتشابك وتداخل المتغيرات المؤثرة والمتأثرة بالقرار المعين ،



واصبح على الباحثين العمل على ايجاد اساليب علمية متطورة تتناسب مع طبيعة المشاكل المتعددة المجالات والمتداخلة المتغيرات والمتعارضة الاهداف .

ولذلك اتجهت الجهود الى استخدام اساليب علمية اكثر تقدما لحل مختلف انواع المشاكل وهي الاساليب التي يطلق عليها اصطلاح بحوث العمليات .

ولقد تعددت وتباينت الاراء ووجهات النظر فى التعريف بحوث العمليات ، الا ان هذا التعدد لم يكن يحمل فى طياته اختلافا حقيقيا بقدر ما كان ابـــراز نواحى معينة والتاكيد عليها من وجهة نظر واضع التعريف ، ولذلك سنجد بعد استعراض عدد من هذه التعاريف انها تلتقى جميعا عند مجموعة من الخصائص او السمات هى التى تشكل فى مجموعها أهم خصائص بحوث العمليات .

فقد عرفت جمعية بحوث العمليات فى المملكة المتحدة بحوث العمليات بأنها (١) " هى تطبيق الطـــرق العلمية على المشاكل المعقدة التى تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة من الافراد ، والمعدات ، والمواد ، والاموال فى ميدان الصناعة والتجارة ، والحكومة والدفاع ، والمدخل المميز هو اعداد نموذج علمى للنظام يتضمن قياسا للعوامل المختلفة كالصدفة والخطـــر ، وبمقتضى ذلك النموذج يمكن التنبؤ ومقارنة عوائـــد مختلف القرارات والاستراتيجيات البديلة وذلك بهـــدف مساعدة الادارة فى تحديد سياساتها واجراءاتها بأسلوب علمى " .

---

(1) Herrman, c.c., and Magee, F., operations Research for management, The New English Library LTD., London. 1969, p. 4 .



كذلك وضعت جمعية بحوث العمليات الامريكية تعريفا مختصرا لبحوث العمليات مؤداه<sup>(١)</sup> " بحوث العمليات هي التي تهتم بالتحديد العلمى لافضل تصميم وتشغيل لنظم العامل والالة ، وذلك عادة فى الظروف التى تتطلب سبب تخصيصا للموارد المحدودة . "

ويعد التعريف الذى وضعه "تشرشمان Charchman " وآخرون<sup>(٢)</sup> ، ذو اهمية خاصة لانه يركز الضوء على اهمية استخدام بحوث العمليات ، فقد جاء تعريفهم لها بأنها " تطبيق الاساليب العلمية الخاصة بالنظم بـهدف امداد الادارة بحلول مثلى لمعالجة هذه المشاكل وقد عرف " دانتزنج Dantzing " (٣) بحوث العمليات بأنها علم الادارة . أى علم اتخاذ القرارات وتطبيقها .

وعرف " واجنر Wagner " (٤) بحوث العمليات بأنها مدخل العلم المستخدم فى حل المشكلات التى تصادف الادارة العليا للمشروعات .

اما مورس وكيمبال Morse and Kimball (٥) فقد عرفا بحوث العمليات بأنها تطبيق الاسلوب العلمى عن طريق توفير الاساس الكمى الذى يمكن الادارة من اتخاذ القرارات الادارية .

- 
- (1) Ibid, P.4.
  - (2) Charchman, c.w., and Otheres, Introduction to Operations Research, Wiley 1967.
  - (3) Dantzing, G.B., Management Science in the world of to-day and to-morrow, Management Science, Vol.18, Feb. 1967, P.107.
  - (4) Wagner, H., Principles of operations Research , New york Prentice thall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1969, P.4.
  - (5) Morse, P.M.; and Kimball, G.E., Methods of operations Research, New york, John wiley and Sons Inc., 1951, P.1.

ويمكن من خلال تحليل وفحص التعريفات السابقة -  
 وغيرها - ان نلمس ونستنتج ان هناك تركيزا على بعض  
 النواحي تشترك جميعها في ابرازها ، وهي تشكل فـسـى  
 مجموعها اهم الخصائص والسمات التى تحدد اطار بحوث  
 العمليات وهى :

أولا : ان بحوث العمليات تأخذ بالنظرة الشاملة -  
 اى بمفهوم النظام - الى المنظمة أو الفـسـى  
 المشكلة المعينة . وتعنى هذه الخاصية ان  
 بحوث العمليات تتخذ من مدخل النظم اساسا  
 لوصف الظواهر والمشكلات وتشخيصها . ليس من  
 خلال ادارات المنظمة كوحدات قائمة بذاتها ،  
 ولكن من خلال الاجزاء المكونة للنظام من حيث  
 علاقات التفاعل فيما بينها ، ولذلك فـسـان  
 الدراسات الخاصة ببحوث العمليات لن تكون  
 موجهة نحو كل ادارة من ادارات المنظمة ،  
 وانما على العلاقات المتداخلة بينها ، الا فى  
 بعض الحالات التى تكون فيها بعض المشاكل  
 مرتبطة ببعض الوظائف فقط داخل المنظمة .

ثانيا : ان بحوث العمليات تركز على الطريقة  
 العلمية كأساس ومنهج فى البحث والدراسة ،  
 وهى بطبيعة الحال احسن الطرق كفاءة وفاعلية  
 اذا ما اتبعها متخذ القرار فى كل ما يواجهه  
 من مشكلات ، وتقتضى الطريقة العلمية فى حل  
 المشاكل السير فى خطوات اربعة محددة ،  
 اولها التحديد الدقيق للمشكلة وتحديد كافة  
 ابعادها ، ثم تأتى الخطوة الثانية متمثلة  
 فى تكوين مجموعة الفروض التى تعطى تفسيراً  
 ممكننا لابعاد المشكلة ، اما الخطوة الثالثة  
 فهى اختبار صحة تلك الفروض واستعراض



البدائل التي تسهم في حل المشكلة على ضوء الفروض الصحيحة ، ثم بعد ذلك تأتي الخطوة الرابعة والمتمثلة في اختيار الحل الامثل من مجموعة الحلول البديلة ووضعه موضع التنفيذ ومتابعة نتائج التنفيذ ، وبحوث العمليات تعتمد على هذه الخطوات الاربعة عند معالجة ما يواجه الادارة من مشاكل وذلك هو الذي يكسبها خاصية هامة وهي ارتكازها على المنهج العلمي في البحث والدراسة ، وسيظهر ذلك بوضوح عند التعرض لخطوات بناء النماذج .

ثالثا : تعتبر عمليات بناء النماذج الرياضية عصب بحوث العمليات . والنموذج الرياضي لا يخرج عن كونه تمثيل مبسط للواقع في صورة نموذج يعكسه ويمثله ، والغرض منه استنباط علاقات بين متغيرات معينة ، بحيث يمكن تحقيق هذه العلاقات عن طريق استخدامها في صورة وصفية او تنبؤية . ويمكن التوصل احيانا الى نتائج ما كان يمكن استنتاجها او ملاحظتها في غيبة هذا النموذج ، لذلك تهتم بحوث العمليات ببناء النماذج الرياضية .

رابعا : من الخصائص المميزة لبحوث العمليات انها ترتكز على مفهوم تكامل المعرفة لفروع العلم المختلفة ، فهي تستفيد من التقدم والخبرة والمعرفة من مجموعة العلوم في مختلف التخصصات ، لان ذلك من شأنه ان يسهم في ايجاد التكامل في المفاهيم ، والذي يعتبر ضروريا لتفسير الظواهر تفسيراً متكامل الابعاد ، فمثلا يمكن القول ان نظم العامل والالسة Man-Machine Systems لها ابعادها

المتنوعة منها الطبيعية والبيولوجية  
والسيكولوجية والاجتماعية والاقتصادية  
والهندسية . لذلك فان فهم هذه النظم فهما  
صحيحا تتطلب تعاونا من المتخصصين فى هذه  
العلوم .

### تلخيص للتطور التاريخى لبحوث العمليات

ترجع بعض مفاهيم وتفاصيل وضع وتكوين وتحليل  
النماذج المستخدمة اليوم الى عدة قرون ماضية ، اى  
ان بحوث العمليات وان كانت تعتبر علما حديثا نسبيا الا  
ان بعض جذورها العلمية وبعض الاسس التى تركز عليها  
لها تاريخ يسبق بكثير بحوث العمليات كما نعرفها  
اليوم ، فنظرية الاحتمالات . Probability theory .  
يرجع تاريخ العمل بها الى القرن السابع عشر ،  
كذلك فان التطورات التى لحقت بحسابات التفاضل والتكامل  
Differential and Calculus كانت بفضل كل من  
اسحاق نيوتن Isace Newton وجوتفريد  
ليبنتز G.V. Liebnitz . كذلك فقد شهد بدايــة  
هذا القرن ظهور نماذج مراقبة الجودة والتى قدمها  
كل من فورد هاريس Ford Harris فى مصانع  
وستنجهاوز . وويلسون R.H. Willson فى مصانع  
بل للتليفونات . كما قدم ماركوف A.N. Markov  
دراسات مبدئية عن النماذج الديناميكية  
• Dynamic Models

كذلك ينسب الفضل الى ايرلنج Erlang خلال فترة  
حياته من عام ١٨٧٨ حتى عام ١٩٢٩ فى تقديم التحليل  
الاقتصادى لخطوط الانتظار فى مصنع كوبنهاجن  
للتليفونات .

وبرغم الجهود السابقة الا انه يمكن القول ان  
بحوث العمليات لم تبدأ كمجال منظم للدراسة والبحث



الا خلال الحرب العالمية الثانية وتحديدًا في عام ١٩٤٠ حين كون الجيش الانجليزي فريقًا مكونًا من مجموعة من العلماء على رأسها البروفيسور بلاكت P.M.S. Blakett والحائز على جائزة نوبل في الطبيعة أسندت اليه مهمة بحث ودراسة عدد من المشاكل الاستراتيجية والتكتيكية المعقدة والخاصة بدراسة مشكلة تطوير جهاز الرادار وتحديد المواقع المثلى لاجهزة الرادار والربط بينها وبين المدفعية المضادة للطائرات والانوار الكاشفة والطائرات الاعتراضية وغير ذلك من عناصر نظام الدفاع الجوي وبعد ذلك اتسعت لتشمل البحرية البريطانية .

ولقد ضم هذا الفريق علماء في الطبيعة والرياضيات ، ووظائف الاعضاء ، والجيولوجيا ، والرياضيات الطبيعية ، وعلماء الفيزياء الفلكية ، وضباط من الجيش ، وفروع اخرى من العلم واطلق على هذا الفريق مجموعة بحوث العمليات العسكرية Army operational Research Group ، ويبدو واضحًا ان مجموعة المهارات والمعارف التي يضمها هذا الفريق تمكنه من التعامل مع المشكلات المعقدة وذلك اذا ما قورن بقدرة نوعية فردية من هذه المهارات بالتعامل مع ذات المشاكل ولقد حققت هذه المجموعة نجاحًا هائلًا في ايجاد حلول لمختلف المشكلات التي تناولتها مثل تأمين وحماية القوات العسكرية ، وقدرتها في استغلال الموارد المحدودة من الرجال والمعدات للقوات البريطانية في صد العدوان الالمانى وتحويل بريطانيا من موقف الدولة المدافعة الى الدولة المهاجمة في عام ١٩٤٢م .

ولقد كان هذا النجاح الهائل لهذا الفريق سببًا من اسباب انتصارات الجيش الانجليزي في معركة بريطانيا الجوية ، ومعركة شمال الاطلنطي ، وغزوة الجزيرة في المحيط الهادى ، ولذلك فقد تم تكويين مجموعات مشابهة في مختلف فروع القوات المسلحة

الانجليزية ، وبدأت الولايات المتحدة الامريكية فى تتبع تلك الخطى وكونت فرقا مشابهة تضم علماء متخصصون فى مختلف فروع العلم والمعرفة فى جميع افرع القســــــــــــــــوات المسلحة الامريكية ، وقد نجحت بالفعل هذه الفرق فى حل الكثير من المشكلات المعقدة فى عديد من المجالات .

وبنهاية الحرب العالمية الثانية وانخفــــــــــــــــاض الميزانية المخصصة لبحوث الجيش ، بدأ التخلــــــــــــــــص من العديد من الافراد الذين كانوا يعملون فى فرق بحــــــــــــــــوث العمليات ممن اكتسبوا خبرة فى هذا المجال وتصادف ان كان ذلك فى توقيت ظهرت فيه حاجة مديري المصانــــــــــــــــع للتخطيط لزيادة الانتاج واعادة بناء الكثير من المنشآت الصناعية التى دمرتها الحرب ، ولذلك فقد تلقفــــــــــــــــت المؤسسات المدنية هؤلاء المتخصصون فى اساليب بحــــــــــــــــوث العمليات وجذبتهم اليها بعد ان تبين انه يمكن الاستفادة من هذا الفرع الجديد من فروع المعرفة فى الحياة المدنية، وتحقيق نجاح يماثل ذلك النجاح الذى تحقق فى المجال العسكــــــــــــــــرى، ومن ثم بدأت بحوث العمليات فى الانتشار فى مختلف الميادين وخاصة المنظمــــــــــــــــات الصناعية والتجارية الكبيرة .

ومن الانصاف ان نشير هنا الى ان الاستخدام التجارى للحاسبات الالية فى الخمسينات كان مفتاح نمو وتقــــــــــــــــدم وتطور بحوث العمليات وانتشار واتساع تطبيقهــــــــــــــــا ، اذ ان الحلول العملية للمشاكل الادارية تتطلب المقدــــــــــــــــرة فى القيام بعمليات حسابية متعددة وحفظ كميات ضخمة من البيانات لا تنجز الا حينما تتاح تلك الحاســــــــــــــــبات الالكترونية التى تتيح المقدرة على اجراء مثل تلك العمليات الحسابية بالاضافة الى مقدرتها فى حفظ واسترجاع كميات هائلة من البيانات والمعلومات . لذلك فانه كان من الطبيعى ان تكون بداية وضع اساليب بحوث العمليات موضع التطبيق العملى مرتبط غالبا بالشركات

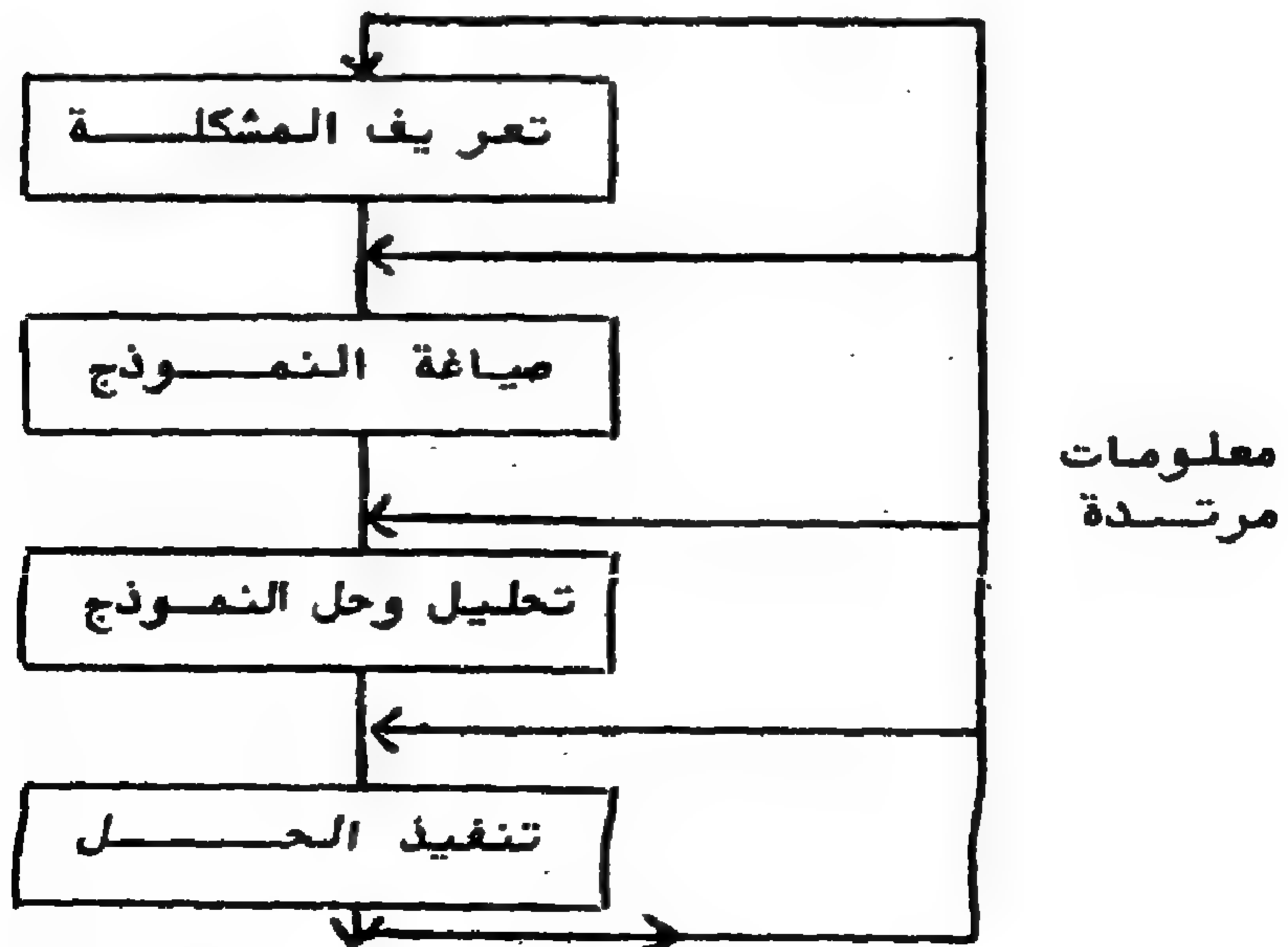


الكبرى التى تملك تلك الحاسبات الالية . مع ملاحظة  
ان سرعة ودقة تلك الحاسبات فى بداية السنوات الماضية  
كانت محدودة بمقارنتها بما هو متاح اليوم .

وفى اواخر الستينات واول السبعينات حدث تطور  
آخر بالنسبة للمجالات التى تطبق فيها اساليب بحوث  
العمليات ، اذ بدء فى تطبيقها فى مجال الانشطة الحكومية  
ومن الامثلة على ذلك قيام بلدية مدينة نيويورك بانشاء  
وحدة لبحوث العمليات اطلق عليها اسم RAND لتعمل  
جنباً الى جنب مع باقى وحدات الخدمات الحكومية كالحريق  
والبوليس والصحة العامة .

### الخطوات العامة لاساليب بحوث العمليات .

على الرغم من تعدد الادوات والاساليب التى تستخدم  
فى تطبيقات بحوث العمليات ، وعلى الرغم كذلك من  
تباينها الى حد ما فى مجالات التطبيق ، الا انها  
تتفق جميعها فى العناصر الرئيسية التى تشكل مجموعة  
الخطوات العامة المشتركة لاساليب بحوث العمليات ،  
ويوضح الشكل التالى هذه الخطوات .



" الخطوات العامة لاساليب بحوث العمليات "

ويتضح من هذا الشكل ان التعريف والتحديد الدقيق للمشكلة هو الخطوة الاولى ، تليها صياغة تلك المشكلة فى شكل نموذج ، عندئذ يتم تحليل وحل النموذج واختيار الحل الامثل للمشكلة ثم تطبيق هذا الحل . ومن خلال الخبرة المكتسبة من تطبيق وتنفيذ الحل يمكن اجراء تحسينات على أى من الخطوات الاربعة السابقة وهذا ما يعبر عنه فى الشكل السابق بالمعلومات المرتدة .

ونظرا لاهمية هذه الخطوات فى تفهم الاطار العام لاساليب بحوث العمليات فاننا سنقدم فيما يلى بعض التفاصيل التوضيحية لها للوقوف على فهم صحيح لمعناها ومغزاها ودورها فى اساليب بحوث العمليات .

#### أولا : تعريف المشكلة : Problem Identification

تبدأ الخطوات او المراحل التى تمر بها مختلف اساليب بحوث العمليات بالتعرف على المشكلة والتحديد الدقيق لها ، وغالبا ما تكون هذه الخطوة على درجة عالية من التعقيد تفوق ما نتخيله ، ويرجع السبب فى ذلك الى انه يوجد الكثير من الخلط بين اكتشاف الظاهرة وبين تعريف وتحديد المشكلة ، فاذا رأت منشأة مما ان هناك انخفاضا فى رقم الربح المحقق من انشطتها كان ذلك بمثابة الظاهرة . اما تحديد المشكلة فانه يتطلب مزيدا من التحليلات المتعمقة لتفسير تلك الظاهرة . فهل انخفاض الربح كان نتيجة لارتفاع التكلفة ؟ ان كان بسبب زيادة حدة المنافسة فى السوق ؟ ام كان لاي سبب آخر ؟ .

#### ثانيا : تكوين وصياغة النموذج Formulation of the Model

بعد ان يتم تعريف المشكلة وتحديدتها تحديدا دقيقا ، نكون بذلك قد وصلنا الى المرحلة التى يمكن



فيها تكوين وصياغة المشكلة في صورة نموذج يعبر عنها ، ويعرف النموذج بأنه تمثيل للواقع يتعلق بظاهرة أو بنظام معين ويعبر عن العلاقة بين اجزائه ويستخدم في التنبؤ بالاموضع المستقبلية التي يمكن ان تتخذها الظاهرة او النظام الاصيل ، بحيث يتم استنتاج بعض المعلومات والمفاهيم الاساسية عن الظاهرة الاصلية موضع البحث والاستناد الى تلك المعلومات في اتخاذ القرارات .

اي ان النموذج هو تصوير بسيط وواقعي للمشكلة ، وان بناء وحل النموذج يسهم في فهم الواقع العملي وايضا يمكن من التنبؤ بالاتجاهات المقبلة . والنماذج بهذا المعنى تعتبر الاساس لكل ادوات بحوث العمليات .

ولتوضيح ما تقدم يمكن القول ان نموذج الطائرة ما هو الا شكل توضيحي على الاقل بصريا للطائرة الحقيقية وعلى ذلك يمكن القول ان النموذج يقوم ويستند على اعتبارين على درجة عالية من الاهمية ويوفق بينهما . اولهما ان يكون تصويرا مبسطا لتسهيل وتبسيط الدراسة ، فمثلا عند دراسة تأثير الريح على الطائرة فانه يكفى اعداد نموذج للطائرة يراعى فيه شكل الطائرة فقط دون حاجة الى تعقيدات وتفصيلات فنية للطائرة ، اذ يمكن اهمال التفاصيل الاخرى وتجاهلها وبذلك يكون التبسيط قد انصب على تمثيل السمات او الصفات او العوامل الاكثر اهمية فقط في الواقع اما الصفات الاخرى والستى لا تتعلق مباشرة او غير مباشرة بالظاهرة فيمكن تجاهلها . والاعتبار الثانى الذى يستند عليه اعداد النموذج هو الواقعية وذلك حتى يمكن الاستفادة من النتائج التي يمكن التوصل اليها من حل النموذج ، وقد يرى البعض ان عملية التبسيط الذى ذكرناها تبعد النموذج عن الواقعية ، ولكن الفهم الصحيح للاعتبارين السابقين هو ان عملية التبسيط تهدف بالدرجة الاولى الى استبعاد أى تعقيدات غير اساسية لفهم وحل المشكلة، اي انه يجب

ان يكون النموذج كاملا بما فيه الكفاية لتقريب مظاهر الواقع التى تحت البحث فليس متوقعا ان يشتمل النموذج على كل العناصر الداخلة فى تكوين الواقع او الظاهرة وانما على عدد محدود منها يتيح لمتخذ القرار تبسيط الواقع - وفقا لطبيعة المشكلة - بشكل يضمن الحصول منها على استنتاجات سليمة تمهد الطريق لاتخاذ القرارات.

Break-even Analysis

مثال : تحليل التعادل

لتحديد ماذا نعنى باصطلاح نموذج Model فاننا سنقوم فى الجزء التالى بتناول مثال يهدف الى تكوين وصياغة نموذج لتحليل التعادل . وتحليل التعادل كما هو معروف بمثابة مقياس او مؤشر للعلاقة بين الايرادات والتكاليف ، اى ان الهدف من النموذج هو تحديد نقطة التعادل Break-even Point والتى عندها تتعادل التكاليف الكلية مع الايرادات وتكون الارباح مساوية للصفر .

ان النموذج الذى سيعد لتحليل التعادل لابد وان يتضمن علاقة حجم المبيعات بالربحية اذ ان حجم المبيعات له تأثيرين متضادين على الارباح فهو من ناحية يزيـد الايرادات ( فى حالة زيادة المبيعات ) ، ومن ناحية اخرى يزيـد التكاليف الكلية لهذه الزيادة فى حجم المبيعات .

ولذلك فان التصور الاول والمبسط للنموذج الذى يصف تحليل التعادل سيكون سهلا ومبسطا ويأخذ شكل المعادلة التالية :

صافى الربح = ايرادات المبيعات - التكاليف الكلية  
وعلى الرغم من ان هذا التصور الاولى تضمن  
العنصرين اللذين يشكلان نقطة التعادل وهما ايرادات المبيعات والتكاليف الكلية ، الا انه لم يتضمن مراحلة



حجم المبيعات ، علما بأن هذين العنصرين واللذين يحددان صافي الربح يتأثران بحجم المبيعات . اذن يتطلب الامر تعزيز ذلك النموذج المبسط بجعله يحتوى صراحة على حجم المبيعات ويتم ذلك كالآتى :

١ - من المعروف ان ايرادات المبيعات هي عبارة عن عدد الوحدات المباعة ( حجم المبيعات ) مضروباً في سعر بيع الوحدة أى :

$$\text{ايرادات المبيعات} = \text{حجم المبيعات بالوحدات} \times \text{سعر بيع الوحدة الواحدة} .$$

٢ - بالنسبة لعنصر التكاليف الكلية ، فالمعروف ان التكلفة الكلية تنقسم الى نوعين من التكاليف وهما التكاليف المتغيرة Variable costs والتكاليف الثابتة Fixed Costs .

والتكاليف المتغيرة هي تلك التكاليف التي يمكن تحميلها مباشرة وبصفة محددة على المنتج ( العمالة ، المواد ، الخ ) وهذه النوعية من التكاليف تتغير وفقاً للتغير الذي يحدث في حجم السلع المنتجة ، أما التكاليف الثابتة فهي بطبيعتها تكاليف غير مباشرة Indirect Costs مثل ( الايجار - الاشراف .. الخ ) وهي لا تتغير بتغير حجم السلع المنتجة . خلاصة ما تقدم ان التكاليف المتغيرة تتأثر بحجم المبيعات ، في حين ان التكاليف الثابتة لا تتأثر بذلك وعلى هذا الاساس يمكن وضع العلاقة بين اجمالى التكاليف وحجم المبيعات فى صورة المعادلة التالية :

التكلفة الكلية = ( عدد الوحدات المباعة )  $\times$  ( التكلفة المتغيرة للوحدة ) + ( التكلفة الثابتة ) وبالرجوع الى المعادلة الاصلية وهي :

$$\text{صافي الربح} = ( \text{ايراد المبيعات} ) - ( \text{التكاليف الكلية} ) .$$

فانه يكون من الامكان بعد التوضيح السابق تحديد العلاقة بين الربح وحجم المبيعات عن طريق التعويض فى المعادلة الاصلية وذلك باستبدال كل من ايراد المبيعات والتكلفة الكلية بمعادلة كل منهما والستى تم التوصل اليها من العرض السابق ، وبذلك تكسبون العلاقة بين الربح وحجم المبيعات متمثلة فى المعادلة الاتية :

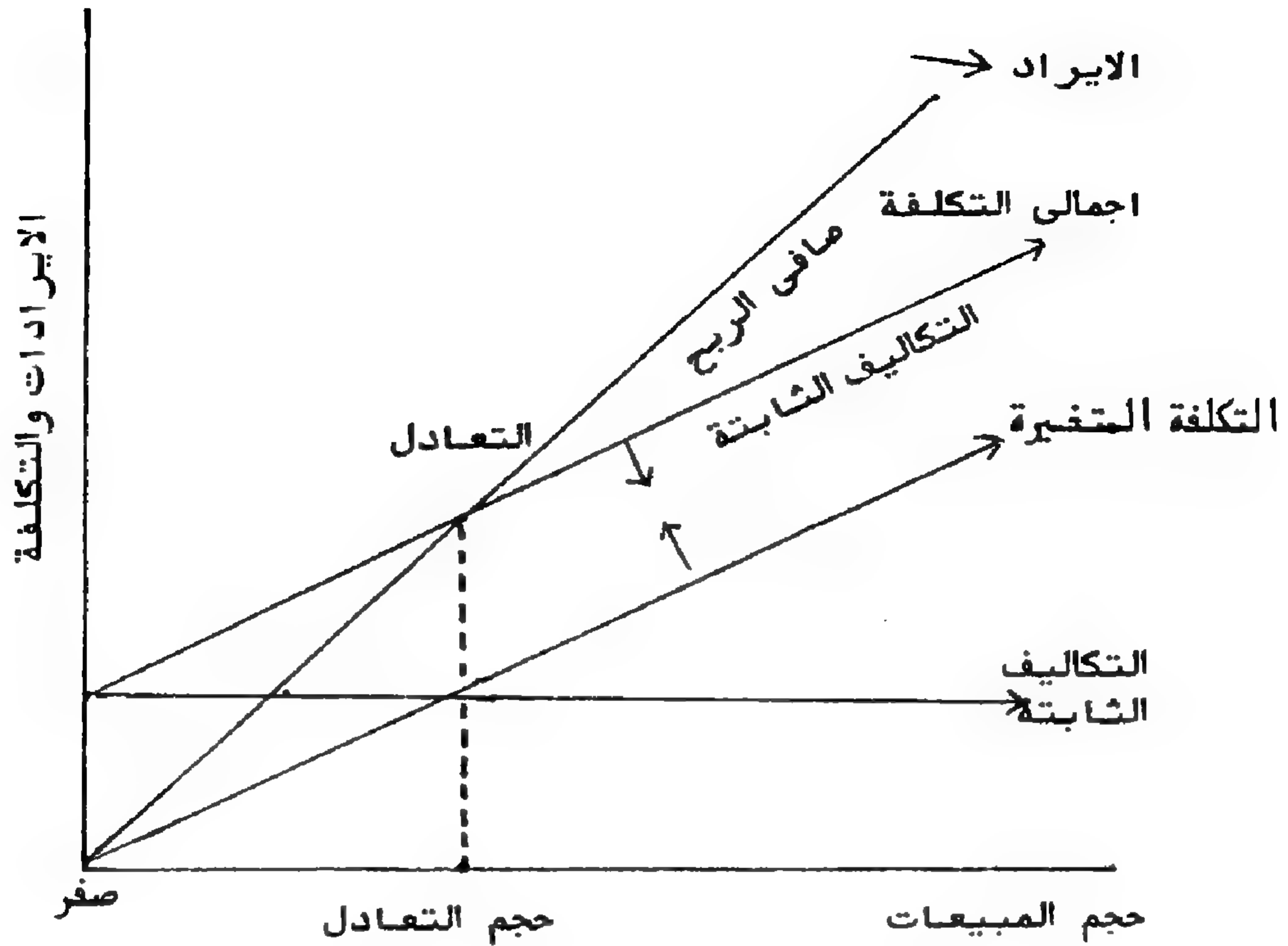
صافى الربح = ( عدد الوحدات المباعة )  $\times$  ( سعر بيع الوحدة ) - ( عدد الوحدات المباعة )  $\times$  ( التكلفة المتغيرة للوحدة ) - ( التكاليف الثابتة ) ، وحيث أن الهدف من التحليل السابق التوصل الى نموذج يحدد حجم المبيعات الذى يحقق التعادل ، فانه عادة ما يتم التعبير عن النموذج فى صورة اكثر ملائمة للتحليل من مجرد توصيف لفظى بالصورة التى تمثلها المعادلة اللفظية السابقة . ولتحقيق هذه الملاءمة فان هناك اسلوبين للتعبير عن النموذج المستهدف ، نموذج بيانى وآخر رمزى .

#### Graphic Model

#### النموذج البيانى

الشكل التالى يمثل نمودجا بيانيا يهدف الى توضيح علاقة وارتباط العناصر المؤثرة فى نقطة التعادل بحجم المبيعات .





( النموذج البياني لتحليل التعادل )

ويتضح من هذا النموذج البياني ان التكاليف الثابتة تم تمثيلها بخط مستقيم موازى للمحور الافقى لان التغير فى حجم المبيعات يفترض انه لا يؤثر على التكاليف الثابتة ، كما ان التكاليف المتغيرة ستكون صفرا اذا لم تكن هناك مبيعات وتزداد بمعدل ثابت مع كل زيادة فى حجم المبيعات ، والمعدل الثابت للزيادة يساوى التكلفة المتغيرة للوحدة ، أما التكاليف الكلية فيتم ايجادها باضافة التكاليف الثابتة والمتغيرة لبعضهما عند كل مستوى من مستويات حجم المبيعات ، وخط التكاليف الكلية يستمر موازيا لخط التكاليف المتغيرة ويكون البعد بين هذين الخطين عنسدد اى مستوى من مستويات حجم المبيعات مساويا للتكاليف

الثابتة ، اما خط الايرادات فانه يماثل خط التكاليف المتغيرة من حيث ان الايرادات تكون صفرا عندما لا تباع اى وحدات ، وتزداد الايرادات بمعدل ثابت ( مساو لسعر بيع الوحدة ) بزيادة مستوى حجم المبيعات ، الا انه يختلف فى ان خط الايرادات يزداد انحدارا عن خط التكاليف المتغيرة . وعموما فان صافى الربح عند اى مستوى معين للمبيعات يكون مساويا للفرق بين الايرادات واجمالى التكاليف ، مع ملاحظة ان الارباح لا تبدأ فسى الظهور الا عندما تكون الايرادات اكبر من التكاليف .

وتقع نقطة التعادل عند تقاطع خطى التكاليف الكلية والايرادات ، اذ عند هذا التقاطع تتساوى التكاليف الكلية بالايرادات ويكون الربح صفرا . وعلى يسار هذه النقطة فان الفرق بين الايرادات واجمالى التكاليف يمثل صافى الخسائر لان التكاليف الكلية تفوق الايرادات ، اما على يمين هذه النقطة وحيث تفوق الايرادات اجمالى التكاليف فهنا يتمثل صافى الربح .

ونود ان نشير هنا الى اهمية تحويل النموذج من صورته اللفظية الى صورة بيانية فى الحالة الاولى تكون هناك صعوبة فى حل المشكلة ، اما فى حالة المدخل البيانى فتتمثل وبسهولة كثير من الحلول البديلة عند مستويات مختلفة من المبيعات ، الا انه مع ذلك يعتبر المدخل البيانى صعب التطبيق اذا ما اريد استخدام لعدة منتجات كل منها يمثل خطأ ، كذلك تزداد وتتعدد صعوبة الاستعانة بهذا المدخل اذا كانت التكلفة والسعر تتقلب فى حدود واسعة بمرور الوقت ولا تظل ثابتة كما كان ذلك مفترضا فى النموذج البيانى .

#### Symbolic Model

#### النموذج الرمزى

يمكن التغلب على معظم مساوئ النموذج البيانى باستخدام النموذج الرمزى او الرياضى ويتم ذلك كالاتى :



بغرض أن :

س = سعر بيع الوحدة

م = التكلفة المتغيرة للوحدة

ث = التكلفة الثابتة

ر = صافي الربح

ع = حجم المبيعات بالوحدات

عندئذ يمكن كتابة معادلة الربح رمزياً كالآتى :

$$ر = ع - س - م - ث$$

وهذا النموذج يعتبر صحيحاً لأن كل مفرداته أو متغيراته سيعبر عنه فى النهاية بمقياس واحد ثابت وهذا المقياس هو الوحدة النقدية ( جنيه مثلاً ) .

ان احد المزايا الهامة للنماذج الرمزية يتمكن فى سهولة اجراء تحويلات متنوعة فى النموذج لياخذ اشكالا أبسط فى التكوين، ومن ثم الحفظ والتذكر، فعلى سبيل المثال نلاحظ فى المعادلة السابقة ان الرمز (ع) قد تكرر مرتين فى الجانب الايسر للمعادلة، ومن ثم يمكن تبسيط المعادلة اذا ما اعتبرناها عاملاً مشتركاً لتأخذ الصورة التالية :

$$ر = ع ( س - م ) - ث$$

كما يمكن اجراء تعديل وتحويل آخر على صورة هذه المعادلة . فمن المعروف ان سعر بيع الوحدة ناقصاً تكلفتها المتغيرة تساوى هامش ربحها ، وعليه اذا اعتبرنا ان الرمز (هـ) يمثل هامش ربح الوحدة، فانسه يمكن اعادة كتابة المعادلة السابقة بعد هذا التحويل لتأخذ الصورة التالية :

$$ر = ع هـ - ث$$

وبلا شك فان المعادلة بالصورة الاخيرة اصبحت على درجة عالية من البساطة وذلك بالمقارنة بالمعادلة التى اوردناها فى بداية النموذج الرمزى ، وهذا





الذى وضعناه لتحليل التعادل قد اشتمل ضمنا على عدة افتراضات . فقد افترضنا مثلا ان ذلك النوع من التكلفة التى لا تتأثر مباشرة بحجم الانتاج ( التكلفة الثابتة ) كانت حقيقة ثابتة ولا محل لتغيرها وهذا غير حقيقى فى الاجل الطويل ، كذلك افترضنا ان كلا من التكلفة المتغيرة للوحدة وكذلك سعر بيع الوحدة ثابتين وانهما فى شكل علاقة خطية مع حجم المبيعات وهذا ايضا افتراض ليس صحيحا فى جميع المواقف .

### ثالثا : تحليل وحل النموذج Analysis and Solution the Model

بعد تكوين النموذج بصورته الصحيحة ، تبدأ المرحلة الثالثة من مراحل اساليب بحوث العمليات وهى المرحلة التحليلية والتى تهدف الى وضع حل للمشكلة القرارية ، ويتم ذلك عادة عن طريق تطبيق الطرق والاساليب العلمية بدءا من الاساليب السهلة والميسرة جدا ومتدرجين الى الاصعب نسبيا ، ويستخدم علماء الادارة عدیدا من هذه الاساليب ، فمنهم من يستخدم اساليب حديثة مثل البرمجة الخطية او شبكات الاعمال او نظرية الصفوف او نظرية المباريات ، ومنهم من يستخدم اساليب اولية مثل حساب التفاضل ، وعموما فمن خلال اساليب التحليل المختلفة يمكن التوصل الى حل المشكلة .

### رابعا : تنفيذ الحل Implementation of the Solution

بعد التوصل الى الحل الامثل للمشكلة القرارية فان الامر يتطلب ان يوضع هذا الحل موضع التطبيق والتنفيذ على المشكلة الفعلية . وعادة يحتاج تطبيق الحل الى برامج على الحاسب الالى حيث ان معظم المشاكل التى تواجه الادارة تكون كثيرة المتغيرات وتتطلب عمليات حسابية واحصائية يصعب التعامل معها يدويا ولذلك ففى كثير من الحالات يكون استخدام الحاسب الالى لازما وضروريا .



# الفصل الأول

\* البرامج الخطية

\* صياغة المشكلة والحل البياني





تعتبر مشكلة توزيع الموارد المحدودة على استخدامات المتعددة من المشاكل التي تعترض كل فرد منا حتى على مجرد حياته اليومية ، فالطالب يواجه بهذه المشكلة مثلاً عند توزيع ما لديه من وقت متناح بين الاستذكار ، والنوم ، وتناول الطعام ، ومجاسلات الاستجمام الأخرى ، كذلك فإن الغالبية العظمى من الأفراد لديهم امكانيات مالية محدودة ومن ثم فإنهم يواجهون بمشكلة ضرورة استخدام هذه الاموال احسن استخدام .

وتعتبر مشكلة توزيع الموارد بين الاستخدامات المختلفة البديلة من اهم المشاكل التي تواجه المديرين في جميع انواع التنظيمات - فهم يواجهون بمشكلة هامة وهي الكيفية التي يتم بها توزيع الطاقات الانتاجية المتاحة على مختلف نوعيات المنتجات التي تقرر انتاجها - كذلك الكيفية التي يتم بها توزيع ميزانية الاعلان على مختلف وسائل الاعلان من صحافة ، ومجلات ، واذاعة ، وتليفزيون . الخ ، بحيث يتحقق الاستخدام الامثل لهذه الميزانية ، الى آخر تلك المشاكل التي دائماً ما تواجه المدير وتتطلب منه ان يختار من بين عدة بدائل .

واسلوب البرمجة الخطية يعتبر من اهم الاساليب التي تساعد الادارة في حل مشاكل التخصيص ، خاصة اذا علمنا ان مشكلة تخصيص الموارد المحدودة تعتبر نقطة الارتكاز الاساسية التي يدور حولها العمل الاداري في المنظمات الحديثة ، سواء كانت منظمات صناعية أو خدمية كذلك يواجه المدير في المنظمات الحكومية والاجهزة الادارية المختلفة بذات المشكلة .

### تعريف البرمجة الخطية

يعرف البعض<sup>(١)</sup> البرمجة الخطية بأنها " أسلوب رياضي لحل مشاكل استغلال الموارد والامكانيات المحدودة بطريقة تحقق للمشروع اقصى ارباح ممكنة ، أو تحمله اقل تكلفة ممكنة " .

كما يعرفها كاتب آخر<sup>(٢)</sup> بأنها " اداة مفيدة حينما يكون هناك عدة متغيرات تؤثر على تحقيق الهدف المرجو ، بحيث تصبح المشكلة هي مشكلة اختيار احسن التوافيق الخاصة بقيم هذه المتغيرات ، وكما يسدل الاسم فان العلاقة بين كل متغير من هذه المتغيرات من ناحية والهدف المطلوب تحقيقه من ناحية أخرى يجب أن تكون خطية " .

كذلك يعرفها بعض الاقتصاديين<sup>(٣)</sup> بأنها " طريقة رياضية لتخصيص مجموعة من الموارد والامكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ، بينما تكون جميع القرارات متشابكة لانها تقع جميعا تحت مجموعة من القيود والحدود الثابتة " .

كذلك يعرفها هاربر<sup>(٤)</sup> Harper بأنها " اصطلاح يشمل مجال واسع من الاساليب الرياضية التي تهدف الى تحقيق اداء امثل في حدود الامكانيات المتاحة " .

(١) د. سمير بهياري ، د. محمد صبرى العطار ، بحوث

العمليات فى المحاسبة ، مكتبة الانجلو المصرية ،

القاهرة ، ١٩٧٩ ، ص ٤٧ .

(٢) د. حنفى محمود سليمان ، المنهج المتكامل فى

الادارة ، دار الجامعات المصرية ، الاسكندرية ،

١٩٧٩ ، ص ١٤٧ .

(٣) Cole, D., The theory of linear Economic Models, McGraw Hill Book Co., Inc., London. 1969, p. 3.

(٤) Harper, W.M., Operational Research, Macdonald and Evans, London, 1975, p. 192 .



كذلك يعرفها ماكور<sup>(١)</sup> Makower بأنها " الطريقة التى يتم بها تقرير كيفية مقابلة الاهداف المأمولة كتخفيض التكاليف او تعظيم الارباح فى ظل مجموعة من الثوابت تمثل كمية الموارد المتاحة " .

ويتضح من التعاريف السابقة ان " البرمجة الخطية هى ذلك الاسلوب الرياضى الذى يهدف الى ايجاد أحسن استخدام للموارد المحدودة وفقا لمعيار افضلية معين " .

#### الشروط الواجب توافرها لتطبيق اسلوب البرمجة الخطية

من خلال الاستعراض السابق لمفهوم البرمجة الخطية وتعريفاتها يمكن ان نقف على حقيقة ان هناك شروطا معينة يتعين ان تتوافر فى المشكلة التى يراد حلها باستخدام اسلوب البرمجة الخطية بحيث اذا افتقدت المشكلة احدى تلك الشروط فيكون من غير المجبى استخدام هذا الاسلوب بل يتعين البحث عن اسلوب آخر للتعامل مع تلك النوعية من المشاكل ، وهذه الشروط هى :

#### أولا : وجود هدف يراد تحقيقه

لكل منشأة هدف تسعى لتحقيقه ، وعادة ما يكون هذا الهدف مطلوب زيادته وتعظيمه الى اقصى حد ممكن ( مثل الارباح ، العمالة ، التدفق النقدى الداخلى ، الفاعلية الكفاءة .. الخ ) ، او مطلوب تخفيضه الى ادنى حد ممكن ( مثل التكاليف ، وقت الانتهاء من التنفيذ ، الاسراف ، المسافة المقطوعة ، ... الخ ، وبطبيعة الحال عندما تواجه المشروع مشكلة ما فانها

---

(١) Makower, M.S., Operational Research, Haddevand Stangton, London, 1977, p. 156 .

تندرج تحت الهدفين السابقين ، ويكون مطلوبا التوصل الى حل لهذه المشكلة يعمل على تعظيم الهدف أو تدنيته حسب الاحوال ، الا انه يتعين ان يكون واضحا أن مجرد وجود هدف يراد تحقيقه من حل المشكلة لا يفرض بالشرط الاول لتطبيق اسلوب البرمجة الخطية ، اذ يلزم ان يكون فى مقدرتنا التعبير عن هذا الهدف فى صورة كمية قابلة للقياس الرقمى وليس هدفا لفظيا وصفيا فبحوث العمليات تركز على الاساليب الرياضية الرقمية مما لا يصلح معها التوصيف اللفظى واللغوى للهدف المطلوب تحقيقه .

### ثانيا : وجود خطط بديلة ممكنة الوصول الى الهدف

يتعين ان يكون للمشكلة المراد حلها باستخدام اسلوب البرمجة الخطية عدد من الخطط البديلة الممكنة التى يمكن ان تصلح او تسهم فى تحقيق الهدف الموضوع وعلى ذلك فان الشرط الثانى يتلخص فى مدى امكانية وضع عدد من الخطط البديلة لتحقيق الهدف المنشود ، وبشرط ان تكون تلك الخطط البديلة قابلة للتعبير عنها وقياسها كميا ، وان يكون هناك ارتباطا فيما بينها ، وبطبيعة الحال عندما يوجد للمشكلة عدة بدائل فانه بالتالى سيكون لكل بديل من هذه البدائل قدرة معينة على تحقيق الهدف الموضوع ، ومن ثم تصبح المشكلة امام متخذ القرار هى اختيار ذلك البديل الاكثر كفاءة وفاعلية ومساهمة فى تحقيق الهدف الى اقصى مدى ، ومن ثم يصبح هو ذلك الحل الامثل الذى نبحث عنه ، وتأسيسا على ما تقدم فانه لامبرر لاستخدام اسلوب البرمجة الخطية اذا لم يكن امام الادارة فى معالجة مشكلة ما سوى حل واحد فقط ولا يوجد امامها بدائل يمكن ان تكون حولا ممكنة لهذه المشكلة ، لانه فى هذه الحالة يصبح هذا الحل الوحيد هو الحل الحتمى المفروض الاخذ به من جانب متخذ القرار .

ثالثا : وجود قيود على عملية الاختيار من بين البدائل والخطط المتاحة :

ونعنى بذلك ان هناك نهايات محددة تحد من الانطلاق الى ما لا نهاية فى تحقيق الهدف المنشود ، فاذا كان الهدف المراد تحقيقه تحقيق اقصى ربح ممكن فان ذلك ليس معناه تحقيق ما لا نهاية من الارباح ، لان ذلك يتطلب ان تكون الادوات المطلوبة لاجداث وتحقيق هذا الربح لا نهائية وغير محدودة ، وهذا غير حقيقى فإلى منشأة مهما كان نوعها تملك من الموارد المختلفة بقدر معين ومحدود ، فمثلا قد يكون هناك حد اقصى لما يمكن للإدارة الحصول عليه من مادة معينة ، أو طاقة آلية معينة ، أو رأس مال معين ، أو قد يكون هناك حد اقصى للطاقة الاستيعابية للسوق بالنسبة لنوع معينة من السلع .. وهكذا ، وهذا كله يعنى ان يتم تحقيق الهدف المنشود فى اطار القيود المفروضة على البدائل المتاحة امام الإدارة ، والحقيقة انه لو كانت المشكلة التى نعالجها لا توجد عليها قيود مفروضة على تحقيق الهدف وان الموارد متوفرة بالقدر المطلوب وكافة الظروف المختلفة متاحة لما كانت هناك مشكلة تحتاج الى حل ولما كانت هناك حاجة الى الاتجاه الى البرمجة الخطية أو غيرها من اساليب حل مشاكل الإدارة.

خلاصة القول ان الموارد المتاحة للمنشأة متوفرة بكمية معينة ومن ثم فان الحد الاقصى لما هو متوفر من اى من تلك الموارد فى فترة زمنية معينة يمثل قيودا لا بد من اخذه فى الاعتبار عند وضع الحلول البديلة .

والقيود نوعان اولهما ما اشرنا اليه فى السطور السابقة وهو ما يمكن ان نطلق عليه القيود المباشرة على البدائل نفسها والتى ذكرنا منها على سبيل المثال الحد الاقصى لما يمكن للإدارة الحصول عليه من مسادة



معينة ، او طاقة آلية ، او ساعات عمل ، او طاقة  
استيعابية للسوق ... الخ .

اما النوع الثانى من القيود فهو ذلك النوع الذى  
يخلق الارتباط بين البدائل ، ومثال ذلك اذا كان هناك  
نوعان من السلع تصنعان من نفس المادة الخام ، فـان  
هذا القيد يخلق نوعا من الارتباط بين هاتين السلعتين  
لان اى زيادة فى الكمية المنتجة من السلعة الاولى  
سيؤدى بالتبعية الى تخفيض عدد الوحدات المنتجة من  
السلعة الثانية وذلك فى ظل النوعية الاولى من القيود  
التي تخلق قيودا مباشرا على البدائل نفسها .

#### رابعاً : ان تكون المتغيرات ذات علاقة خطية مستقيمة :

وبمعنى ذلك الشرط انه ينبغى ان تكون المشكلة  
المراد حلها باسلوب البرمجة الخطية يمكن التعبير عن  
هدفها وقيودها فى صورة معادلات او متباينات خطية ،  
وتعتبر العلاقة خطية بين ظاهرتين اذا كان تغيرا ما فى  
قيمة الظاهرة الاولى قيمته الوحدة الواحدة يؤدى الى  
تغيير فى قيمة الظاهرة الثانية ولكن بمقدار ثابت ،  
ويوضح المثال التالى فكرة العلاقة الخطية بين ظاهرتين  
الاولى تمثل متغير مستقل والثانية تمثل متغير تابع .

قيمة الظاهرة الاولى	مقدار التغير فى الظاهرة الاولى	قيمة الظاهرة الثانية	مقدار التغير فى الظاهرة الثانية
صفر	-	٥	-
١	١	١٠	٥
٢	١	١٥	٥
٣	١	٢٠	٥
٤	١	٢٥	٥
٥	١	٣٠	٥

## استخدام المدخل البياني للبرمجة الخطية فى معالجة المشاكل الادارية :

سبق ان ذكرنا ان البرمجة الخطية تعالج مشكلة تخصيص الموارد فى ضوء الامكانيات المتاحة طبقاً لاهداف المحددة والتي تتمثل فى تحقيق اقصى ربح ممكن ( مشاكل تعظيم الارباح ) ، أو بالوصول بالتكاليف الى ادنى حد ممكن ( مشاكل تخفيض التكلفة ) لذا سنعالج فى الجزء التالى كلا النوعين من المشاكل وكيف يتم التعامل معها من خلال المدخل البياني الذى يعتبر ابسط واسهل طرق واساليب البرمجة الخطية .

### مشاكل تعظيم الارباح Maximization Problems

سنناقش فى هذا الجزء النوعية الاولى من المشاكل التى يتم التعامل معها بالمدخل البياني للبرمجة الخطية وهى مشاكل التعظيم ، ويجب ان يكون مفهومنا لدينا جيداً من البداية ان المفهوم الوحيد المختلف بين مشاكل التعظيم ومشاكل التخفيض هو اننا نقوم بتعظيم الهدف فى الحالة الاولى اى الوصول به الى اقصى حد ممكن . فى حين نقوم بتخفيض الهدف فى الحالة الثانية اى الوصول به الى ادنى حد ممكن .

ولتوضيح كيفية حل مشاكل تعظيم الارباح باستخدام الطريقة البيانية للبرمجة الخطية سنسوق المثال المبسط التالى والذى يصف مشكلة المزيج الانتاجى لاحدى الشركات التى تهدف الى تعظيم ارباحها .

## ومف المشكلة

## Problem Description

تقوم شركة القاهرة للصناعات الهندسية بانتاج السلع الهندسية المنزلية سهلة الاستخدام ، وقد تمكنت من خلال تجاربها وابحاثها ان تتوصل الى تصميم نموذجين من سلعة معينة للاستخدام المنزلى يمتازان برخص اثمانها ، وهى تفكر حاليا فى انتاج هـذــه النماذج . ولقد واجه مدير تخطيط ومراقبة الانتـــِــــاج بمشكلة تحديد كمية الانتاج من كل من هذين النموذجيين فى ضوء الطاقة المحددة للمصنع ولهذا الغرض فقد تم تجميع البيانات التالية :

---

١٠ جنيهاً .  
وهامش ربح الوحدة من النموذج الثاني ( س٢ ) يبلغ  
- هامش الربح للنموذج الأول ( س١ ) يبلغ ٧ جنيهاً ،

- يمر كلا النموذجين على مراكز انتاجية متشابهة وان اختلفت احتياجات كل نموذج من طاقة هذه المراكز ، فالنموذج ( س ) يحتاج الى ثلاث ساعات من قسم التجميع ، وساعتين من قسم التجميع ، اما النموذج الثانى فانه يحتاج الى ساعتين من قسم التجميع واربع ساعات من قسم التجميع ، وقد توقع مسئول قسم التجميع انه سيكون لديه طاقة متاحة مقدارها ٣٦ ساعة للاسبوع المقبل ، كذلك ٤٠ ساعة للاسبوع المقبل بقسم التجميع .

- يحتاج النموذج الاول الى وحدة واحدة من رقائـق الخشب لانتاج سلعة واحدة من هذا النموذج ، وقد تبين ان مورد هذه الرقائق لديه مشكلة انتاجية وهو غير قادر الا على توريد ( ١٠ وحدات ) من هذه الرقائق وذلك للاسبوع القادم .

من خلال المعلومات السابقة فان مدير تخطيط ومراقبة الانتاج يريد تحديد كمية الانتاج من كل من النموذجين للاسبوع القادم والتي تعمل على تحقيق هدف اقصى ربح ممكن .



## خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية

لتسهيل فهم طريقة الحل باستخدام الاسلوب البياني فاننا سنعرض للخطوات المتتالية لذلك الاسلوب ، ولكن قبل ان نستعرض في شرح هذه الخطوات سنضع المشكلة في مثالنا السابق على الصورة التالية ليسهل ادراكها بسرعة .

النموذج	هامش	قسم	قسم	رقائق
	الربح	التجهيز	التجميع	الخشب
س ١	٧ جنيه	٣ ساعة	٢ ساعة	وحدة واحدة
س ٢	١٠ جنيه	٢ ساعة	٤ ساعة	—
الطاقة المتاحة		٣٦ ساعة	٤٠ ساعة	١٠ وحدات

لحل هذه المشكلة بالطريقة المتاحة يتعين السير في خطوات الحل التالية :

### الخطوة الاولى : صياغة المشكلة Formulating the Problem

ونعني بذلك اعداد الصياغة الرياضية للمشكلة أي تحويل المشكلة من صورتها الوصفية التي ظهرت بها بالشكل السابق الى شكل صياغة رياضية تشتمل على عدد من المعادلات والمتباينات حتى يمكن استخدام المدخل البياني في التعامل مع المشكلة ، فالمطلوب تحديد الهدف والتعبير عنه في صورة كمية أي معادلة رياضية أو دالة رياضية ، وتحديد القيود والتعبير عنها في شكل معادلات ومتباينات ، حيث يمكن استخدام الاسلوب الكمي الرياضي في التعامل مع المشكلة ولعل هذا تأكيد لما سبق قوله من ان عملية بناء النموذج الرياضية هي عماد بحوث العمليات .

وتتكون الصياغة الرياضية للمشكلة من العناصر

الاساسية الاتية :

١- وضع او صياغة دالة الهدف Stating the objective Function

الخطوة الاولى فى صياغة المشكلة هى تحديد الهدف Specify the objective الذى سيتم استخدامه كمقياس أو مؤشر لتقييم الحلول البديلة الممكنة ، فالخطة التى سيعدها مدير تخطيط ومراقبة الانتاج سيتم تقييمها من جانب الادارة العليا على أساس مدى مساهمتها فى الوصول بالارباح الى حدها الاقصى . وحيث ان الهدف هو تعظيم اجمالى المساهمة فى الارباح ، لذلك فاننا نحتاج الى تحديد مساهمة كل متغير قرارى Decision Variables من اجمالى المساهمة فى الارباح ( المتغيرات القرارية هى الممثلة للمشكلة موضوع الحل اى فى مثالنا هذا هى عدد الوحدات من كل نموذج والتى سيتم اختيار انتاجها ) ، والمعادلة التى تحدد الهدف فى صورة المتغيرات القرارية تسمى دالة الهدف ، وفى حالة مثالنا الذى نحن بصدده يمكن كتابة دالة الهدف بالشكل التالى :

اجمالى المساهمة = (مساهمة النموذج الاول) + (مساهمة النموذج الثانى) وحيث ان اجمالى المساهمة ( در ) لكلا النموذجين يساوى مساهمة الوحدة الواحدة من كل منهما فى الربح مضروباً فى عدد وحدات كل نموذج . وعليه فان دالة الهدف تتماثل كالآتى :

$$د (ر) = ٧ س١ + ١٠ س٢$$

$$\text{او تعظيم } ٧ س١ + ١٠ س٢$$

كما يمكن كتابتها بشكل آخر كالآتى

$$د (ر) = ٧ س١ + ١٠ س٢ \text{ اقصى ارباح ممكنة}$$

٢- وضع اوصياغة القيود Stating the constraints

قبل الدخول فى خطوة صياغة القيود قد يكون مفيداً أولاً تحديد أو تعيين قيود الموارد Determining

The Resource Constraints ، فمن التوصيف السابق للمشكلة تبين ان هناك ثلاثة انواع من قيود الموارد هى الطاقة الالية المتاحة بقسم التصنيع ، والطاقة

المتاحة بقسم التجميع ، وعدد الوحدات التى يمكن الحصول عليها من رقائق الخشب ، لذلك سنجد ثلاثة قيود على متخذ القرار كل قيد منها يمثل موردا محددًا .

وبعد التعرف على قيود الموارد نكون بحاجة الى التعبير عن كل منها فى صورة رياضية ، وهذا يعنى اننا نريد ان نربط بين استخدام الموارد المحدودة والمتاح منها فى صورة معادلة او متباينة رياضية وسيتم ذلك على النحو التالى :

أ- القيد الاول فى مثالنا هذا سيتعلق بطاقة قسم التصنيع ، وينبغى ان تكون طاقة التصنيع التى نحتاجها لانتاج  $s_1$  ،  $s_2$  ليست اكثر من المتاح منها اى أن :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{طاقة التصنيع التى تستخدم} \\ \text{فى انتاج } s_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{طاقة التصنيع التى تستخدم} \\ \text{فى انتاج } s_1 \end{array} \right\} \leq (\text{طاقة التصنيع المتاحة})$$

ويلاحظ ان العلامة  $\geq$  تشير الى ان الطرف الايمن قد يساوى او يقل عن الطرف الايسر وحيث ان طاقة قسم التصنيع معبرا عنها بعدد الساعات هى ٣٦ ساعة اسبوعيا ، وان احتياجات الوحدة الواحدة من النموذج الاول هو ٢ ساعات من قسم التصنيع ، كما ان احتياج الوحدة الواحدة من النموذج الثانى هو ٢ ساعة من نفس القسم ، لذلك يمكن صياغة القيد الاول الخاص بقسم التصنيع فى صورة رياضية كالتالى :

$$36 \geq s_2 + 2s_1$$

ب- وبنفس الطريقة يمكن ان نربط بين استخدام طاقة قسم التجميع والطاقة المتاحة به كالتالى :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{طاقة قسم التجميع المستخدمة فى انتاج } s_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{طاقة قسم التجميع المستخدمة فى انتاج } s_1 \end{array} \right\} \leq (\text{طاقة قسم التجميع المتاحة})$$



أو بصورة رياضية :

$$40 \geq 2x + 4y$$

ج - اما القيد الثالث والخاص بالعدد المحدد من رقائق الخشب المتاحة ، فنلاحظ ان رقائق الخشب تستخدم فقط في انتاج النموذج الاول ، وان النموذج الثانى من المنتجات لا يرتبط بهذا القيد ، أى ان هذا القيد يمكن كتابته بصورة وصفية كالآتى :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عدد وحدات رقائق الخشب} \\ \text{المطلوبة لانتاج } x \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{عدد رقائق الخشب المتاحة} \end{array} \right\}$$

أو بصورة رياضية =

$$10 \geq x$$

د - من ناحية اخرى فانه يتعين وفقا للمنطق ان يكون الانتاج فى كميات غير سالبة وهذا المنطق والمفهوم يقودنا الى نوع آخر من القيود يطلق عليه شرط عدم السلبية Non-negativity Condition وهو القيد الخاص بتحديد المتغيرات القرارية فى كميات غير سالبة Non-Negative quantities بل يمكن ان تكون فى كميات موجبه او صفرية ويتم التعبير عنه بالصورة الاتية :

$$\begin{array}{l} x \leq \text{صفر} \\ y \leq \text{صفر} \end{array}$$

وتلخيصا لما تقدم فان الصياغة الرياضية لمشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية ستأخذ الصورة النهائية الاتية :

$$\text{تعظيم د (ر) } = 7x + 10y$$

بشرط ان :

$$\begin{array}{l} 36 \geq 2x + 4y \\ 40 \geq 2x + 4y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 10 & \geq & 1^s \\ \text{صفر} & \leq & 1^s \\ & \leq 2^s & \text{صفر} \end{array}$$

الخطوة الثانية : تحويل متباينات القيود الى معادلات :

حيث ان القيود التي وردت فى الصياغة الرياضية للمشكلة ليست معادلات تماما لانها ( اقل من أو يساوى ) أى انها متباينات لذلك لا يمكن تمثيلها على الرسم البيانى الا بعد تحويلها لتأخذ شكل معادلات ( = ) ، ويتم ذلك عن طريق الاستبعاد المؤقت للإشارة ( اقل من ) أى انه يتم تحويل متباينات القيود الى معادلات عن طريق الاهمال المؤقت للإشارة ( اقل من ) ، ويلاحظ أن هذا لا يعتبر اخلافا بالاساس الرياضى المنطقى للرياضيات لان هذا الاستبعاد سيكون مؤقتا بمعنى انه بعد التمثيل البيانى لمعادلات القيود بالرسم سوف نسترد الإشارة التى استبعدناها وذلك بان نحدد فى أى جهة من هذا الخط سيكون الحل ممكنا وفى أى جهة يكون الحل غير ممكن .

وبتطبيق هذه الخطوة على متباينات القيود ( أى اهمال واستبعاد الإشارة التى تحول تساوى طرفى القيد ) ينتج لدينا المعادلات الآتية :

$$\begin{array}{lcl} 2^s + 1^s = 26 & ( \text{معادلة التصنيع} ) & \\ 2^s + 4^s = 40 & ( \text{معادلة التجميع} ) & \\ & 1^s = 10 & ( \text{معادلة رقائق الخشب} ) \end{array}$$

ولكن قد يثار تساؤل ولماذا لم يتم معاملة شرط عدم السلبية (  $1^s, 2^s \leq \text{صفر}$  ) نفس المعاملة وتحويلها الى معادلات ؟ للإجابة على ذلك نقول أن هذين القيدين يمثلان مفهوم انه لا يمكن انتاج قيمة سالبة من أى من النموذجين  $1^s, 2^s$  ويمكن

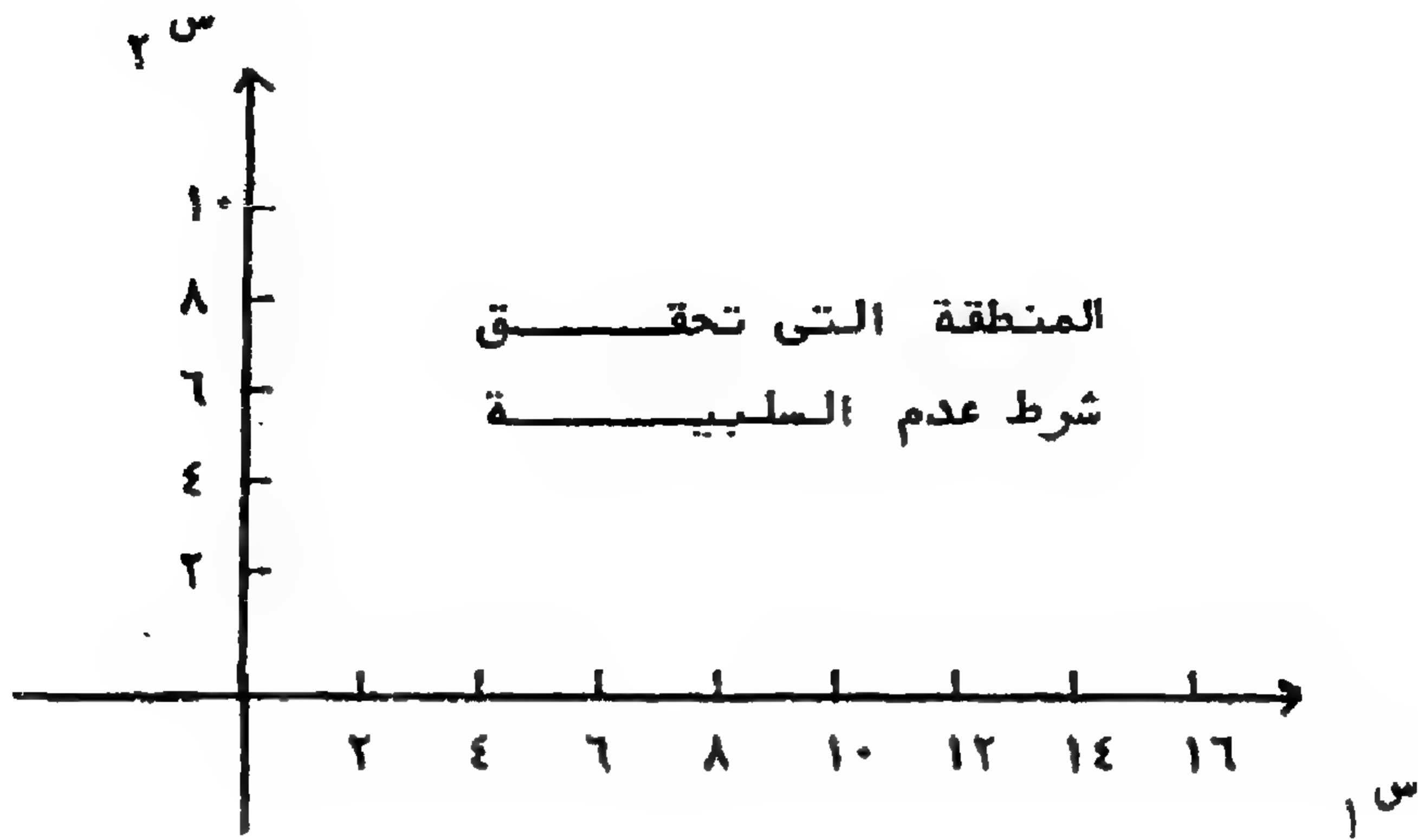
تمثيلهما بيانيا دون الحاجة الى تحويلهما الى معادلات وذلك كالاتى :

أ - اذا فرضنا ان المحور الافقى فى الرسم البيانى سيمثل النموذج  $S_1$  ، فانه يمكن القول ان جميع النقاط الواقعة على خط المحور الراسى يمثل قيما صفرية للمتغير  $S_1$  ، وجميع النقاط الواقعة على يمينه تمثل قيما موجبه لهذا المتغير اى ان جميع النقاط الواقعة على خط المحور الراسى وعلى يمينه يكون فيها المتغير القرارى  $S_1 \leq$  صفر . وعليه فان اختيار ان يكون الرسم البيانى على يمين المحور الراسى ما هو الا تمثيل بيانى للقييد  $S_1 \leq$  صفر .

ب - بنفس التحليل السابق ، فان اى نقطة تقع على خط المحور الافقى تكون فيها قيمة  $S_2 =$  صفر ، وان اى نقطة تعلق هذا الخط تمثل كميات موجبة من  $S_2$  ، اى ان جميع النقاط الواقعة على المحور الافقى او تعلقه تكون فيها قيمة  $S_2 \leq$  صفر ، وعليه فان اختيار ان يكون الرسم البيانى على المحور الافقى ما هو الا تمثيل بيانى للقييد  $S_2 \leq$  صفر .

ج - وحيث ان المثال الذى نحن بمدد حله الان يتضمن فى صياغته شرطا لعدم سلبية كل من المتغيرات القرارية اى ان  $S_1 \leq$  صفر ،  $S_2 \leq$  صفر . اذن المنطقة التى تكون فيها قيمة كل من المتغيرات القرارية  $S_1 \leq$  صفر هى المنطقة المحصورة بين المحور الافقى (  $S_1$  ) ، والمحور الراسى (  $S_2$  ) فى الجزء الشمالى الشرقى ، وهى المنطقة الوحيدة فى الشكل كله التى يكون فيها كلا المتغيرين القرارين  $S_1 \leq$  صفر ، كما يظهر ذلك فى الشكل التالى :





### الخطوة الثالثة : التمثيل البياني لمعادلات القيود :

بعد تحديد المنطقة التي سيتم تمثيل معادلات المشكلة فيها أي رسمها بيانيا في صورة خط مستقيم يمثل كل معادلة منها ، وحيث أن الخط المستقيم يمكن تحديده تماما بمعرفة أي نقطتان تقعان عليه ، لذلك فإنه لرسم معادلة أي قيد نكون بحاجة إلى تحديد نقطتان فقط على هذا الخط وعن طريق توصيلها يتم رسم الخط المستقيم . ويمكن إيجاد هاتين النقطتين بسهولة عن طريق اختيار أي قيمة لأحد المتغيرين وبالتعويض عنها في معادلة القيد نحصل على قيمة المتغير الآخر ، ويمكن تكرار ذلك بقيم مختلفة لنحصل على النقطـة الثانية . ويمكن تبسيط عملية التعويض وتحديد إحداثيات النقطة عن طريق اختيار أن تكون قيمة أحد المتغيرين = صفر ثم التعويض في المعادلة لنحصل على قيمة المتغير الآخر . وبتكرار تلك الخطوة ولكن للمتغير الآخر الذي سنختار له قيمة صفر ونعوض في ذات المعادلة لنحصل على قيمة المتغير الأول .

فمثلا يمكن توضيح ما سبق ذكره بالتطبيق المباشر على

معادلة قسم التصنيع وهى :

$$36 = 2 \text{ س } ٢ + ١ \text{ س } ٣$$

بفرض ان  $\text{س } ١ = \text{صفر}$  وبالتعويض فى المعادلة

$$36 = 2 \text{ س } ٢ + \text{صفر} \times ٣ \quad \therefore$$

$$36 = 2 \text{ س } ٢$$

$$18 = \text{س } ٢$$

$\therefore$  النقطة الاولى هى  $\text{س } ١ = \text{صفر}$  ،  $\text{س } ٢ = 18$  (صفر ، 18)

وبفرض ان  $\text{س } ٢ = \text{صفر}$  وبالتعويض فى المعادلة

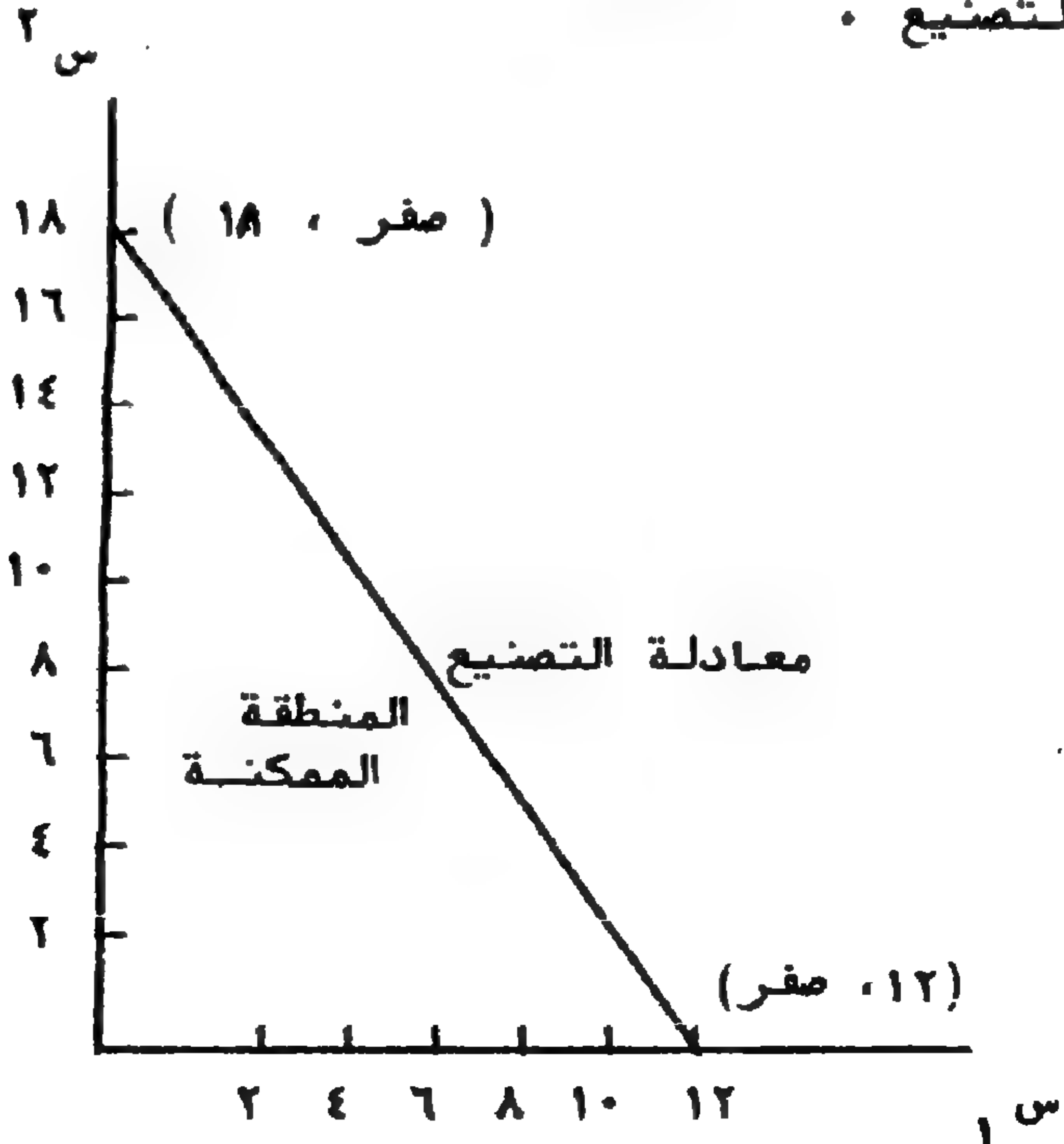
$$36 = 2 \text{ س } ٢ + \text{صفر} \times ٣ \quad \therefore$$

$$12 = \text{س } ١$$

$\therefore$  النقطة الثانية هى  $\text{س } ١ = 12$  ،  $\text{س } ٢ = \text{صفر}$  (12 ، صفر)

اى ان الخط الواصل بين النقطتين (صفر ، 18) ، (12 ، صفر) تمثل المعادلة الخاصة بقيد قسم التصنيع ، والشكل التالى يوضح المنطقة الممكنة بعد رسم خط معادلة قسم

التصنيع .



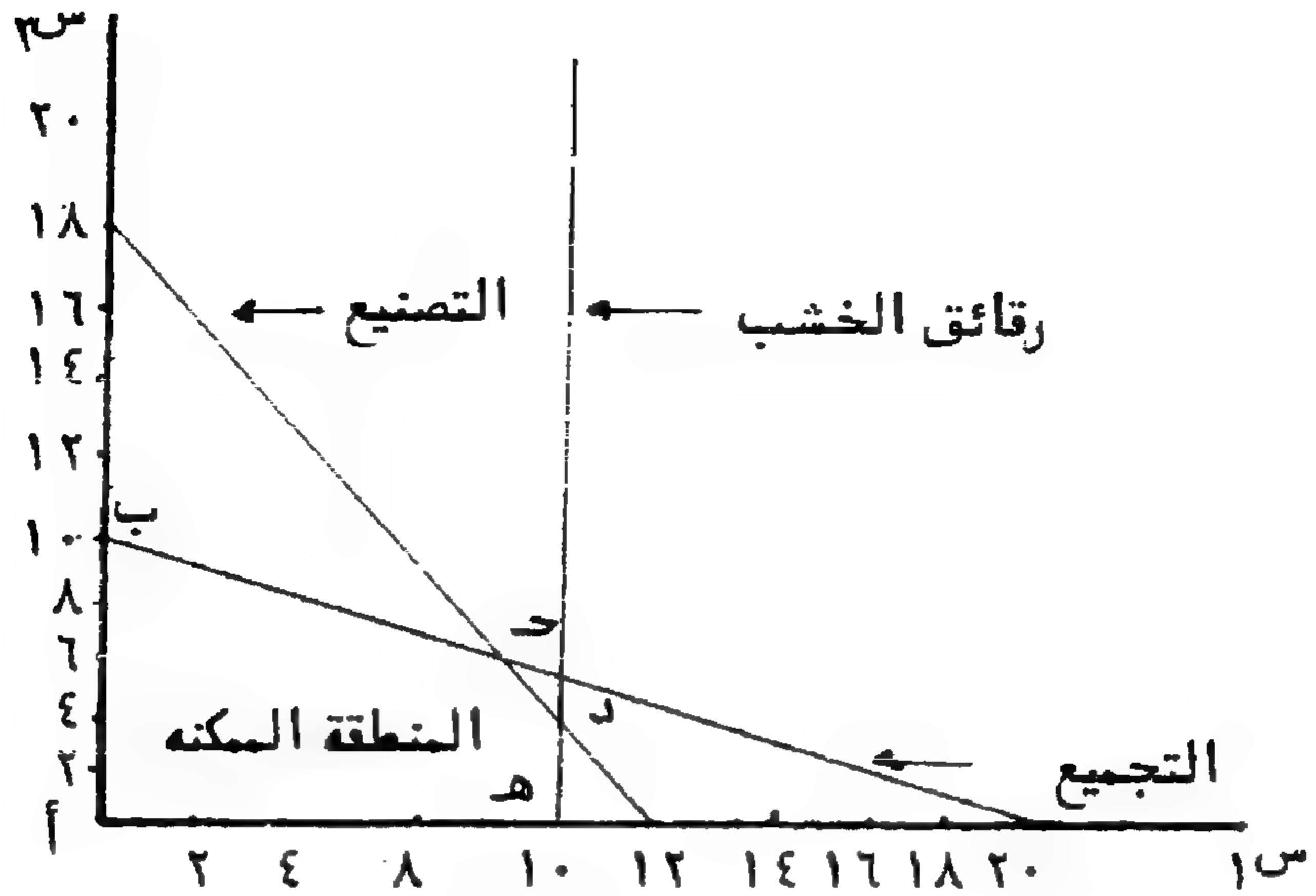
اى ان اى نقطة تقع على المستقيم الممثل لمعادلة التصنيع تساوى ٣٦ ، ولكن الاصل ان تلك المعادلة كانت قيد ( اقل من او يساوى ٣٦ ) . اذن حان الان وقسمت استرداد اشارة اقل من التى اهلناها واستبعدناها . فحيث ان اى نقطة واقعة على ذلك الخط = ٣٦ اذن قيود التصنيع فى امله يضم خط المعادلة وكل المنطقة الواقعة اسفله والمحصورة بين خط التصنيع وكل محور الافقى والرأس . وبصفة عامة يمكن القول ان اى نقطة داخل المنطقة الممكنة او على حدودها تحقق قيد التصنيع بالاضافة الى قيد عدم سلبية كل من س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> .

وبنفس الطريقة يتم رسم خط معادلة التجميع ومعادلة رفائق الخشب . ويمكن تبسيط اجراءات الحصول على احداثيات نقاط كل معادلة اذ ما اتبعنا الجدول التالى :

معادلات القيود		احداثى النقطة الاولى		احداثى النقطة الثانية	
		بفرض ان س <sub>١</sub> = ٠	بفرض س <sub>٢</sub> = ٠	بفرض س <sub>١</sub> = ٠	بفرض س <sub>٢</sub> = ٠
٣ س <sub>١</sub> + ٢ س <sub>٢</sub> = ٣٦	صفر	١٨	١٢	صفر	صفر
٢ س <sub>١</sub> + ٤ س <sub>٢</sub> = ٤٠	صفر	١٠	٢٠	صفر	صفر
س <sub>١</sub> = ١٠	-	-	١٠	صفر	صفر

وبتمثيل تلك الاحداثيات على الرسم البيانى وتحديد اتجاه منطقة الحلول الممكنة بادخال اشارة التى تسم استبعادها لكل معادلة . فان منطقة الحلول الممكنة التى اخذت فى اعتبارها كافة القيود الواردة بالصياغة الرياضية ستظهر على الشكل التالى :





#### الخطوة الرابعة : تعيين منطقة الحلول الممكنة

Identifying the feasible solutions Region

بعد ان تم التمثيل البياني لكافة القيود الواردة على دالة الهدف بالصياغة الرياضية للمشكلة كما يظهر من الشكل السابق ، يتضح ان هناك منطقة تلتقى فيها ومن خلالها كافة قيود المشكلة اى انها منطقة تفي ولا تتعارض مع اى قيد من قيود المشكلة ، وهذه المنطقة ما نطلق عليه منطقة الحلول الممكنة ، ويتضح من الشكل ان تلك المنطقة هي المحددة بالنقاط ( أ ، ب ، ج ، د ، هـ ) وهذا يعنى ان اى نقطة تقع داخل هذه المنطقة او على حدودها تعتبر حلا ممكنة Feasible Solution للمشكلة التى نحن بصدها ولكن هل كل نقطة من هذه النقاط تعتبر حلا امثلا Optimal Solution ؟

ان الحل الممكن ليس بالضرورة حل امثل ، حيث ان الحل الممكن يحقق عدم التعارض مع اى من القيود المفروضة ولكنه قد لا يحقق دالة الهدف اى لا يصعد بالارباح الى حدها الاقصى او ينزل بالتكلفة الى ادنى حالاتها . فى حين ان الحل الامثل هو الذى يفي بكافة القيود وفى نفس الوقت يحقق دالة الهدف اى انه لابد ان يكون حل ممكن ، وحيث ان الحل الامثل لابد ان يكون

## Identifying the Optimal Solution

لقد سبق القول ان الحل الامثل هو حل ممكن اى انه يقع داخل منطقة الحلول الممكنة او على حدودها ، ولكن من المعروف ان هذه المنطقة وحدودها تحوى عددا لا نهائيا من النقاط التى تعتبر كل منها حلا ممكنا ، وليس من المنطقى ان نقوم باختبار كل نقطة تقع داخل او على حدود منطقة الحلول الممكنة لنرى ايهما يحقق اكبر قيمة لدالة الهدف لتكون هى نقطة الحل الامثل . اننا فى حاجة الى عمل اختبار لعدد محدود فقط من تلك النقاط ولكن كيف يمكن تخفيض النقاط المطلوب اختبارها من بين العدد النهائى الموجود بالمنطقة الممكنة ؟ ان المنطق الرياضى يقف وراء ذلك التحديد اذ ان اى نقطة من النقاط الطرفية Extrene Points هى بالقطع افضل من حيث توليدها للارباح من اى نقطة من النقاط الداخلية Interior Points ، اى اننا استطعنا فى هذا التحليل ان نجعل النقاط المطلوب اختبارها من ضمن منطقة الحلول الممكنة هى فقط النقاط التى تقع على خطوط حدود منطقة الحلول الممكنة ولكن برغم ذلك التحديد الا انه ما زال هناك عدد ضخم جدا من النقاط التى تحويها خطوط حدود منطقة الحلول الممكنة وعملية اختبارها جميعا صعبة ان لم تكن مستحيلة ، ولذلك سنسير فى مزيد من التحليل بهدف تخفيض تلك النقاط . بفرض اننا نقف عند النقطة أ وهى نقطة عدم الانتاج بطبيعة الحال انها تقع على حدود منطقة الحلول

الممكنة ولكنها نقطة حل س، حيث لا انتاج ومن ثم لا ارباح ولكن اذا تحركنا عبر المحور س، فان كل خطوة نخطوها عبر هذا المحور فى اتجاه النقطة هـ ولتكن بمثابة زيادة الانتاج من النموذج س، بمقدار واحدة واحدة فان ذلك يعنى زيادة دالة الهدف بمقدار ٧ جنيه عن كل خطوة ومعنى ذلك ان النقطة هـ هى افضل نقطة على خط المحور الافقى ومن ثم يمكن اهمال كل النقاط السابقة عليها لانها اقل ربحية من النقطة هـ . كذلك الحال لو نظرنا الى المحور الرأسى واتبعنا ذات - التحليل لوجدنا ان النقطة ب افضل جميع النقاط الواقعة على المحور الرأسى ومن ثم يتم استبعاد كل ماعداها من نقاط على ذلك المحور ، ويتكرر نفس هذا المنطق على خطوط حدود منطقة الحلول الممكنة يتضح لنا بوضوح ان تتابع النقاط على اى خط فى اتجاه الاتجاهات يقود من حل حسن الى حل احسن ، فى حين ان تتابع تلك النقاط فى الاتجاه الاخر ينخفض من قيمة دالة الهدف .

ان ذلك التحليل يقودنا الى التأكيد على حقيقة هامة وهى : ان النقاط الواقعة على حدود منطقة الحلول الممكنة هى فقط النقاط التى سيكون من بينها احدى النقاط الممثلة للحل الامثل ، كذلك فان كل خط خارجى من خطوط المنطقة الممكنة توجد به نقطة واحدة افضل من كل النقاط الاخرى ، وان هذه النقاط تقع دائما عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة اى عند تقاطع خطوط القيود ، وان الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية لابد ان يكون هو احدى هذه النقاط .

وهذه القاعدة هامة جدا لانها قد حصرت وركزت بحثنا عن الحل الامثل فى النقاط الطرفية فقط ، وفى المثال الذى نعالجه الان سيكون بحثنا عن الحل الامثل فى حدود اختبار خمسة نقاط فقط وهى كل نقاط الرؤوس وهى

( أ ، ب ، ج ، د ، هـ ) . ومعنى هذا اننا باستخدام المنطق الرياضى قد خفضنا بحثنا من عدد لا نهائى من النقاط الى عدد محدود من تلك النقاط ويبقى فقط تحديد نقطة الحل الامثل من بينها .

### استعراض النقاط الطرفية Enumerating Exterme Points

النقطة (أ) : ايجاد قيم المتغيرات القرارية عند هذه النقطة عملية سهلة لانها تمثل نقطة الاصل والتى فيها  $s_1 = \text{صفر} , s_2 = \text{صفر}$

قيمة دالة الهدف عند (أ)  $= 7 \times \text{صفر} + 10 \times \text{صفر} = \text{صفر}$   
النقطة (ب) : وقيم المتغيرات القرارية عند هذه النقطة عملية سهلة نسبيا حيث ان  $s_1 = \text{صفر}$  لانها واقعة على المحور الرأسى وعندها  $s_2 = 10$  وهذا طبعا يمكن قراءته مباشرة من الرسم البيانى .

قيمة دالة الهدف عند (ب)  $= 7 \times \text{صفر} + 10 \times 10 = 100$  جنيه .

النقطة (ج) : وواضح طبعا من الرسم البيانى ان لا يمكن قراءة احداثياتها من الرسم مباشرة ولذلك سنبحث عن طريقة اخرى اطول نسبيا لايجاد احداثيات هذه النقطة ، ان هذه النقطة تمثل تقاطع خطى القيدين :

$$2s_1 + 4s_2 = 40 \quad ( \text{معادلة التجميع} )$$

$$3s_1 + 2s_2 = 36 \quad ( \text{معادلة التصنيع} )$$

واسهل طريقة لايجاد احداثيات النقطة (ج) يتم بحل زوج المعادلتين السابقتين حلا آنيا ويتم ذلك عن طريق ضرب احد المعادلتين فى رقم يتم اختياره ليتساوى معامل احد المتغيرات القرارية فى المعادلة مع معامل نفس المتغير فى المعادلة الاخرى . وعن طريق طرح المعادلة الجديدة من المعادلة التى لم يتم تغييرها يمكن ايجاد قيمة التغير القرارى الذى يبقى من عملية الطرح . وتكون هذه الخطوات كالآتى :

$$2s_1 + 4s_2 = 40$$



$$\begin{aligned}
 36 &= 2 \text{ س } 2 + 1 \text{ س } 3 \\
 72 &= 2 \times 2 \text{ س } 6 + 1 \text{ س } 4 \\
 \hline
 32 &= 4 \text{ س } 1 \quad \text{وبالشرح} \\
 8 &= 1 \text{ س } 1 \quad \therefore
 \end{aligned}$$

عندئذ يمكن التعويض بقيمة س<sub>١</sub> فى اى من المعادلتين السابقتين لنحصل على قيمة س<sub>٢</sub> كالاتى :

$$\begin{aligned}
 ( \text{المعادلة الاولى} ) \quad 40 &= 2 \text{ س } 4 + 1 \text{ س } 2 \\
 40 &= 2 \text{ س } 4 + (8) \times 2 \\
 ( 16 - 40 ) \quad 24 &= 2 \text{ س } 4 \\
 6 &= 1 \text{ س } 2 \quad \therefore
 \end{aligned}$$

اى ان النقطة (ج) تكون فيها قيمة المتغيرات القرارية هى ( س<sub>١</sub> = ٨ ، س<sub>٢</sub> = ٦ )  
 قيمة دالة الهدف عند (ج) = ٧ × ٨ + ١٠ × ٦ = ١١٦ جنيه .  
النقطة (د): وايجاد احداثيات هذه النقطة يعتبر سهلاً نسبياً ، اذ انها تمثل نقطة تقاطع خطى القيدين :

$$\begin{aligned}
 ( \text{قيد رقائق الخشب} ) \quad 10 &= 1 \text{ س } 1 \\
 ( \text{قيد التصنيع} ) \quad 36 &= 2 \text{ س } 1 + 3 \text{ س } 2 \\
 \text{ويمكن بالتعويض فى المعادلة الثانية بقيمة س } 1 &= 10 \text{ أن} \\
 \text{نستنتج قيمة المتغير الاخر س } 2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 36 &= 2 \text{ س } 2 + (10) \times 3 \\
 36 &= 2 \text{ س } 2 + 30 \\
 30 - 36 &= 2 \text{ س } 2 \\
 3 &= 1 \text{ س } 2 = \frac{1}{2} \\
 \text{اى ان احداثى النقطة د هو } ( 3 , 10 ) &= 0 \\
 \text{وبذلك تكون قيمة دالة الهدف عند النقطة (د) =} \\
 100 \text{ جنيه} &= 3 \times 10 + 10 \times 7
 \end{aligned}$$

النقطة (هـ): اما النقطة الاخيرة وهى النقطة ( هـ ) فان طريقة تحديد احداثياتها شبيهة بالنقطة (ب) ، فمن

حيث انها تقع على المحور الافقى اى ان قيمة  $s_1$  موجودة بالفعل كما هو مبين من منطقة الحلول الممكنة اذ ان النقطة ( هـ ) تقع عند النقطة ١٠ من المحور الافقى اى ان  $s_1 = 10$  ، وحيث انها تقع على المحور الافقى فان  $s_2 = 0$  صفر .

اى ان احداثى النقطة ( هـ ) هو  $s_1 = 10$  ،  $s_2 = 0$  صفر وبذلك تكون قيمة دالة الهدف عند نقطة ( هـ ) =  $7 \times 10 + 10 \times 0 = 70$  جنيه .

مما سبق يتبين ان قيمة دالة الهدف عند النقاط الطرفية الخمسة كانت كالاتى :

ا	=	صفر
ب	=	١٠٠ جنيه
ج	=	١١٦ جنيه
د	=	١٠٠ جنيه
هـ	=	٧٠ جنيه

ويتضح من تلك المقارنة ان النقطة الطرفية (ج) هى نقطة الحل الامثل ، ويتم عندها انتاج ٨ وحدات من النموذج ( س ) وعدد ٦ وحدات من النموذج ( س<sub>٢</sub> ) وتكون قيمة دالة الهدف ١١٦ جنيه وهى اكبر قيمة لدالة الهدف من اى نقطة طرفية اخرى .

### استخدام مدخل خط الربح المتساوى لتعيين نقطة الحل الامثل

يمكن تعيين نقطة الحل الامثل بمدخل آخر غير الطريقة التى تناولناها سابقا والتى اعتمدت على تقييم النقاط الطرفية فى زيادة دالة الهدف ، والمدخل الاخر الذى يمكن استخدامه فى تعيين نقطة الحل الامثل يعرف بمدخل خط الربح المتساوى او

المتعادل Equal or Isoprofit Line Approach

ويقوم هذا المدخل على اساس افتراض قيمة معينة لدالة الهدف ويتم تمثيلها على منطقة الحلول الممكنة فى شكل خط ربح واذا رغبنا فى زيادة دالة الهدف فانه يمكننا ان نحرك ذلك الخط موازياً لنفسه الى اعلا حيث ان قيمة دالة الهدف تزداد كلما تحركنا فى اتجاه الاتجاهات وتنخفض فى الاتجاه الاخر ، والخطوط المستقيمة رسمها هى جميعا متوازية لبعضها البعض .

وحتى يمكن الوصول وتعيين الحل الامثل يمكن ان تبدأ برسم اى خط ربح كما سبق ذكره على ان يكون ذلك فى نطاق منطقة الحلول الممكنة ، ونعتبر ان هذا الخط هو الاساس الذى سيبدأ منه رسم الخطوط الاخرى المتوازية ويمكن رسم الخطوط الاخرى لخطوط الربح المتساوى عن طريق الانزلاق بالمسطرة من خط الربح المتساوى الاصل الى اتجاه زيادة الارباح حتى نصل الى نقطة الحل الامثل . ويمكن ان نصل الى تلك النقطة عندما نجد اننا وصلنا بحافة المسطرة الى الحد الذى يعتبر حد اقصى للحركة قبل ان نترك منطقة الحلول الممكنة ، عندئذ نقول ان آخر نقطة ممكنة تمس المسطرة لابد ان تكون هى النقطة الممكنة والمثلث ذات اعلى قيمة لدالة الهدف وهى تمثل نقطة الحل الامثل .

### كيفية اختيار خط الربح المتساوى الاصلى :

يتعين عند اختيار خط الربح الاصلى الذى سنتخذه الاساس فى رسم مجموعة خطوط الارباح المتساوية الاخرى ان نراعى ما يلى :

— ان تكون قيمة هذا الخط تقبل القسمة على معاملات دالة الهدف حتى لا نضطر الى التعامل مع قيم كسرية تؤدي الى صعوبة فى التمثيل البيانى، وفى مثالنا هذا كانت دالة الهدف هى :

$$٧س + ١٠ص$$

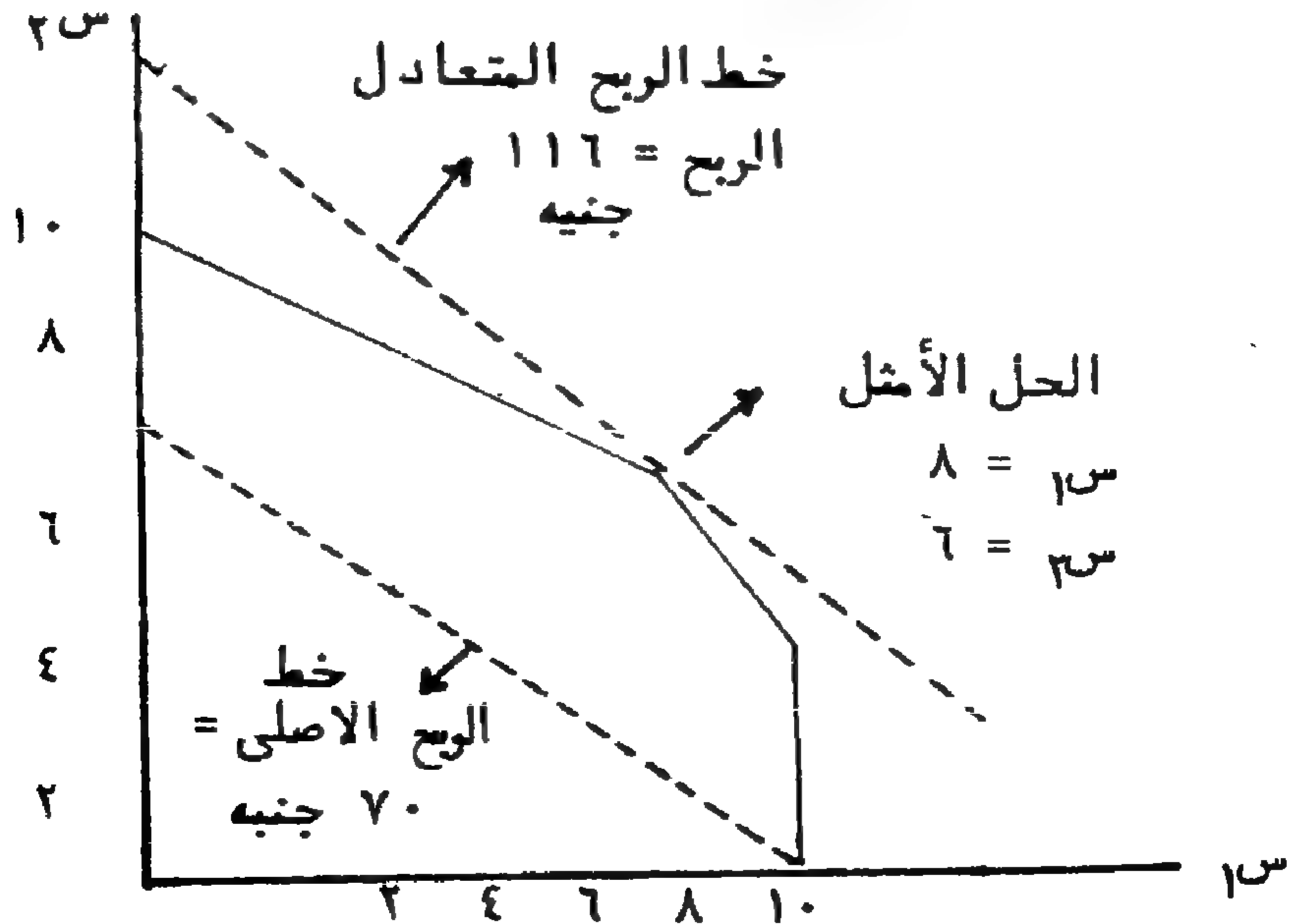
اى يمكن ان تكون قيمة دالة الهدف الافتراضية المستقيمة

سنختارها ٧٠ جنيه فهي تقبل القسمة على معاملات دالة الهدف .

- يشترط ان تكون قيمة دالة الهدف الافتراضية تمثّل كمية انتاج تقع داخل منطقة الحلول الممكنة والا فانه افتراض غير صحيح . وباختيار قيمة دالة الهدف التي اخترناها ( ٧٠ جنيه ) يتضح أنها تقع فعلا داخل منطقة الحلول الممكنة ، فاذا لم يتم اي انتاج من س<sub>١</sub> فيكون الانتاج من س<sub>٢</sub> في هذه الحالة ٧ وحدات وهذا يقع في منطقة الحلول الممكنة ، واذا لم يكن هناك انتاج اي وحدات من س<sub>٢</sub> ، فانه سيتم انتاج ١٠ وحدات من س<sub>١</sub> وهذا ايضا ممكن لوقوع هذا الانتاج داخل المنطقة الممكنة . اي ان معادلة خط الربح التي اخترناها هي :

$$٧٠ = ٧ س١ + ١٠ س٢$$

ولرسم الخط المستقيم الذي يمثل هذه المعادلة فانه يتم اتباع نفس الاسلوب الذي سبق الاخذ به عند رسم معادلات القيود ، اي سنفترض ان احد المتغيرات القرارية = صفر ، ثم نحسب قيمة المتغير الاخر ، وباجراء هذا الاسلوب سنجد ان هذا الخط سيكون واصلا بين النقطتين ( ١٠ ، صفر ) ، ( صفر ، ٧ ) ويتم رسمه كما هو موضح بالشكل الاتي :





ويجدر التنويه هنا انه اذا ظهرت صعوبة فى قسـراة القيم الصحيحة للمتغيرات القرارية عند تلك النقطة خاصة فى حالة القيم الكسرية فيمكن التغلب على ذلك باتباع الطرق السابقة والخاصة بحل المعـادلات المتقاطعة عند هذه النقطة حلا آنيا للوصول الى القيم الصحيحة .

### مثال محلول (١)

ترغب شركة نقل جوى للبضائع فى شحن طائرة لرحلة واحدة مستهدفة تضخيم الايراد الناتج من هذه الرحلة ، ويوجد نوعان من البضائع :

١- بضائع يتطلب نقلها تجهيزات خاصة وهذا يقتضى وضعها فى كابينة يجب ان تظل تحت الضغط الجوى العادى ( مثل الدجاج الحى ) .

٢- بضائع عادية توضع فى المخزن الرئيسى المخصص للبضائع لا يستدعى شحنها تحكما فى الضغط ( مثل الآلات والملابس وغيرها ) .

ويبلغ الايراد فى الرحلة ٣٠٠٠ جنيه للطن من النوع الاول من البضائع ومبلغ ١٠٠٠ جنيه للطن من النوع الثانى من البضائع . علما بان الكميات المتاحة من النوعين تفوق ما يمكن شحنه فى هذه الرحلة . فاذا علمت ان :

(١) الطائرة بها مكانان للشحن ، الاول كابينه مكيفة الضغط ، والثانى مخزن رئيسى غير مكيف الضغط .

---

(١) د. على عبد السلام المعزاوى ، بحوث العمليات فى مجال الانتاج والتخزين والنقل ، الطبعة الثانية ، دار النهضة العربية ، القاهرة ١٩٧٧ ، ص ١٨٢ .

(ب) الكابينة لا تسع اكثر من ١٠ طن ، كذلك فان المخزن الرئيسى لا يتسع لأكثر من ٢٠ طن .

(ج) للمحافظة على حالة الاتزان فان الكابينة لا تأخذ اكثر من ١ طن زيادة على  $\frac{2}{3}$  شحنة المخزن الرئيسى .

(د) لا تشحن الطائرة بأكثر من ٢٨ طن من البضائع .  
والمطلوب تحديد الكمية التى يتعين شحنها من كل نوع من البضائع بفرض تضخيم الايراد الناتج من هذه الرحلة .

الحل :

الخطوة الاولى : الصياغة الرياضية للمشكلة :

بفرض ان :

س ١ = عدد الاطنان التى ستشحن فى المخزن الرئيسى

س ٢ = عدد الاطنان التى ستشحن فى الكابينة .

∴ دالة الهدف :

تعظيم ١٠٠٠ س ١ + ٣٠٠٠ س ٢ ← اقصى ايراد ممكن

القيود :

س ١  $\geq$  ٢٠ ( سعة المخزن الرئيسى )

س ٢  $\geq$  ١٠ ( سعة الكابينة )

س ٢  $\geq$  ١ +  $\frac{2}{3}$  س ١ ( المحافظة على حالة الاتزان )

س ١ + س ٢  $\geq$  ٢٨ ( الحمولة القصوى للطاقة )

س ١ ، س ٢  $\leq$  صفر ( شرط عدم السلبية )

الخطوة الثانية : تحويل متباينات القيود الى معادلات

بالاستبعاد المؤقت للإشارة (  $\geq$  )

س ١ = ٢٠

س ٢ = ١٠

س ٢ -  $\frac{2}{3}$  س ١ = ١ ( بعد تحويل  $\frac{2}{3}$  س ١ للجانب الايمن )

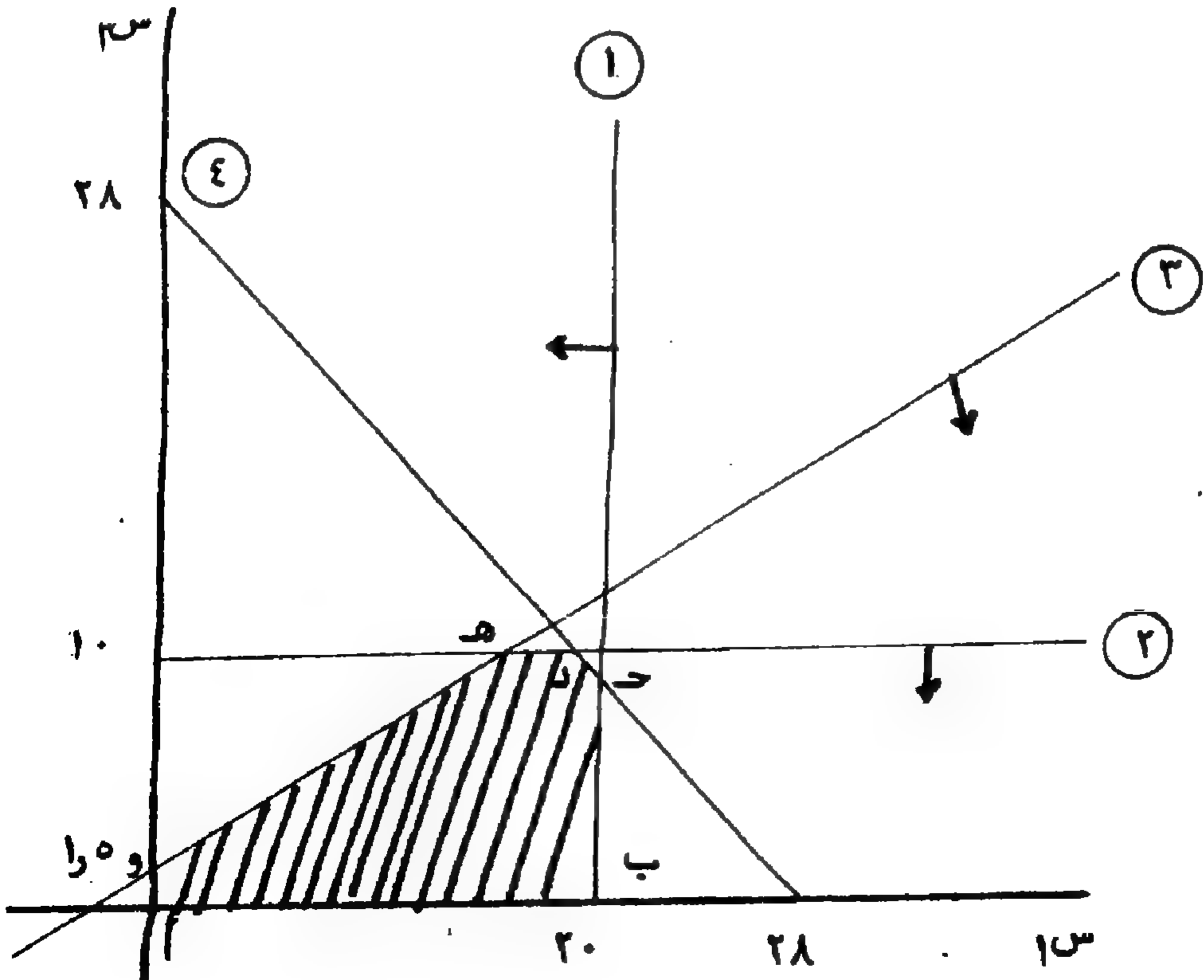
س ١ + س ٢ = ٢٨

### الخطوة الثالثة : التمثيل البياني للمعادلات :

(١) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة :

معادلات القيود		احداثى النقطة الاولى		احداثى النقطة الثانية	
		بفرض ان $x = 0$	بفرض ان $y = 0$	بفرض ان $x = 0$	بفرض ان $y = 0$
		٢٠ = ١ س	١٠ = ٢ س	٢٠ = ١ س	١٠ = ٢ س
	٢٠ = ١ س	٢٠	١٠	٢٠	١٠
	١٠ = ٢ س	١٠	٢٠	١٠	٢٠
	٢ س - ١ س = ١	١٠	٢٠	١٠	٢٠
	٢٨ = ٢ س + ١ س	٢٨	٢٨	٢٨	٢٨

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البياني :



### الخطوة الرابعة : تحديد منطقة الحل الممكنة :

يتضح من الرسم البياني ان منطقة الحل الممكنة هي المنطقة أ ب ج د هـ و .

### الخطوة الخامسة : تعيين الحل الأمثل :

سيكون الحل الأمثل هو احد نقاط الرؤوس لمنطقة الحل الممكنة التي امكن تعيينها في الخطوة السابقة أي انها تكون من بين النقاط أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و ، ولذلك سيتم اختبار كل نقطة منها واختيار النقطة التي تعمل على تعظيم الايراد لتكون هي نقطة الحل الأمثل ، وسيتم اجراء ذلك على مرحلتين الاولى تعيين احداثيات كل نقطة منها ثم المرحلة الثانية التعويض بتلك الاحداثيات بدالة الهدف .

#### ١ - تعيين احداثيات النقاط الطرفية :

— النقطة (أ) وهي نقطة الاصل أي انها ( صفر ، صفر )  
 — النقطة (ب) وهي واقعة على المحور الافقى أي انها ( ٢٠ ، صفر ) .

— النقطة (ج) وهي نقطة تقاطع المعادلتين (١) ، (٤) وعن طريقة حلها آنيا يمكن ايجاد الاحداثيات لها :

$$س١ = ٢٠$$

$$س١ + ٢س٢ = ٢٨$$

بالتعويض في المعادلة الثانية بقيمة س١ = ٢٠

$$٢٨ = ٢٠ + ٢س٢$$

$$٨ = ٢س٢$$

∴ النقطة (ج) تمثل ( ٨ ، ٢٠ ) .

— النقطة (د) وهي نقطة تقاطع المعادلتين (٢) ، (٤)

$$س٢ = ١٠$$

$$س١ + ٢س٢ = ٢٨$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية بقيمة س١ = ٢ من المعادلة

الاولى .



$$\therefore \text{س ١} + ١٠ = ٢٨ \quad \therefore \text{س ١} = ١٨$$

$$\therefore \text{النقطة (د) تمثل } (١٠, ١٨)$$

— النقطة (هـ) وهى تمثل نقطة تقاطع المعادلتين

$$\cdot (٢), (٣)$$

$$\text{س ٢} = ١٠$$

$$\text{س ٢} - \frac{٢}{٣} \text{س ١} = ١$$

وبالتعويض بقيمة س ٢ فى المعادلة الثانية .

$$\therefore ١٠ - \frac{٢}{٣} \text{س ١} = ١$$

$$\therefore - \frac{٢}{٣} \text{س ١} = ٩$$

$$\therefore \text{س ١} = ٩ \times -\frac{٣}{٢} = -\frac{٢٧}{٢} = -١٣.٥$$

$$\therefore \text{النقطة هـ تمثل } (١٠, -١٣.٥)$$

— النقطة (و) وهى تمثل صفر من س ١ لانها تقع على المحور الرأسى وبالتعويض بتلك القيمة فى المعادلة الثالثة المتقاطعة مع المحور الرأسى عند النقطة ونحصل على قيمة س ٢ عند تلك النقطة كالآتى :

$$\text{س ٢} - \frac{٢}{٣} \text{س ١} = ١$$

$$\text{س ٢} - \frac{٢}{٣} \times \text{صفر} = ١$$

$$\therefore \text{س ٢} = ١$$

$$\therefore \text{النقطة (و) تمثل } (\text{صفر}, ١)$$

٢ — اختبار النقاط الطرفية :

$$\text{النقطة أ } (\text{صفر}, \text{صفر}) = ١٠٠٠ \times \text{صفر} + ٣٠٠٠ \times \text{صفر} = \text{صفر} \cdot$$

$$\text{النقطة ب } (٢٠, \text{صفر}) = ٢٠ \times ١٠٠٠ + ٣٠٠٠ \times \text{صفر} = ٢٠٠٠٠ \text{ جنيه} \cdot$$

$$\text{النقطة ج } (٨, ٢٠) = ٨ \times ٣٠٠٠ + ٢٠ \times ١٠٠٠ = ٤٤٠٠٠ \text{ ج} \cdot$$

$$\text{النقطة د } (١٠, ١٨) = ١٨ \times ١٠٠٠ + ١٠ \times ٣٠٠٠ = ٤٨٠٠٠ \text{ جنيه} \cdot$$

$$\text{النقطة هـ } (١٠, ١٣.٥) = ١٣.٥ \times ١٠٠٠ + ١٠ \times ٣٠٠٠ = ٤٣٥٠٠ \text{ جنيه} \cdot$$

النقطة و ( صفر، ١٠ ) =  $1000 \times \text{صفر} + 3000 \times 1 = 3000$  جنيه .

مما سبق يتبين ان نقطة الحل الامثل هي النقطة (د) اذ يتم فيها شحن ١٨ طن فى المخزن الرئيسى و ١٠ طن فى الكابينة ويصل عندئذ الايراد الى اقصى حد له اذ يبلغ ٤٨٠٠٠ جنيه .

( يمكنك تجربة استخدام طريقة خط الربح المتساوى للتأكد من صحة الحل ) .

### مشاكل تخفيض التكلفة Minimization Problems

سوف نخصص ذلك الجزء لتوضيح كيفية استخدام المدخل البيانى للبرمجة الخطية فى معالجة النوعية الاخرى من المشاكل الادارية وهى الخاصة بتخفيض دالة الهدف والوصول بها الى ادنى حد ممكن ، فقد تكون هذه الدالة تكاليف ، او مسافات ، او ازمة ، وبرغم ان مشاكل التخفيض يتم حلها بنفس الطريقة العامة التى تناولناها فى حل مشاكل التعظيم Maximization الا انه من الافضل ان نتناولها بالتحليل من خلال حل مشكلة بسيطة بهدف التعرف على بعض اوجه الاختلافات الاساسية بينهما ، والمشكلة التى جرت العادة على استخدامها كنموذج للصياغة العامة لمشاكل البرمجة الخطية تسمى مشكلة المزج Mixing Problem

### مثال :

تمكنت شركة القاهرة للمنتجات الغذائية من ابتكار طريقة جديدة لانتاج نوع من الاطعمة يتكون من مزيج من الارز والقمح ، والشركة تريد ان تتعرف على اقل تكلفة للمزج بين نوعى الحبوب وبشرط ان تقابل الاحتياجات اليومية للمستهلك المصرى من كل من فيتامين أ ، د .

علما بان تكلفة جرام الارز ٨ر. مليم ويعطى ٢٠ ٪ من الاحتياجات اليومية للمستهلك من فيتامين (أ) ، و ٤٠ ٪ من الاحتياجات من فيتامين (د) ، اما جرام القمح فهو يغطى ٥٠ ٪ من الاحتياجات اليومية من فيتامين (أ) ، و ٢٠ ٪ من فيتامين (د) ويتكلف الجرام ١٢ر مليم . والمطلوب تحديد نسبة المزج بين نوعى الحبوب والى التى تصل بتكلفة النوع الجديد الى ادنى حد لها وبشرط ان تغطى احتياجات المستهلك من فيتامين (أ) ، وفيتامين(د)

### الحل :

تسير خطوات الحل على نفس المنوال الذى اتبعناه فى مشاكل التعظيم كالاتى :

### الخطوة الاولى : صياغة المشكلة

المتغيرات القرارية فى هذه المشكلة هى عدد الجرامات من كل نوع من الحبوب والى تستخدم فى خلطة الطعام ، والهدف هو ايجاد اقل تكلفة للخلط ، لذلك فان شركة القاهرة للمنتجات الغذائية تسعى الى :

تخفيض ٠٠٨ر س + ١٢٠٠ر س ٢

وبذلك فان دالة الهدف تظهر على الشكل السابق ، اما بالنسبة للقيود المفروضة على هذه الدالة فيمكن صياغتها على الوجه التالى :

حيث ان س ١ = عدد جرامات الارز المستخدمة ، س ٢ = عدد جرامات القمح المستخدمة ، وحيث ان تحقيق دالة الهدف السابقة يتعين ان يرتبط بضرورة استيفاء حاجـة المستهلك من كل من فيتامين أ ، د . لذلك فان دالة الهدف مفروض عليها نوعين من القيود اولهما الوفاء بالاحتياجات من فيتامين أ ، وثانيهما الوفاء بالنوع الثانى من الفيتامين ،

فبالنسبة للوفاء باحتياجات المستهلك من فيتامين (أ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{النسبة المئوية من احتياجات المستهلك} \\ \text{من فيتامين (أ) والتي يحصل عليها من الارز} \end{array} \right\} +$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \text{النسبة المئوية من احتياجات المستهلك من} \\ \text{فيتامين (أ) والتي يحصل عليها من القمح} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{الاحتياجات اليومية للمستهلك} \\ \text{من فيتامين (أ)} \end{array} \right\}$$

وفي الصورة الرمزية يكون هذا القيد كالاتي :

$$٢ \text{ و } ١ \text{ س } ١ + ٥ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢ \leq ١ \text{ ( قيد فيتامين أ )}$$

وبنفس الطريقة يمكن صياغة القيد الثاني الخاص

بفيتامين (د) كالاتي :

$$٤ \text{ و } ١ \text{ س } ١ + ٢ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢ \leq ١ \text{ ( قيد فيتامين د )}$$

وبعد اضافة قيود عدم سلبية المتغيرات القرارية

تصبح الصياغة الكاملة للمشكلة على الصورة التالية :

$$\text{تخفيض } ٠٠٠٨ \text{ و } ١ \text{ س } ١ + ٠٠١٢ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢$$

بشرط ان :

$$٢ \text{ و } ١ \text{ س } ١ + ٥ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢ \leq ١$$

$$٤ \text{ و } ١ \text{ س } ١ + ٢ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢ \leq ١$$

$$١ \text{ و } ١ \text{ س } ١ \leq ٢ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢ \leq \text{ صفر}$$

الخطوة الثانية : تحويل متباينات القيود الى

معادلات .

وقد سبق القول ان ذلك يتم عن طريق الاهدال المؤقت

للاشارة ( < ) وبذلك تصبح المعادلات التي تعبر عن

فيتامينات القيود كالاتي

$$١ = ٢ \text{ و } ١ \text{ س } ١ + ٥ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢$$

$$١ = ٤ \text{ و } ١ \text{ س } ١ + ٢ \text{ و } ٢ \text{ س } ٢$$

الخطوة الثالثة : التمثيل البياني لمعادلات القيود

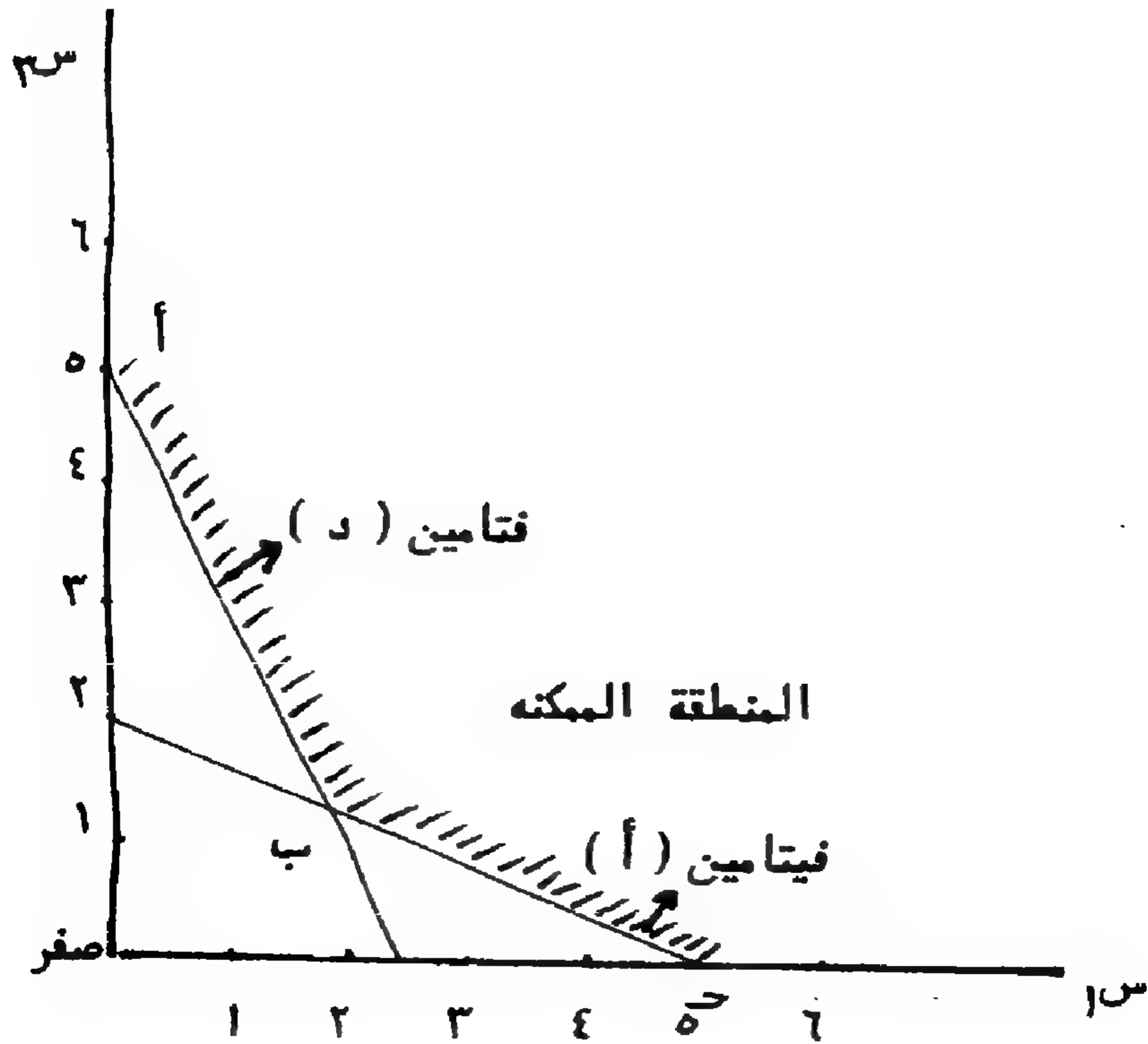
سيتم اولا ايجاد احداثيات النقاط اللازمة لرسم

المعادلات السابقة .



معادلات القيود		احداثى النقطة الاولى		احداثى النقطة الثانية	
بفرض ان س = ١ صفر	تكون س = ٢	تكون س = ٢	تكون س = ١	بفرض ان س = ٢ صفر	بفرض ان س = ٢ صفر
٢رس ١ + ٥رس ١ = ١	صفر	٢	٥	صفر	صفر
٤رس ١ + ٢رس ٢ = ١	صفر	٥	٢٥	صفر	صفر

وبتمثيل تلك الاحداثيات على الرسم البيانى. وتحديد اتجاه منطقة الحل الممكنة بادخال الاشارة التى تم استبعادها لكل معادلة ، فان منطقة الحل الممكنة التى اخذت فى اعتبارها القيود الواردة بالصياغة الرياضية ستظهر على الشكل التالى :



وبلاحظ من الرسم السابق ان المنطقة اسفل كل قيد هي منطقة غير ممكنة بينما المنطقة الواقعة اعلى القيسد هي المنطقة الممكنة وذلك نتيجة مباشرة للاشارة ( < ) . وهذا طبعا شيء بديهي اذ ان القيم المنخفضة للمتغيرات القرارية الواقعة اسفل الخط لا تفي بالاحتياجات اليومية للفيتامين الممثل لذلك الخط .

ولعل الملاحظة السابقة تظهر ان هناك اختلاف حقيقي بين منطقة الحلول الممكنة في مشكلة التخفيض ومشكلة التعظيم ، فمنطقة الحلول الممكنة في مشكلة التخفيض مطلقة وغير محددة ولا نهائية ، وهذا قد يجعل البعض يظن ان الامر سيكون مقلقا ومزعجا حيث سيتم التعامل مع منطقة حلول مطلقة وغير محددة ، الا اننا نؤكد ان الامر على خلاف ذلك ولا يمثل اي ازعاج في هذه الحالة ، ذلك لان المطلوب في دالة الهدف هو تخفيض تكلفة المزيح لادنى حد ممكن وبالطبع فان هذا التخفيض يتطلب قيما صغيرة للمتغيرات القرارية اي ان تتجه الى اسفل منطقة الحلول الممكنة ومن ثم فانه لا يعنينا في شيء ان تكون منطقة الحلول الممكنة مطلقة ولا نهائية .

#### الخطوة الرابعة : تعيين منطقة الحلول الممكنة

من الرسم البياني السابق يمكن القول بان منطقة الحلول الممكنة هي منطقة مطلقة ولا نهائية ومحددة من اسفل بالنقاط أ ، ب ، ج ، وحيث انه تطبيقا لما ذكرناه سابقا ان تخفيض دالة الهدف يتطلب قيما صغيرة للمتغيرات القرارية اذن سيتركز انتباهنا على النقاط الطرفية الدنيا بمنطقة الحلول الممكنة وهي أ ، ب ، ج .

#### الخطوة الخامسة : تعيين الحل الامثل

وفقا لما سبق توضيحه سيكون الحل الامثل احد نقاط

الرؤوس الثلاثة أ ، ب ، ج لذلك سنقوم باختبار النقطـ  
الثلاثة وبيان ايهما يصل بالتكلفة الى ادنى حد لهـ  
ومن ثم تصبح هى نقطة الحل الامثل .

النقطة أ : ومن الرسم يتضح ان احداثى هذه النقطة  
( صفر ، ٥ ) وبالتعويض فى دالة الهدف :

$$٠٠٠٨ ر \times \text{صفر} + ٠٠١٢ ر \times ٥ = ٠٠٦ ر \text{ جنيها}$$

النقطة ب : وهذه النقطة هى نقطة تقاطع خطى المعادلتين  
لذلك سيتم حلها آنيا بفرض ايجاد احداثى النقطة ب  
كالاتى :

$$٢ ر س + ١ س = ١$$

$$٤ ر س + ١ س = ٢$$

وبضرب المعادلة الاولى  $\times ٢$  ثم بطرح المعادلة الثانية  
من المعادلة الجديدة ينتج :

$$٤ ر س + ١ س = ٢$$

$$٢ ر س + ١ س = ٢$$

---


$$\text{بالطرح} \quad ٢ ر س = ٠$$

$$\text{اى ان} \quad ٢ ر = ٠ \quad \frac{٠}{٢} = ٠ \quad \text{جرام}$$

وبالتعويض فى المعادلة الاولى بقيمة س ٠

$$٢ ر س + ١ س = ١ \quad \left( \frac{٠}{٢} \right) \times ٢ ر س + ١ س = ١$$

$$١ س = ١ \quad \frac{١}{١} = ١$$

$$١ س = ١ \quad \frac{١}{١} = ١$$

$$\text{وبذلك فان} \quad ١ س = ١ \quad \frac{١}{١} = ١ \quad \text{جرام}$$

$$\text{اى ان احداثى النقطة ب هو} \quad \left( \frac{٠}{٢}, \frac{١}{١} \right)$$

وبذلك تكون قيمة دالة الهدف هى :

$$٠٠٠٨ ر \times \frac{١}{١} + ٠٠١٢ ر \times \frac{٠}{٢}$$

$$= ٠٠٠٨ ر + ٠ = ٠٠٠٨ ر \text{ جتية}$$

النقطة ج : ومن الشكل البياني السابق يتضح ان احداثى هذه النقطة ( ٥ر ، صفر ) وبالتعويض فى دالة الهدف :

$$٠٠٠٨ر \times ٥ + ٠٠١٢ر \times \text{صفر} = ٠٠٠٤ر \text{ جنيه}$$

ويمكن تلخيص النتائج السابقة للنقاط الطرفية فى الاتى :

النقطة الطرفية	قيمة س ١	قيمة س ٢	قيمة دالة الهدف
أ	صفر	٥	٠٠٠٦ر
ب	$\frac{١٥}{٨}$	$\frac{٥}{٤}$	٠٠٠٣ر
ج	٥	صفر	٠٠٠٤ر

وعلى ذلك يمكن القول ان الحل الامثل هو النقطة ب وفيها يكون معدل المزج الامثل بين نوعى الحبوب كالاتى :

$$\frac{١٥}{٨} \text{ من الارز و } \frac{٥}{٤} \text{ من القمح}$$

وبذلك تصل تكلفة المنتج الجديد الى حدها الادنى .

ولكن قد يخطر على ذهن القارئ وهو يتابع هذه النتائج تساؤل مؤداه : لقد تبين من الحل الامثل ان نسب الخلط بين نوعى الحبوب والتي تؤدي الى تخفيض التكلفة الى حدها الادنى هي  $\frac{١٥}{٨}$  جرام من الارز +  $\frac{٥}{٤}$  جرام من القمح اى ان وزن المزيج الكلى الامثل هو  $\frac{٢٥}{٨}$  جرام  $(\frac{١٥}{٨} + \frac{٥}{٤})$  . هل هذا يعنى انه لابد للشركة ان تجهز عبوات سعة كـل منها  $\frac{٢٥}{٨}$  جرام تماما بدلا من عبوات نمطية تسمح بـوزن معقول من هذه المادة الغذائية ؟

للإجابة على ذلك نقول ان الحل الامثل قد حدد وزن كل عنصر فى الخلطة والتي يمكن من خلالها استنتاج نسب المزج بين العنصرين وهى :

$$\frac{١٥}{٨} \text{ ارز : } \frac{٥}{٤} \text{ قمح}$$

اى ان نسبة المزج هى : ٣ ارز : ٢ قمح



وطالما توصلنا الى نسب المزج بين العنصرين والتي تحقق اقل تكلفة ممكنة ، فلا مانع اطلاقا من استخدام عبوات بأى حجم طالما ان الخلطة بين العنصرين تحافظ على نسبة المزج بينها ، فمثلا اذا كانت العبوات النمطية التى تستخدمها الشركة حاليا تسع ٤٠ جراما من الخليط ، اذن نضع فى هذه العبوة ٢٤ جراما من الارز + ١٦ جراما من القمح ولا نكون بذلك قد خرجنا عن الحل الامثل لان النسبة بينهما هي  $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$  أى ٣ : ٢ كما هي .

# **الفصل الثاني**

## **البرمجة الخطية**

**"حل مشاكل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس"**

**\* مقدمة**

**\* مفاهيم أساسية**

**\* حل مشاكل التعظيم بطريقة السمبلكس**

**\* حل مشاكل التخصيص بطريقة السمبلكس**

**\* أسئلة وتطبيقات**



## الفصل الثانى

### طريقة السمبلكس

#### مقدمة :

تناولنا فى الفصل الاول الكيفية التى يتم بها مشاكل البرمجة الخطية باستخدام المدخل البيانى ، الا انه يمكن ملاحظة ان المشاكل التى تناولناها بالتحليل والشرح والحل كانت دائما تتكون من متغيرين قراريين (س ١ ، س ٢) ، وهذا هو الذى جعل استخدام المدخل البيانى فى الحل سهلا ومبسطا ويسيرا ، الا اننا يمكن ان نتخيل انه عندما تزيد المتغيرات القرارية عن اثنين فان استخدام هذا المدخل لن يكون مناسباً بل ستنتابه كثيرا من نواحي التعقيد ، ويهل التعقيد الى حالة الاستحالة فى الحل اذا اصبحت المتغيرات القرارية اكثر من ثلاثة ، وهذا بطبيعة الحال راجع الى ان الشكل البيانى لمنطقة الحلول الممكنة محدد ببعدين فقط هما المحور الافقى والمحور الرأسى ونحن نحتاج عادة الى محور خاص لكل متغير قرارى ، اذن عندما تكون المتغيرات القرارية ثلاثة مثلا فـان معنى ذلك انه لابد من استخدام المدخل الهندسى فى الرسم البيانى حيث ان منطقة الحلول الممكنة فى هذه الحالة ستكون فى الفراغ ويصعب كثيرا تحديدها وتمويرها ، ولذلك يكون استخدام المدخل البيانى فى هذه الحالة محفوفاً بالعديد من صعوبات التعقيد والصعوبة ، كذلك الحال اذا زادت معادلات القيود المفروضة على دالة الهدف بالمياعة الرياضية للمشكلة الى حد يكون تمثيلها فى الرسم البيانى متداخلاً يكون استخدام هذا المدخل ايضا اتجاه نحو التعقيد فى الحل وما قد يصاحبه من احتمال عدم دقة النتائج التى يمكن التوصل اليها .



ولذلك فان هناك مدخل آخر او طريقة اخرى بديلة للمدخل البياني عندما يكون استخدامه مصدر تعقيد فى الحل ، وهذا المدخل هو ما يطلق عليه طريقة السمبلكس Simplex Method وهذه الطريقة فى البرمجة الخطية تعطى امكانيات اكبر ، كما يتسع نطاقها عن الطريقة البيانية ، اذ يمكن لمتخذ القرار ان يتعامل مع عدد من المتغيرات القرارية يزيد عن امكانيات الطريقة البيانية ، ايضا لا يوجد بها تعقيد فى حالة ما اذا تعددت القيود المفروضة على دالة الهدف فى الصياغة الرياضية للمشكلة ، فهذه الطريقة يمكن ان تتعامل مع اى عدد من المتغيرات القرارية ومربع اى عدد من معادلات القيود المفروضة ، وان كان الحل يدويًا فى مثل تلك الحالات سيكون مرهقا الا ان استخدام الحاسب الالى والبرامج المتاحة الان للتشغيل عليه ازالته اى تعقيدات فى الحل خاصة عندما يكبر حجم الصياغة الرياضية للمشكلة .

ان طريقة السمبلكس تقوم على منهج مرتب ومنظم وتعمل من خلال هذا المنهج على ايجاد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية فى اطار خطوات متتابعة ومتعاقبة عن طريق تقييم متتالى للنقاط الطرفية Extreme Points فهى تعمل على اختبار مدى صلاحية تلك النقاط واحدة بعد الاخرى الى ان تصل الى النقطة التى لا يوجد افضل منها ، اى الى ان تصل الى الحل الامثل الذى يشير الى احسن حل ممكن .

ولعله يكون من المفيد اولا ان نتعرض فى بداية هذا الفصل وقبل الدخول فى الخطوات التنفيذية للحل بطريقة السمبلكس الى بعض المراكز التى تشكّل المفاهيم الاساسية لهذه الطريقة حيث ان ذلك ضرورى للوقوف على فهم واضح وصحيح للخطوات التى تسير فيها هذه الطريقة ، وايضا تحديد معانى بعض المصطلحات التى تستخدم فى خطواتها ، كذلك التعرف على كيفية

اجراء العمليات الحسابية المطلوبة لها من الناحية الجبرية

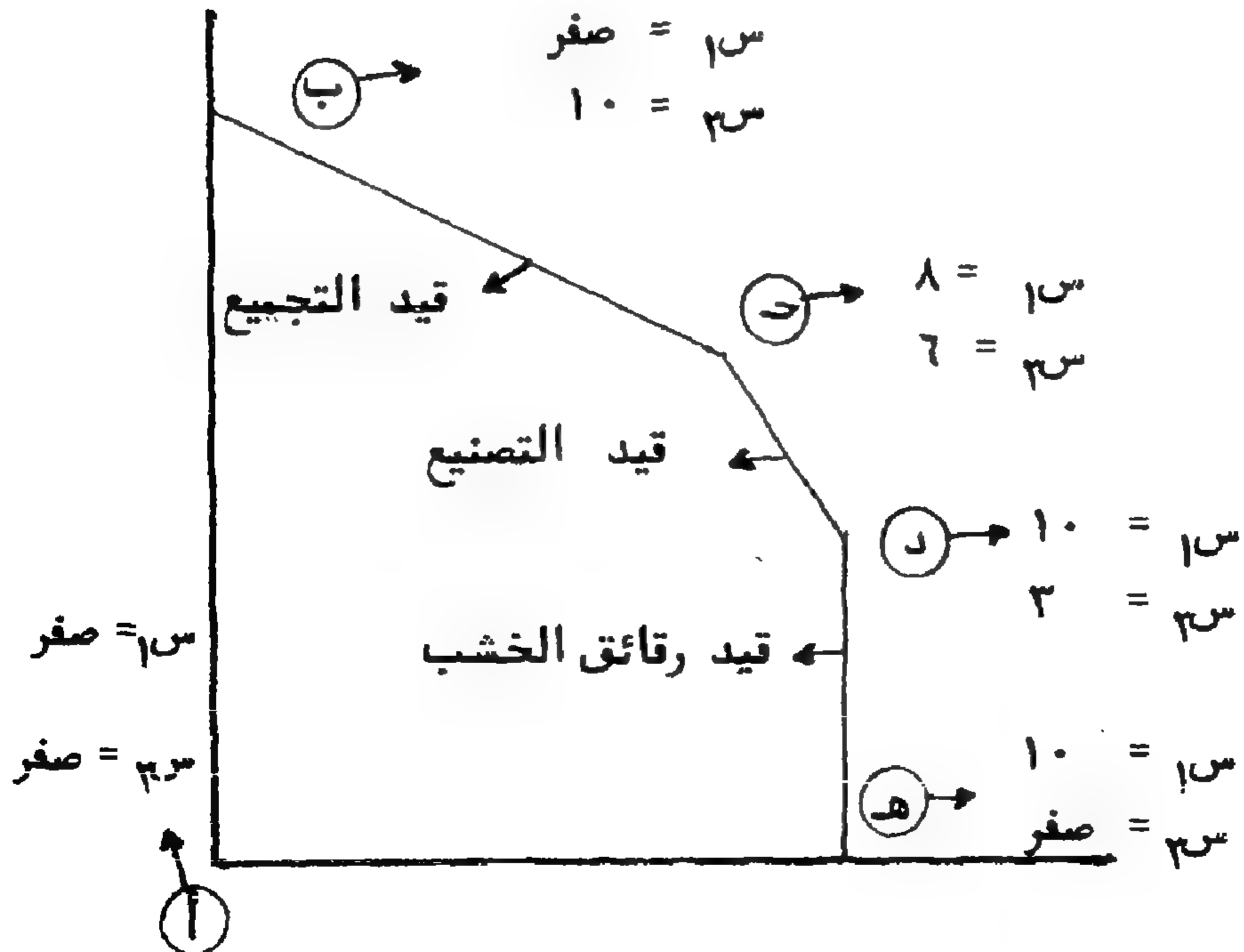
مفاهيم اساسية : Underlying Concepts

سنتعامل مرة اخرى مع المثال الذى سبق التعامل معه بالمدخل البيانى والذى تم وضع صياغته الرياضيه على النحو التالى :

د (ر) = ٧ س ١ + ١٠ س ٢ ← اقصى ربح ممكن بشرط ان :

( قيد طاقة التجميع )	$36 \geq 1 \text{ س } ٢ + ١ \text{ س } ٣$
( قيد طاقة التجميع )	$٤٠ \geq ٢ \text{ س } ٤ + ١ \text{ س } ٢$
( قيد رقائق الخشب )	$١٠ \geq ١ \text{ س } ١$
( شرط عدم السلبية )	$١ \text{ س } ١, ٢ \text{ س } ٢ \geq \text{ صفر}$

وكان الشكل البيانى التالى يمثل منطقة الحلول الممكنة والنقاط الطرفية لهذه المشكلة .



ان ما نسعى الى توضيحه فى هذا المكان هو بيان كيف ان خطوات السمبلكس سوف تستخدم هذه النقاط الطرفية فى تناولها لحل المشكلة .

ان منهج طريقة السمبلكس تتطلب اختيار احـد النقاط كحل اساسى من بين هذه النقاط الطرفية حتى تكون بمثابة نقطة بدء أو انطلاق نحو تتابع الخطوات وصولاً للحل الامثل ، ونقطة الحل الاساسى او الحل المبدئى اصطلاح على اختيارها بحيث تجعل الطاقات العاطلية بالاقسام الانتاجية أعلى ما يمكن وهذا بطبيعة الحال لا يحدث الا فى حالة عدم الانتاج ، أى عند النقطة الطرفية المنطبقة مع نقطة الاصل (أ) حيث تمثل هذه النقطة حالة عدم الانتاج حيث أن قيمة س = ١ = صفر ، س = ٢ = صفر ، وعندئذ تكون الطاقات العاطلة عند حدها الاعلى ويتم اختيار هذه النقطة كحل اساسى ممكن ، ثم نقوم بالتاكيد عما اذا ما كانت هذه النقطة الممكنة تمثل الحل الامثل أم لا ؟ ، ويتم ذلك عن طريق الوقوف على اثر التغيرات المحتملة والتي يمكن اجراؤها فى الحل على دالة الهدف . فاذا كان هناك اى تغيير فى الحل الحالى سيترتب عليه تحسين دالة الهدف عندئذ يمكن القول ان الحل الحالى غير أمثل Not Optimal ويتعين التحرك نحو هذا التغير المحتمل وسيستمر التحرك الى الحد الذى نجد عنده أن اى تغيير محتمل سيخفض من دالة الهدف عندها نكون قد وصلنا الى الحل الامثل ويفضل ان نثبت عند هذا الحل دون اى تغيير آخر .

أن الحل الاساسى أو المبدئى الذى أشرنا الى أنه سيكون خطوة البداية فى طريقة السمبلكس وهو الحل عند نقطة الاصل هو حل ممكن جبرياً حيث انه يقع على حدود منطقة الحلول الممكنة ، الا أنه بلا شك حل غير مرغوب فيه مالياً للشركة المنتجة ويتعين البحث عن حل أفضل ، وحيث أن الهدف هو تعظيم الربح إذن يتعيـن

الانتقال من حالة عدم الانتاج ( والتي تمثلها نقطة  
الاصل ) الى حالة الانتاج لان اى تغير فى قىــــــــــــــــم  
المتغيرات القرارية ( اى انتاج كميات من س ١ ، س ٢ )  
سيؤدى حتما الى زيادة قيمة دالة الهدف عما هى عليه  
فى نقطة الاصل .

وحيث أننا رفضنا النقطة (أ) كحل للمشكلة فإنه يتعين الانتقال الى نقطة طرفية أخرى مجاورة أو متاخمة للنقطة (أ) Adjacent ، والنقطة الطرفية المجاورة هي النقطة التي يمكن الوصول اليها بالتحرك على طول احد الخطوط الممثلة للقيود ، وبالنظر الى الرسم البياني السابق يتضح ان كل نقطة من النقاط الطرفية الموضحة بالشكل لها نقطتين طرفيتين متجاورتين ، فمثلا النقطتين ( ب ، هـ ) هما نقطتان طرفيتان متجاورتان للنقطة (أ) وهذا يعنى ان هناك امكانية اجراء تغييرين فى قيمة المتغيرات القرارية اذ بالتحرك الى النقطة الطرفية (ب) فإنه يمكن انتاج اقصى ما يمكن من وحدات المتغير س ٢ ، واذا تحركنا الى النقطة الطرفية (هـ) فإنه يمكن انتاج اقصى ما يمكن من وحدات المتغير س ١ ، ويصبح التساؤل عندئذ هو اى النقطتين يفضل ان ننقل اليها ؟ .

ان المعيار او المقياس الذى سنقرر استنادا عليه الى اى النقطتين سنتحرك هو مدى مساهمة كل منهما فى دالة الهدف ، فدالة الهدف سوف تزيد بمقدار عشرة جنيهات لكل وحدة تنتج من س ٢ ، وبمقدار ٧ جنيهات لكل وحدة من س ١ ، اى انه يمكن القول ان قيمة التغير فى دالة الهدف هى التى تحدد لنا الاتجاه الذى سنسلكه ، وحيث أن انتاج وحدة واحدة من س ٢ ستعمل على زيادة أكبر بدالة الهدف بالمقارنة بالزيادة الناتجة عن وحدة واحدة من س ١ ، لذا يتم اختيار الانتقال الى النقطة الطرفية (ب) .

وبعد الانتقال الى النقطة (ب) يظل السؤال مطروحا



وهو هل من الافضل الثبات عند النقطة (ب) ام التحرك الى نقطة اخرى ؟ اننا سنطبق نفس المعيار الذى اشرنا اليه فى الجزء السابق ، فالنقطة (ب) لها نقطتان طرفيتان متجاورتان هما (ج) ، (أ) ، واحدى هاتين النقطتين ( وهى النقطة أ ) تعنى الرجوع الى النقطة الاصلية الاولى والتي سبق ان اختبرناها وتأكدنا انها لا تحقق اى ارباح اذن يمكن تجاهلها والتركيز باهتمامنا على النقطة (ج) ، ويكون سؤالنا الاساس هل من الافضل ان ننقل الى هذه النقطة (ج) ام نظل كما نحن عند النقطة (ب) ؟ للإجابة على ذلك نقول اذا كان تحركنا الى النقطة (ج) سيعمل على تحسين دالة الهدف سننتقل اليها ، اما اذا كان تحركنا اليها سيكون سببا فى تخفيض قيمة دالة الهدف عما هى عليه عند النقطة (ب) فاننا سنظل كما نحن .

ان الانتقال من النقطة (ب) الى النقطة (ج) سيكون كما هو واضح من الرسم البيانى عبر الخط الممثل لقيد قسم التجميع والذى كانت معادلته على الصورة التالية :

$$2 \text{ س } 1 + 4 \text{ س } 2 = 40 \text{ ( معادلة قيد قسم التجميع ) } .$$

وبالنظر الى التمثيل البيانى للخط المستقيم الممثل لمعادلة التجميع بالشكل السابق يتضح ان الانتقال عبر هذا الخط من النقطة (ب) الى النقطة (ج) يعنى زيادة الوحدات المنتجة من س 1 وتخفيض وحدات س 2 ، ولكن هل تخفيض وحدة واحدة من س 2 ينتج عنه زيادة وحدة واحدة من س 1 ؟ ان الاجابة على ذلك تتطلب النظر مرة اخرى الى معادلة التجميع والتي يتبين منها ان كل وحدة من س 1 تحتاج ساعتين من ساعات التجميع ، بينما كل وحدة من س 2 تحتاج الى اربعة ساعات . وهذا يعنى ان تخفيض وحدة واحدة من انتاج س 2 يترتب عليه وفر فى طاقة التجميع قدرها ٤ ساعات يمكن توجيهها لانتاج عدد ٢ وحدة من س 1 ( حيث ان كل وحدة من س 1

تحتاج فقط ساعتين تجميع ) . خلاصة القول ان كل وحدة يتم تخفيضها من س ٢ ستتيح الفرصة لانتاج وحدتين اضافيتين من س ١ وسيكون انعكاس هذا التبادل على دالة الهدف كالآتى :

تخفيض وحدة واحدة من س ٢ يؤدي الى تخفيض الارباح بمقدار ١٠ جنيهات وزيادة مقدارها ٢ وحدة من س ١ يؤدي الى زيادة الارباح بمقدار ١٤ جنيهًا ومحصلة ذلك كله ان الزيادة فى دالة الهدف ٤ جنيهات . وهذا يعنى ان الانتقال من النقطة (ب) الى النقطة (ج) سيعمل على تحسين دالة الهدف ، اذن النقطة (ج) افضل من النقطة (ب) .

وعند النقطة (ج) سيظل تساؤلنا مطروحا ، وهو هل نقف عند هذه النقطة ام ننتقل منها الى نقطة اخرى ؟ للإجابة على ذلك نكرر ما سبق اتباعه عند الانتقال من نقطة لاخرى ، فالنقطة (ج) لها نقطتين طرفيتين متجاورتين وهما النقطة (ب) ، والنقطة (د) ، أما النقطة (ب) فقد سبق وان اوضحنا انها لا تمثل حلا امثلا لان النقطة (ج) افضل منها ، لذلك سيتم استبعادها ويتم التركيز على المقارنة بين النقطة (ج) الحالية والنقطة (د) .

ان الانتقال من النقطة (ج) الى النقطة (د) سيكون كما هو واضح من الرسم البيانى عبر الخط الممثل لقيد قسم التصنيع والذي كانت معادلته على الصورة التالية

$$٣ س ١ + ٢ س ٢ = ٣٦ \text{ (معادلة قيد قسم التصنيع)}$$

وبالنظر الى التمثيل البيانى للخط المستقيم لمعادلة التصنيع بالشكل البيانى السابق يتضح ان الانتقال عبر هذا الخط من النقطة (ج) الى النقطة (د) يعنى زيادة الوحدات المنتجة من س ١ وتخفيض وحدات س ٢ ، وسيكون حساب معدل الزيادة والتخفيض كالآتى :

حيث ان تخفيض وحدة واحدة من س ٢ يعنى توفير عدد ٢

ساعة من ساعات التصنيع يمكن استغلالها في انتاج وحدات من س ١ ، الا ان كل وحدة من س ١ تحتاج ٣ ساعات تصنيع اي ان هذا التوفير يعمل على انتاج  $\frac{2}{3}$  وحدة من س ١ فقط ، وبلغة الارباح فان تخفيض وحدة واحدة من س ٢ هو بمثابة تخفيض في الارباح بمقدار عشرة جنيهات ، وزيادة  $\frac{2}{3}$  وحدة من س ١ معناه زيادة الارباح بمقدار  $\frac{2}{3} \times 4$  جنيه (  $\frac{2}{3} \times 7 = \frac{2}{3} \times 4$  جنيه ) وبذلك تكون المحصلة النهائية للربح الناتج عن هذا التغير :

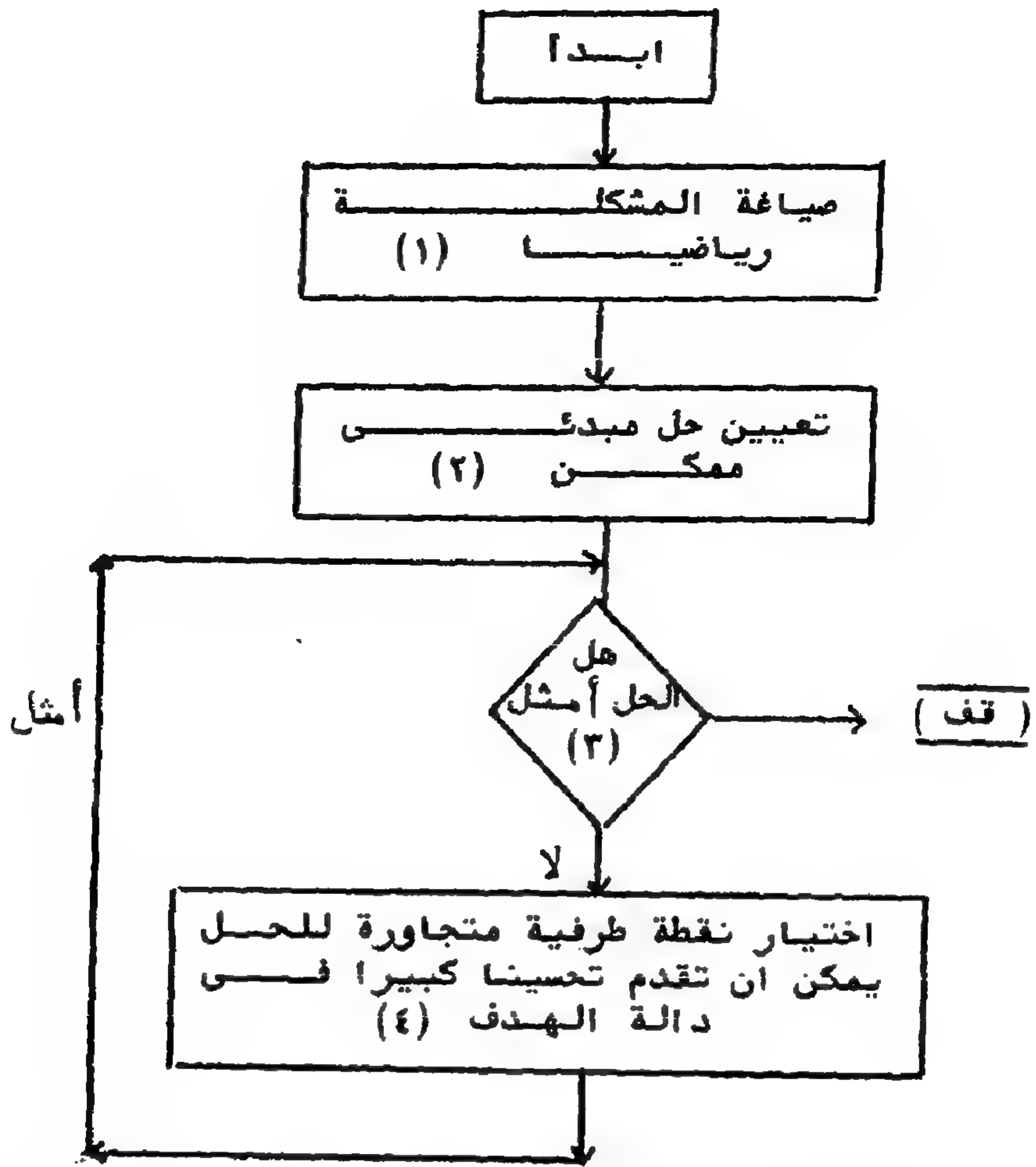
$$- 10 + \frac{2}{3} \times 4 = \frac{1}{3} \times 5 \text{ جنيه}$$

اي ان المحصلة بالسالب وهذا يعنى ان هذا التبديل سيخفض قيمة دالة الهدف ، وحيث ان هدفنا هو تعظيم دالة الهدف ، لذلك فاننا لسنا في حاجة الى التحرك الى النقطة (د) . وبذلك تكون النقطة الطرفية (ج) هي نقطة الحل الامثل .

هذه هي الخطوات المنهجية لطريقة السمبلكس ويمكن ان يلاحظ منها انه قد تم التوصل الى الحل الامثل عن طريق اختيار ثلاثة نقاط فقط من النقاط الخمسة الطرفية الممكنة ، وبالنسبة للمشاكل الكبيرة سنجد ان منهج السمبلكس سيأخذ في اعتباره عدد صغير جداً من الحلول الممكنة عند النقاط الطرفية ، ان قوة طريقة السمبلكس لا تأتي فقط من قدرتها على حل مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة ، انما من كفاءتها ايضاً وفعاليتها في الوصول الى الحل الامثل من خلال اختبارات منظمة لعدد صغير من الحلول الممكنة .

#### خطوات منهج السمبلكس :

خريطة التتابع التالية تقدم ملخصاً للخطوات العامة للحل والتي تشكل في مجملها منهج او اجراءات طريقة السمبلكس .



ويتضح من خريطة التتابع السابقة ان منهج السمبلكس يتضمن اربعة خطوات منها خطوتين يتلمان بصورة تكرارية حتى يتم الوصول الى الحل الامثل ، هذه الخطوات الاربعة اجمالاً هي :

أولاً: الصياغة الرياضية للمشكلة Formulate the problem Mathematically

وذلك بتحديد المتغيرات القرارية ، ووضع دالة الهدف ، وصياغة القيود المفروضة على الحل ، ولقد سبق ان تناولنا في مقدمة الفصل الاول الكيفية التي يتم بهها اعداد الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية .

ثانياً: تعيين حل مبدئي (اولي) ممكن

Determine an Initial Feasible Solution

وذلك عن طريق اختيار احدى النقاط الطرفية كحل اساسي ممكن ، ويجدر التنويه هنا الى انه على الرغم من انه يمكن اختيار اي نقطة من النقاط الطرفية كحل اساسي



ممکن ، الا انه من المتبع غالباً او من المألوف ففى مشاكل تعظيم دالة الهدف ان يتم اختيار نقطة الاصل كحل اساسى ممكن والتي تكون عندها قيم جميع المتغيرات القياسية مساوية للصفر اى حالة عدم انتساج اى من المتغيرات القياسية .

ثالثاً : اختبار نقطة الحل المبدئى من حيث كونها يمكن ان تمثل نقطة الحل الامثل ام لا ؟ ويتم ذلك عن طريق تحديد التغير فى قيمة دالة الهدف والذي يمكن ان يحدث اذا ما تم الانتقال الى نقطة طرفية مجاورة . فاذا لم تكن النقطة المتجاورة تعطى قيمة احسن لدالة الهدف فهذا يعنى ان النقطة الطرفية الحالية هى نقطة الحل الامثل وينتهى بذلك حل المشكلة . اما اذا اتضح ان هناك نقطة او اكثر من تلك النقاط المتجاورة احسن من النقطة الحالية فى تحسين دالة الهدف هنا يتعين الانتقال الى الخطوة الرابعة .

رابعاً : اختيار نقطة طرفية مجاورة تعمل على اكبر تحسين فى دالة الهدف .

وينبغى ملاحظة ان الحلقة التى تربط الخطوتين الثالثة والرابعة ( كما هو موضح بالشكل ) تسمى حلقة تكرارية اى يتم تكرار هاتين الخطوتين حتى يتسلسل التوصل الى الحل الامثل ، وتشمل الخطوات الاربعة السابقة الخطوات العامة لمنهج السمبلكس ، وحتى يمكن تفهم العمليات الحسابية المطلوب القيام بها فى كل من هذه الخطوات ، فاننا سنستعرض فيما يلى بالتفصيل هذه الخطوات وسنقوم باجراء العمليات الحسابية لكل خطوة وبالتطبيق على ذات المثال الذى يمثل مشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية وهى التى سبق لنا حلها بالطريقة البيانية .

حل مشاكل التعظيم بطريقة السمبلكس

الخطوة الاولى : صياغة المشكلة وازافة المتغيرات الراكدة .

*Formulating the problem and Adding Slack variables.*

لقد كانت الصياغة الرياضية التي تم وضعها لمشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية على الوجه التالي :

تعظيم  $٧ س١ + ١٠ س٢$  ( دالة الهدف )

بشرط ان

$$\begin{aligned} ٣ س١ + ٢ س٢ &\geq ٣٦ & ( \text{ قيد التصنيع } ) \\ ٢ س١ + ٤ س٢ &\geq ٤٠ & ( \text{ قيد التجميع } ) \\ ١ س١ &\geq ١٠ & ( \text{ قيد رقائق الخشب } ) \\ ١ س١ , ٢ س٢ &\leq \text{ صفر} & ( \text{ عدم السلبية } ) \end{aligned}$$

وكما كان الحال في طريقة الرسم البياني اذ كان يلزم لاتمام التمثيل البياني ان يتم تحويل متباينات القيود الى معادلات ، ولقد كان ذلك يتم عن طريق الاهمال المؤقت للاشارة ، على ان تسترد الاشارة بتحديد اتجاه القيد في الرسم البياني ، كذلك فان طريقة السمبلكس تستلزم تحويل كل المتباينات الى معادلات ولكن ذلك لن يتم بالطريقة التي انتهت في الرسم البياني بالاهمال المؤقت للاشارة ، حيث ان طريقة السمبلكس لا تستخدم الرسم في الحل حتى نقول انه يمكن استرداد الاشارة التي استبعدت مؤقتا ، لذلك كان من الضروري البحث عن اسلوب آخر عن طريقة نتمكن من تحويل المتباينات الى معادلات ، ووفقا لمنهج السمبلكس يتم تحويل كسسل المتباينات الى معادلات وذلك من خلال اضافة او طرح ما اصطلح على تسميته المتغيرات الراكدة Slack Variables وكل متغير راكد يضاف الى قيد معين انما يعبر عن مقدار الطاقة غير المستغلة بذلك القيد الذي اضيف اليه المتغير الراكد ، وسوف نستخدم الرمز (س) ليعبر عن المتغير الراكد مع تمييزه من قيد لآخر برقم يضاف اليه وعلى ان يكون اول متغير راكد يأخذ الرقم التالي للرقم الذي تم به تمييز آخر متغير قرارى ففى مثالنا هذا مثلا نجد ان آخر متغير قرارى قد أخذ الرمز والرقم ( س٢ ) ، اذن اول متغير راكد سيأخذ الرمز والرقم س٣ وهكذا لباقي المتغيرات الراكدة بتسلسل الارقام وفق تتابعها ، ويتعهن قبل الدخول فى

تطبيق هذه الخطوة على المثال الذى نحن بمسدد ان نحدد اولا كيفية اضافة المتغيرات الراكدة الى القيود فى مختلف حالاتها :

(أ) اذا كانت المتباينة فى صورة  $\geq$  ( اقل من أو يساوى ) فان المتغير الراكد يضاف للجانب الايمن حيث انه الجانب الاقل وبالتالي فان اضافته الى ذلك الجانب الايمن تتحول المتباينة الى معادلة .

(ب) اذا كانت المتباينة فى صورة  $\leq$  ( اكبر من أو يساوى ) فان المتغير الراكد يظهر مطروحا من الجانب الايمن وهو الجانب الراكد ولكن يجب التنويه هنا ان المتغيرات الراكدة لابد ان تكون غير سالبة لان الطاقة المستغلة للمتغيرات القرارية لن تتعدى اجمالاً الى الطاقة المتاحة ، وللمعالجة مشكلة ظهور المتغيرات الراكدة بمعاملات سالبة فاننا نحتاج الى اضافة متغير مكمل لكل قيد يكون فيه المتغير الراكد له قيمة سالبة ، وهذه المتغيرات الجديدة تسمى المتغيرات الوهمية او الاصطناعية Artificial Variables ، وسنعود الى تفصيل ذلك عند التعرض لحل مشاكل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس ( مشاكل تخفيض التكلفة ) .

(ج) اذا كان القيد فى شكل معادلة وبالتالي لسنا فى حاجة الى استخدام متغير راكد فانه من الضرورى اضافة متغير اصطناعى .

ولتحويل متباينات قيود الصياغة الرياضية للمشكلة

التى نبحث عن الحل الامثل لها الى معادلات يتم الاتى :

$$٣ س١ + ٢ س٢ + ٢ س٣ = ٣٦ \quad ( معادلة التمنييع )$$

$$٢ س١ + ٤ س٢ + ٢ س٣ + ٤ س٤ = ٤٠ \quad ( معادلة التجميع )$$

$$١ س١ + ٥ س٢ + ١٠ س٣ = ١٠ \quad ( معادلة رقائى الخشب )$$

### الخطوة الثانية : اعداد الجدول المبدئى للحل

#### Preparing the Initial Tableau

قد يكون من المناسب اولا ان نوضح الشكل الذى يأخذه جدول السمبلكس والجدول التالى يوضح الهيكل الاساسى لجدول السمبلكس وسنجد ان اعمدة وصفوف ذلك الجدول تتضمن مجموعة من العناوين تشير الى معنى العمود أو الصف وسيتم توضيح معناها ومفهومها حين الاستخدام الفعلى للجدول حتى نبتعد عن وضع تعريفات نظريية بعيدة عن التطبيق ، اذ من المستحسن ان نشير الى كل عمود وصف حين الحل الفعلى للمثال الذى نتناوله بالحل .



A. .

ولاعداد الجدول المبدئى نقوم بالخطوات التالية :

(١) عناوين الجدول Tableau Headings

بداية اعداد الجدول المبدئى هى كتابة اسماء جميع المتغيرات وقيمة معاملاتها فى دالة الهدف فى اعلى صفين جهة اليسار من الجدول ، فالصف الاول امام عنوان الارباح الداخلة يتضمن دالة الهدف أى ربـح الوحدة بكل منتج ، وحيث ان ربح الوحدة من س ١ = ٧ جنيهات ، ومن س ٢ = ١٠ جنيهات لذلك يتضمن صف دالة الهدف ٧ جنيه اعلى المتغير س ١ ، ١٠ جنيه اعلى س ٢ ونظرا لان المتغيرات س ٣ ، س ٤ ، س ٥ متغيرات راكدة لذلك نجد ان المعامل الخاص بكل منها فى دالة الهدف صفر أى ان هذه المتغيرات لا تدر ربحا .

ثم يتم استكمال اول عمودين على يمين الجدول وذلك بكتابة المتغيرات الاساسية فى الحل المبدئى بالعمود الثانى ، اما العمود الاول فيخصص لتسجيل معاملات دالة الهدف لهذه المتغيرات الاساسية بحيث يكون كل معامل مقابل للمتغير الخاص به ، ويجدر فى هذا المقام ان نحدد اولا ما هو المقصود باصطلاح المتغيرات الاساسية Basic Variables ، من المعروف مثلا ان النقطة الطرفية (١) قيم المتغيرات س ١ ، س ٢ بها تساوى صفر لانها حالة عدم انتاج عندئذ نقول ان كل من س ١ ، س ٢ متغيرات غير اساسية عند النقطة (أ) ، لانها تأخذ قيما صفرية ، وعند النقطة (١) نجد ان كل الطاقات الخاصة بالتصنيع والتجميع ورقائق الخشب عاطلة وغير مستغلة ، أى ان س ٣ وهى ترمز للطاقة العاطلة بقسم التصنيع = ٣٦ ساعة ، و س ٤ وهى ترمز للطاقة العاطلة بقسم التجميع ٤٠ ساعة ، ورقائق الخشب العاطلة س ٥ = ١٠ وحدات ، أى ان هذه المتغيرات الراكدة قيمتها عند النقطة (١) موجبة لذا يطلق عليها متغيرات اساسية اذن يمكن القول ان المتغيرات التى لها قيم صفرية يطلق عليها متغيرات غير اساسية ، اما المتغيرات التى لها

قيم غير صفرية فيطلق عليها متغيرات اساسية . ووصف المتغيرات بانها اساسية او غير اساسية سوف تتغير باستمرار كلما انتقلنا من نقطة طرفية لآخرى ، ولكن عدد المتغيرات الاساسية او غير الصفرية سيظل ثابتا ، وفى الحقيقة فان النظرية الاساسية للبرمجة الخطية تنص على " سيوجد دائما عددا من المتغيرات الاساسية بنفس عدد القيود الموجودة " .

وحيث ان الصياغة الرياضية للمشكلة التى نعالجها الان تحوى ثلاثة قيود لذلك سنجد ان هناك ثلاثة متغيرات لها قيم غير صفرية " متغيرات اساسية " ، وهذه المتغيرات الاساسية هى المتغيرات الراكدة بالنسبة للحل المبدئى . واستنادا على المفهوم السابق فان عمود المتغيرات الاساسية سيتم التسجيل فيه من واقع هذا المفهوم اذ سيتم شغله بالمتغيرات الاساسية ( الراكدة بالنسبة للجدول المبدئى ) وهى على الترتيب س ٢ ، س ٤ ، س ٥ ويسجل فى العمود الاول امام كل منها قيمة معامل الهدف لها وهى فى الجدول المبدئى صفرا لكل منها .

وبتسجيل تلك البيانات بالجدول المبدئى سيظهر على

الشكل التالى :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٢	س ٤	س ٥
صفر	س ٣						
صفر	س ٤						
صفر	س ٥						
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية					
		مافى التغير					

(٢) جسم الجدول Body of the Tableau

وفي هذه المرحلة نبدأ بتسجيل معادلات القيود في جسم الجدول مبتدئين بقيمة المعادلة ، فمثلا الصف الاول والذي يوجد به المتغير الاساسي س ٣ يوجد بالمعادلة الاولى لذا يتم تسجيل المعادلة الاولى بكاملها في هذا الصف مبتدئين بقيمة المعادلة والتي تبلغ ٣٦ ، ثم يتم تسجيل معاملات المعادلة الاولى وفقا للمتغيرات على رأس كل عمود ، اي ان يكون كل معامل تحت المتغير المتعلق به في الاعمدة فمثلا س ١ يتم تسجيلها بوضع رقم ٢ في عمود س ١ ، كذلك س ٢ يتم تسجيلها بوضع رقم ٢ في عمود س ٢ والرقم ١ في عمود س ٣ ثم تسجل الرقم صفر في كل من عمود س ٤ ، س ٥ لان معادلة التصنيع لا يوجد بها اي من هذين المتغيرين اي ان قيمتهما بتلك المعادلة = صفر ، وبذلك نكون قد انتهينا من الصف الاول ( صف س ٣ ) ، بنفس الطريقة نقوم بتسجيل معاملات معادلة قسم التجميع في الصف الثاني ( صف س ٤ ) ، وهكذا .

وبانتهاء تسجيل كافة معاملات القيود بجسم الجدول فان الجدول المبدئي بعد ذلك التسجيل سيظهر على الشكل التالي :



معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية					الارباح الداخلية	المتغيرات الاساسية			
					القيم		س ١	س ٢	س ٣
مفر	س ٣	٣٦	٣	٢	١	مفر	مفر	مفر	مفر
مفر	س ٤	٤٠	٢	٤	١	مفر	١	مفر	مفر
مفر	س ٥	١٠	١	مفر	مفر	١	مفر	مفر	١
دالة الهدف					التكاليف الداخلية				
					صافي التغير				

وقبل ان نواصل استكمال الحل بالجدول المبدئي ،  
فانه يجدر بنا ان نلفت النظر انه يوجد جزء من جسم  
هذا الجدول يتعلق بالمتغيرات الاساسية له تكوين خاص  
يطلق عليه مصفوفة اساسية Basic Matrix ، وهذا  
الجزء هو المحدد بمصفوف المتغيرات الاساسية والاعمدة  
الخاصة بتلك المتغيرات الاساسية ، ففي الجدول السابق  
تظهر تلك المصفوفة الاساسية على الشكل التالي :

س ٣	س ٤	س ٥
١	مفر	مفر
مفر	١	مفر
مفر	مفر	١

ونلاحظ من هذه المصفوفة ان لها خاصية واضحة اذ  
يظهر الرقم (١) في تقاطع صف المتغير الاساسي وعموده ،  
بينما تظهر القيمة مفر فيما عدا ذلك ، وسوف يحدث نفس

كل جدول من جداول تحسين الحل مع اختلاف واضح وهو ان  
اماكن ظهور الرقم (١) او الرقم ( صفر ) ستتغير مع  
التغير الذى سيحدث فى اماكن المتغيرات الاساسية التى  
ستدخل فى الجولات التالية للحل ، ولكن العلاقة  
الثابتة التى لن تتغير فى المعفوفة الاساسية هو أن  
الرقم (١) لابد ان يظهر عند تقاطع صف المتغير الاساسى  
مع عموده ، والصفر يظهر فيما عدا ذلك ، وسوف نستخدم  
هذه الخاصية فى تخطى بعض العقبات التى قد تلحق بحل  
بعض المشاكل بطريقة السمبلكس كما سيظهر فى جزء  
متقدم من هذا الكتاب الى هذا الحد نجد ان الجدول  
المبدئى يحتاج الى بعض العمليات الحسابية لاستكمالها  
وهو ما سيرد ذكره فيما يلى :

### (٢) دالة الهدف Objective Function

الجزء المخصص لدالة الهدف بالجدول سيستعمل لشغله  
بقية دالة الهدف للحل الذى يمثله الجدول ، وعلى  
الرغم من معرفتنا المسبقة بان قيمة دالة الهدف  
بجدول الحل المبدئى هي صفر ، حيث ان قيمة المتغيرات  
القرارية بهذا الجدول تساوى صفر لانه جدول يمثل حالة  
عدم الانتاج ، الا انه يتعين توضيح الكيفية التى يتم  
بها حساب قيمة دالة الهدف عند اى جدول فى اى مرحلة  
من مراحل الحل .

يتم حساب قيمة دالة الهدف للحل الذى يمثله الجدول  
بصفة عامة سواء كان الجدول المبدئى او الجداول  
التالية ، عن طريق ضرب معامل دالة الهدف للمتغيرات  
الاساسية فى قيمة هذا المتغير بذات الجدول ويتم ذلك  
لكل المتغيرات الاساسية ، وبجمع حوامل الضرب لكل  
المتغيرات يكون الناتج هو قيمة دالة الهدف للحل  
الذى يمثله الجدول أى ان :

قيمة دالة الهدف = مج ( معامل دالة الهدف للمتغير

(الاساس) x ( قيمة المتغير الاساسى فى الجدول )

$$= \text{صفر} \times 36 + \text{صفر} \times 40 + \text{صفر} \times 10 = \text{صفر}$$

ويتم تسجيل هذه القيمة فى المكان المخصص لها بالجدول

(٤) التكاليف الداخلة : Entering Costs

أما الصف الذى يوضح التكاليف الداخلة فـفى  
الجدول فانه يمثل الخسارة فى قيمة دالة الهدف  
الحالية والتي تنشأ نتيجة زيادة كل متغير من المتغيرات  
غير الاساسية بوحدة واحدة ، ولتوضيح ذلك نقول أن  
المتغير س ١ هو متغير غير اساسى فى الجدول المبدئى  
ويكون التساؤل هو ماذا لو انتجنا وحدة واحدة من س ١ ،  
بالنظر الى عمود هذا المتغير فى الجدول المبدئى  
سنجد ان الاجابة هى انه اذا فكرنا فى زيادة المتغير  
س ١ بمقدار وحدة واحدة فان ذلك يترتب عليه التخلّى عن  
٣ وحدات من س ٣ ، ووحدين من س ٤ ، ووحدة واحدة من  
س ٥ ، اى ان التضحية او الخسارة التى تحدث فى قيمة  
دالة الهدف والتي تنشأ بسبب زيادة المتغير س ١  
بمقدار وحدة واحدة تساوى مجموع حواصل ضرب كل مسن  
معاملات الاحلال هذه مضروبة فى معامل دالة الهدف المقابل  
لهذه المتغيرات ، اى انها باختصار تساوى مجموع  
حواصل ضرب معاملات العمود الاول x معاملات عمود المتغير  
غير الاساسى .

التكلفة الداخلة لكل متغير = مج ( معامل دالة  
الهدف المتغير الاساسى ) x ( معامل القيد لذلك  
المتغير ) فالتكاليف الداخلة للمتغير س ١ = صفر x ٣ +  
صفر x ٢ + صفر x ١ = صفر .

والتكاليف الداخلة للمتغير س ٢ = صفر x ٢ + صفر x  
٤ + صفر x صفر = صفر .

وهكذا بالنسبة لباقي المتغيرات ، ويتم تسجيل  
القيم التى نحصل عليها فى المكان المخصص لها بالجدول

فى صف التكاليف الداخلة .

(٥) صافى التغير Net Change

والصف الخاص بصافى التغير فانه يسجل الفرق بين قيمة الارباح الداخلة والتكاليف الداخلة لكل عمود من الاعمدة التى تمثل المتغيرات جميعها ، ويتسم الحصول على قيمة صافى التغير لكل عمود عن طريق طرح التكاليف الداخلة والمسجلة فى الصف قبل الاخير من الارباح الداخلة والمسجلة باعلى صف بالجدول ،  
اى ان :

صافى التغير عند اى عمود = ( الارباح الداخلة بالعمود ) - ( التكاليف الداخلة بالعمود ) .  
ولكن ماذا نعى بصافى التغير . او ما هو مغزاه ؟ .

لقد سبق القول انه اذا تم التفكير فى زيادة المتغير غير الاساسى وليكن س ١ بمقدار وحدة واحدة فان ذلك يترتب عليه التخلّى عن ٣ وحدات من س ٣ ، ووحدين من س ٤ ، ووحدة واحدة من س ٥ ، فصافى التغير يعنى اذن محصلة هذا الاحلال ، فزيادة س ١ بمقدار وحدة واحدة سيعطى ارباحا داخلة مقدارها ٧ جنيهات ( وهى معامل س ١ بدالة الهدف ) ولكن سيترتب على ذلك التضحية السابق ذكرها والتى كانت فـ صـ مجموعها بالنسبة للجدول المبدئى = صفر ، اذن صافى التغير كان لصالح هذا الاحلال .

وبانتهاء العمليات الحسابية السابقة نكون قد انتهينا من اعداد الجدول المبدئى للحل الذى سيظهر فى صورته الكاملة على الشكل التالى :



معاملات الهدف للمتغير الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخله	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	صفر	صفر
صفر	٣ س	٣٦	٣	٢	١	صفر	صفر
صفر	٤ س	٤٠	٢	٤	١	صفر	صفر
صفر	٥ س	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخله	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صافى التغير	٧	١٠	صفر	صفر	صفر	صفر

### الخطوة الثانية : اختبار المثالية Checking optimality

الخطوة الثانية والتي تلى اعداد الجدول المبدئى وفقا لخطوات منهج السمبلكس هى اختبار مثالية ذلك الحل الذى يقدمه الجدول المبدئى ، او بمعنى آخر هى الاجابة عن التساؤل التالى : هل الحل الذى يقدمه الجدول المبدئى يمثل حلا امثل ، ام ان هناك امكانية لتحسينه وزيادة قيمة دالة الهدف ؟ ويمكن ان نقوم بذلك الاختبار من خلال مجرد النظر الى القيم الموجودة بالصف الاخير وهى قيم صف صافى التغير ، فلقد سبق القول ان قيمة صافى التغير فى اى عمود تشير الى محصلة عملية الاحلال لوحدة واحدة من المتغير الممثل للعمود ، وعليه فان قيم صافى التغير الموجبه تشير الى ان محصلة عملية الاحلال ستكون فى صالح دالة الهدف اذ انها ستعمل على زيادة قيمتها ، اما القيم السالبة لصافى التغير فانها تعنى ان محصلة عملية

الاحلال فى غير صالح دالة الهدف لانها ستخفض فى قيمتها فى الوقت الذى تسعى فيه الى زيادة وتعظيم دالة الهدف ( ذلك فى مشاكل تعظيم دالة الهدف ) .

وتأسيسا على ذلك فانه يمكن القول كقاعدة عامة " انه طالما وجد ان هناك ولو متغير واحد من كافىة المتغيرات له قيمة صافى تغير موجبه فان ذلك يعنى انه يمكن تحسين الحل ، اى ان الحل الموجود بذلك الجدول لا يمثل الحل الامثل ولكن هناك امكانية تحسينه وعليه فان الجدول الذى يقدم الحل الامثل لابسـد وان يخلو تماما من القيم الموجبة بصف صافى التغير ، وان تكون قيم ذلك الصف اما سالبة و / او صفرية " .

وبتطبيق هذه القاعدة على جدول الحل المبدئى نجد انه لا يمثل جدولا للحل الامثل لانه يتضمن قيمتين موجبتين فى صف صافى التغير وهما ٧ فى عمود المتغير س ١ ، ١٠ فى عمود المتغير س ٢ ، لذلك فاننا يجب ان نسعى للوصول الى حل احسن وبذلك نقوم باعداد الجدول الثانى لتحسين الحل .

#### ملاحظة هامة :

تأخذ بعض المراجع بشكل مختلف الى حد ما فى تصوير جدول السمبلكس مما ينعكس اثره على كيفية اجراء اختبار مثالية الحل ، ولعل القارئ قد يقع فى حيرة عندما يجد ان اختبار المثالية والقاعدة العامة الستى ارتكزنا عليها هنا تختلف عن بعض تلك المراجع بحيث تاتى على عكسها تماما ، والحقيقة انه لا اختلاف فى المنهج والتفكير والاسلوب فى خطوات منهج السمبلكس ، ولكن الاختلاف ينشأ فقط فى ايجاد القيم التى سيتم الحكم من خلالها على اختبار المثالية ، ففى مرجعنا هذا يتم اختبار المثالية من واقع صف صافى التغير الذى حصلنا على قيمه المختلفة من المعادلات التالية :

صافى التغير = الارباح الداخلة - التكاليف الداخلة  
 فى حين ان بعض المراجع الاخرى يتم فيها اختبار  
 المثالية من واقع صف يطلق عليه صف اختبار المثالية  
 او صف ( ك - ر ) اى التكاليف - الارباح اى مستخلص  
 من المعادلة التالية :

$$ك - ر = التكاليف الداخلة - الارباح الداخلة$$

وبمقارنة المعادلتين السابقتين يتضح ان الاختلاف يوجد  
 فى تقديم احدى القيم على الاخرى ، وعليه فان بعض  
 المراجع الاخرى تذكر ( وفقا لطريقة حسابها ) أنه  
 طالما ان صف اختبار المثالية به قيم سالبة فان ذلك  
 يعنى عدم الوصول الى الحل الامثل .

وبناء على التوضيح السابق فانه لا يوجد اختلاف  
 فى المنهج والطريقة ، وان كنا نفضل ما ورد بتحليلنا اذ  
 ان الرقم الموجب يعطى انطباع بان هناك امكانية  
 زيادة الارباح مما يعنى ان الحل غير امثل ( فى مشاكل  
 التعظيم ) وان الرقم السالب يعطى شعور واحساس بان  
 تغيير الحل سترتب عليه تخفيض دالة الهدف ، ولقد  
 كان من الضرورى ذكر هذه الملاحظة حتى لا يقع القارئ  
 فى حيرة اذ كان يتعامل مع اكثر من مرجع تختلف فيما  
 بينها فى القاعدة التى تركز عليها فى اختبار  
 المثالية .

### الخطوة الثالثة : تحسين الحل Improving the Solution

توصلنا من الخطوة السابقة ان الحل الذى بدأنا به  
 وهو الحل المبدئى عند نقطة الاصل لا يمثل الحل الامثل  
 بدليل وجود ارقام موجبة فى صف صافى التغير ، ولذلك  
 لابد من التحرك نحو حل جديد ينقلنا من جدول السمبلكس  
 الاول الى جدول السمبلكس الثانى ويتم ذلك وفقاً  
 للخطوات التالية :

## (١) اختيار المتغير الداخلى Choosing the Entering Variable

تبين من اختبار المثالية بالجدول المبدئى ان هناك متغيرين غير اساسيين لهما قيمة موجبة فى صف صافى التغير وهما المتغير س ١ ، والمتغير س ٢ ، ولقد سبق وان ذكرنا ان قيمة صافى التغير تعنى محصلة عملية الاحلال لوحدة واحدة من المتغير الممثل للعمود ، وان قيم صافى التغير الموجبة تشير الى ان محصلة عملية الاحلال ستكون فى صالح دالة الهدف ، اذن من المنطقى كلما زادت قيمة صافى التغير الموجبة كان ذلك افضل لتحسين دالة الهدف ، وعليه فاننا نختار المتغير الداخلى الذى سيقدم اكبر زيادة فى دالة الهدف للوحدة الواحدة، اى اننا نختار المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير ليكون هو المتغير الداخلى الذى سيدرج ضمن المتغيرات الاساسية فى عمود المتغيرات الاساسية بالجدول الجديد .

وبتطبيق تلك القاعدة على جدول الحل المبدئى يتضح ان اكبر معامل موجب فى صف صافى التغير هو القيمة ١٠ وهى القيمة التى توجد اسفل عمود س ٢ ، لذلك فاننا نختار المتغير س ٢ ليكون هو المتغير الداخلى .

## (٢) اختيار المتغير الخارج Selecting the Departing Variable

لاختيار المتغير الخارج والذى سيحل محله المتغير الداخلى ، فانه ينبغى اختبار القيود المفروضة على قيمة المتغير الداخلى ، وحيث ان المتغير الداخلى سيكون هو المتغير س ٢ وهو لا يوجد الا فى القيود الاولى والثانى لذلك سيكون تركيز الاختبار الذى سنقوم به منصب على القيدان الخاص بالتصنيع والتجميع .

$$١ - \text{ قيد التصنيع } ٣ \text{ س } ١ + ٢ \text{ س } ٢ \geq ٣٦$$

وهذا يعنى ان طاقة قسم التصنيع تسمح بانتاج ١٨ وحدة من س ٢ (  $١٨ = \frac{٣٦}{٢}$  ) .

$$ب - \text{ قيد التجميع } ٢ \text{ س } ١ + ٤ \text{ س } ٢ \geq ٤٠$$



وهذا يعنى ان طاقة قسم التجميع تسمح بانتاج ١٠ وحدات من س ٢ (  $\frac{40}{2}$  ) .

وحيث ان عدد ١٠ وحدات من س ٢ هى اكثر تحديدا من ١٨ وحدة ، لذلك سنجد ان قيد التجميع هو الذى يحدد قيمة المتغير س ٢ فى الحل الجديد ، ومعنى ذلك ان س ٤ والتى تمثل المتغير اتراكذ فى قيد التجميع ستصل الى الصفر بانتاج ١٠ وحدات من س ٢ وطالما انها وصلت الى قيمة صفرية اذن اصبحت متغير غير اساسى لذلك يخرج هذا المتغير الخارج ويحل محله س ٢ المتغير الداخلى .

ولكن كيف يتم اجراء تلك العمليات الحسابية من واقع جدول السمبلكس ؟ سنقوم بتحديد ذلك من خلال قسمة قيم المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئى على المعاملات المقابلة بها بعمود المتغير الداخلى ويكون المتغير الخارج هو صاحب اصغر خارج قسمة موجب وبتطبيق ذلك على مثالنا نجد : ( هذه العملية الحسابية تتم على يسار الجدول ) .

المتغيرات الاساسية	القيم	عمود س ٢ ( الداخلى )	خارج القسمة
س ٢	٣٦	٢	١٨ =
س ٤	٤٠	٤	١٠ =
س ٥	١٠	صفر	∞ =

وعلى ذلك فان المتغير الخارج هو س ٤ لانه صاحب اصغر خارج قسمة .

(٣) تحديد القطب او المفتاح Key or Pivot

ويطلق على القيمة او الرقم الواقع عند تقاطع عمود المتغير الداخلى مع صف المتغير الخارج اسم القطب او المفتاح وهو فى مثالنا هذا يمثل الرقم (٤) .

## (٤) اعداد الجدول الثانى للحل

بعد الانتهاء من اختيار المتغير الداخلى ( س ٢ )  
وتحديد المتغير الخارج ( س ٤ ) يمكننا ان نحدد  
جدول الحل الثانى . وينبغى ان نلاحظ ان بعض عناصر  
الجدول الجديد سوف تكون هي نفسها تماما كما كانت  
بالجدول السابق لذلك يمكن كتابتها مباشرة دون  
انتظار اجراء اى تعديل عليها ، وهذه العناصر هى  
عناوين الاعمدة والصفوف وكذلك معاملات دالة الهدف  
الموجود فى اعلى صف بالجدول امام صف الارباح الداخلى  
اما باقى العناصر فيتم الحصول على قيمها الجديدة من  
خلال بعض العمليات الحسابية كالاتى :

(١) يتم كتابة المتغيرات الاساسية تحت العمود الخاص  
بها بعد التعديلات التى ادخلت عليها وهى اخراج  
المتغير س ٤ ويحل محله المتغير س ٢ ( لا داعى لاعادة  
ترتيب المتغيرات الاساسية ولكن المتغير الداخلى يحل  
محل المتغير الخارج وفى نفس ترتيبه ) ، ثم يتم  
كتابة معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية بالعمود الاول مع  
مراعاة تعديل معامل المتغير الاساسى الجديد ( س ٢ )  
ليصبح ١٠ بدلا من الصفر الذى كان يخص المتغير الخارج  
( س ٤ ) .

(ب) يتم حساب الارقام الجديدة للصف الرئيسى الجديد  
Main Row وهو صف س ٢ لتحل محل قيم صف س ٤  
القديمة بالجدول السابق ، ويتم حساب تلك الارقام  
الجديدة من خلال قسمة القيم المذكورة فى صف المتغير  
الخارج بالجدول السابق على القطب او المفتاح . فالصف  
القديم وهو صف س ٤ كانت ارقامه على الوجه التالى :

س ٤	٤٠	٢	٤	صفر	١	صفر
÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	٤	٤	٤	٤	٤	٤
قيم صف س ٢ فى الجدول الثانى	١٠	$\frac{1}{4}$	١	صفر	$\frac{1}{4}$	صفر

قاعدة : لايجاد قيم عناصر الصف الرئيسى الجديدة للجدول الثانى يتم قسمة جميع القيم القديمة لعناصر المتغير الخارج بالجدول الاول على المفتاح ثم يتم تسجيل هذه القيم الجديدة بالجدول الثانى امام المتغير الاساسى الجديد س ٢ .

(ج) تحسب القيم الجديدة لباقي الصفوف عن طريق تطبيق المعادلة التالية :

القيمة الجديدة = القيمة القديمة - ( القيمة الجديدة المقابلة بالصف الرئيسى الجديد  $\times$  المضاعف ) .

والمضاعف هنا هو عبارة عن القيمة الواقعة عند تقاطع الصف المطلوب حساب قيمه الجديدة مع عمود المتغير الداخلى وذلك بالجدول الاول . اى ان مضاعف صف س ٣ بالجدول الاول هو القيمة (٢) ، ومضاعف صف س ٥ بالجدول الاول هو القيمة صفر .

وفيما يلى توضيح لكيفية حساب القيم الجديدة لباقي الصفوف باستخدام المعادلة السابقة .

الارقام الجديدة للصف س ٣ :

٣٦	-	( ٢ $\times$ ١٠ )	=	١٦
٣	-	( ٢ $\times$ $\frac{1}{4}$ )	=	٢
٢	-	( ٢ $\times$ ١ )	=	صفر
١	-	( ٢ $\times$ صفر )	=	١
صفر	-	( ٢ $\times$ $\frac{1}{4}$ )	=	$\frac{1}{4}$
صفر	-	( ٢ $\times$ صفر )	=	صفر

### الارقام الجديدة للصف س هـ :

$$\begin{array}{rcl}
 10 & - & ( 10 \times \text{صفر} ) = 10 \\
 1 & - & ( \frac{1}{2} \times \text{صفر} ) = 1 \\
 \text{صفر} & - & ( 1 \times \text{صفر} ) = \text{صفر} \\
 \text{صفر} & - & ( \text{صفر} \times \text{صفر} ) = \text{صفر} \\
 \text{صفر} & - & ( \frac{1}{2} \times \text{صفر} ) = \text{صفر} \\
 1 & - & ( \text{صفر} \times \text{صفر} ) = 1
 \end{array}$$

ويلاحظ ان الارقام الجديدة لصف س هـ هي نفسها الارقام القديمة ، والسبب في ذلك ان المضاعف كانت قيمته صفر . لذلك يمكن وضع قاعدة مؤداها " اذا كان معامل المتغير الداخل في صف احد القيود يساوى صفيرا فان معاملات هذا القيد لن تتغير في الجدول الجديد وستظل قيمته على ما هي عليه " .

(د) ايجاد عناصر صف التكلفة الداخلة ، ويتم حسابها بنفس الطريقة التي اتبعناها في الجدول الاول ، اذ نقوم بضرب معامل كل قيد  $\times$  المعامل المقابل بدالفة الهدف للمتغير الاساس ونقوم بجمع النتائج لكل عمود فمثلا بالنسبة للعمود س ا يتم حساب التكلفة الداخلة كالآتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	عمود س ا	
صفر	2	$\times$
10	$\frac{1}{2}$	$\times$
صفر	1	$\times$
التكلفة الداخلة		
	5	=

وعلى نفس المنوال نقوم بحساب التكلفة الداخلة لباقي الاعمدة .



(هـ) ايجاد قيمة دالة الهدف للجدول الثانى :

ويتم ايجاد قيمة دالة الهدف للجدول الثانى بالطريقة التى سبق اعدادها فى الجدول الاول ، اى عن طريق ضرب معاملات الهدف لكل متغير اساسى فى قيم تلك المتغيرات ، ويكون حاصل الجمع هو قيمة دالة الهدف كالاتى :

القيم		معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية
صفر	=	صفر
١٠٠	=	١٠
صفر	=	صفر

قيمة دالة الهدف = ١٠٠

(و) ايجاد قيم صف صافى التغير :

وآخر خطوة لاستكمال الجدول الثانى هو ايجاد قيم صف صافى التغير ، ذلك عن طريق طرح التكاليف الداخلة من الارباح الداخلة كالاتى :

الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
التكاليف الداخلة	٥	١٠	صفر	$\frac{٥}{٢}$	صفر
صافى التغير	٢	صفر	صفر	$\frac{٥}{٢}$	صفر

وبعد اجراء هذه الخطوة يكون قد تم استكمال كافة صفوف واعمدة الجدول الثانى ويظهر على شكله النهائى التالى :

## الجدول الثانى للحل

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	صفر	صفر
صفر	٣ س	١٦	٢	صفر	١	صفر	صفر
١٠	٢ س	١٠	$\frac{1}{4}$	١	صفر	$\frac{1}{4}$	صفر
صفر	٥ س	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	٥	١٠	صفر	$\frac{5}{2}$	صفر	صفر
١٠٠	صافى التغير	٢	صفر	صفر	$\frac{5}{2}$	صفر	صفر

Checking Optimality

رابعاً : اختبار المثالية

بعد الانتهاء من اعداد الجدول الثانى للحل ، يتعين اختبار مثاليته بمعنى الوقوف على ما اذا كان الجدول الثانى يقدم الحل الامثل ام لا ؟ وكما سبق القول فـان هذا الاختبار يتم اجراؤه عن طريق مجرد النظر لقيم صف صافى التغير ، ووفقا للقاعدة نجد ان المتغير غير الاساسى ( س ١ ) هو المتغير الوحيد الذى له معامل موجب فى صف صافى التغير ، وهذا يعنى ان الجدول الثانى للحل هو جدول غير امثل وان هناك امكانية لتحسين الحل وزيادة دالة الهدف باختيار المتغير ( س ١ ) كمتغير داخل ، ولذا يستلزم الامر اعداد جدول ثالث للحل وهذا ما ستقدمه الخطوة التالية :

Improving the  
Solution

خامساً : تحسين الحل - الجدول الثالث

يتم السير فى نفس الخطوات التى سبق ذكرها عند تحسين الحل الوارد بالجدول المبدئى ، والتى وصلنا من خلالها الى الجدول الثانى والذى نحن بصدد تحسينه الان كالاتى :

(١) تحديد المتغير الداخل :

سبق القول انه كقاعدة عامة يعتبر المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير فى الجدول السابق هو المتغير الداخل ، وحيث انه قد ظهر بالجدول السابق متغير واحد له قيمة موجبة بالجدول الثانى وهو المتغير ( س ١ ) . اذن المتغير الداخل هو المتغير ( س ١ ) .

(٢) تحديد المتغير الخارج :

لتحديد المتغير الخارج والذى سيحل محلة المتغير الداخل فى الجدول الثالث ، يتم قسمه قيم المتغيرات الاساسية على المعاملات المقابلة بعمود المتغير الداخل ويكون المتغير ذات اقل خارج قسمة موجب هو المتغير الخارج وتفصيلا فان العمليات الحسابية بهذه الخطوة تتم كالاتى :

المتغيرات الاساسية	القيم	س ١
س ٣	١٦	٢
س ٢	١٠	$\frac{1}{2}$
س ٥	١٠	١

المتغير الخارج =  $\frac{16}{2} = 8$   
 $\frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$   
 $\frac{10}{1} = 10$

وبناء على العمليات الحسابية السابقة سيكون المتغير الخارج هو ( س ٣ ) ، ومعنى ذلك ان المتغير (س ٣) سيحل محل المتغير (س ٢) ، وبذلك ستكون المتغيرات الاساسية بالجدول الثالث هى : س ١ ، س ٢ ، س ٥ ويكون العنصر المحورى ( المفتاح ) الرقم (٢) وهو القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

(٣) تحديد القيم الجديدة لصف المتغير الداخـل  
بالجدول الجديد :

لايجاد هذه القيم يتم قسمة كل معاملات صف س ٣ بالجدول الثانى ( المتغير الخارج ) على المفتـاح وتكون تلك العملية الحسابية كالاتى :

قيم صف س ٣	١٦	٢	صفر	١	$-\frac{1}{4}$	صفر
بالجدول الثانى	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$
المفتاح	٢	٢	٢	٢	٢	٢
قيم صف س ١	٨	١	صفر	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	صفر
بالجدول الثالث						

كذلك ينبغي ملاحظة ان معامل دالة الهدف للمتغير الاساس ( س ٣ ) فى الجدول الثانى كان صفر ، وبدخـول المتغير ( س ١ ) كمتغير اساسى يحل محل ( س ٣ ) سيتم تغيير معامل دالة الهدف ليكون (٧) وهو معامل دالة الهدف للمتغير الداخـل ( س ١ ) .

(٤) ايجاد عناصر باقى القيود بالجدول الجديد :

(أ) القيم الجديدة لصف ( س ٢ ) :

$$10 - = \left( \frac{1}{4} \times 8 \right)$$

$$\frac{1}{4} - = \left( \frac{1}{4} \times 1 \right) \text{ صفر}$$

$$1 - = \left( \frac{1}{4} \times \text{صفر} \right)$$

$$\frac{1}{4} - = \left( \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{3}{8} - = \left( \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \right)$$

$$\text{صفر} - = \left( \frac{1}{4} \times \text{صفر} \right)$$

ويتم كتابة هذه النتائج فى الجدول الثالث باعتبارها عناصر صف ( س ٢ ) الجديدة فى الجدول الثالث .

(ب) القيم الجديدة لصف ( س ٥ ) :

$$10 - = \left( 1 \times 8 \right)$$



$$١ - ( ١ \times ١ ) = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - ( ١ \times \text{صفر} ) = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - ( ١ \times \frac{١}{٣} ) = -\frac{١}{٣}$$

$$\text{صفر} - ( -\frac{١}{٣} \times ١ ) = \frac{١}{٣}$$

$$١ = ( \text{صفر} \times ١ )$$

وتكون هذه القيم هي عناصر صف ( س ٥ ) بالجدول الثالث  
(٥) ايجاد عناصر صف التكلفة الداخلة للجدول الثالث :

ويتم حسابها بنفس الطريقة التي اتبعناها في  
اعداد الجدول الثاني ، وسنعطى مثالا لكيفية حسابها  
لاحد الاعمدة وليكن عمود س ٣ .

معاملات الهدف
٧
١٠
صفر

 $\times$ 

س ٣
$\frac{١}{٣}$
$-\frac{١}{٤}$
$-\frac{١}{٣}$

 $=$ 

$\frac{٧}{٣}$
$-\frac{٥}{٣}$
صفر

التكلفة الداخلة

وهكذا بالنسبة لباقي الاعمدة .

(٦) ايجاد عناصر صف صافي التغير بالجدول الثالث :

وهي تمثل الفرق بين الارباح الداخلة والتكاليف  
الداخلة .

(٧) ايجاد قيمة دالة الهدف بالجدول الثالث :

وهي عبارة عن مجموع حواصل ضرب قيم المتغيرات  
الاساسية  $\times$  معاملات هذه المتغيرات بدالة الهدف .

وبانتهاء الخطوات السابقة يكون قد تم اكمال  
جدول الحل الثالث والذي يظهر على الصورة التالية :

## الجدول الثالث

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
			س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
٧  ١٠ صفر	س ١	٨	١	صفر	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	صفر
	س ٢	٦	صفر	١	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	صفر
	س ٥	٢	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	٧	١٠	١	٢	صفر	صفر
	صافي التغير	١١٦	صفر	صفر	$١ -$	$٢ -$	صفر

سادسا : اختبار مثالية الجدول الثالث :

يمكن ان نلاحظ من الجدول الثالث للحل ان كل عناصر صف صافي التغير اما تساوى صفر او قيما سالبة ، عندئذ نقول ان الجدول الثالث هو جدول الحل الامثل ، وان اى محاولة لزيادة قيمة اى من المتغيرات غير الاساسية ستؤدى الى تخفيض دالة الهدف . لذلك يتعين ان نتوقف عن البحث عن حلول اخرى .

تطبيق محلول :

تنتج شركة كولدير ثلاثة انواع من المنتجات هى اجهزة التكييف ، وافران كهربائية ، ومجففات كهربائية للاستخدامات التجارية ، وقدرت الشركة هامش الربح لكل وحدة من المنتجات السابقة كالآتى :

اجهزة التكييف	٢١٠	جنيه
افران كهربائية	١٧٠	جنيه
مجففات كهربائية	٤٠	جنيه

وتمر تلك الانواع الثلاثة بعمليات انتاجية هـى التصنيع والتجميع والتفتيش ، والجدول التالى يوضح عدد الساعات المطلوبة لانتاج وحدة واحدة من كل انـواع المنتجات الثلاثة بهذه الاقسام .

المنتج	عدد الساعات المطلوبة للوحدة الواحدة .		
	تفتيش	تجميع	تصنيع
اجهزة التكييف	١	٣	٣
الافران الكهربائية	$\frac{٣}{٤}$	٢	٤
المجففات الكهربائية	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

وكانت الساعات المتاحة بكل قسم من الاقسام الثلاثة للاسبوع القادم هى ٣٩٠ ساعة بقسم التصنيع ، ٣٦٠ ساعة بقسم التجميع ، ٢٠٠ ساعة بقسم التفتيش .

### والمطلوب :

استخدام طريقة السمبلكس فى تحديد حجم الانتاج من كل من الانواع الثلاثة من المنتجات والتى تعمل على تعظيم اجمالى هامش الربح .

الحل :

الخطوة الاولى : اعداد الصياغة الرياضية للمشكلة :تعظيم  $210 \text{ س } 1 + 170 \text{ س } 2 + 40 \text{ س } 3 \rightarrow$  اقصى ربح ممكن  
القيود :

$$3 \text{ س } 1 + 4 \text{ س } 2 + 2 \text{ س } 3 \geq 390 \quad (\text{قسم التصنيع})$$

$$3 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 + \frac{1}{4} \text{ س } 3 \geq 360 \quad (\text{قسم التجميع})$$

$$3 \text{ س } 1 + \frac{3}{4} \text{ س } 2 + \frac{1}{2} \text{ س } 3 \geq 200 \quad (\text{قيد التفتيش})$$

$$1 \text{ س } 1, 2 \text{ س } 2, 3 \text{ س } 3 \leq \text{صفر} \quad (\text{عدم السلبية})$$

الخطوة الثانية : تحويل متباينات القيود الى معادلاتبإضافة المتغيرات الراكدة :

$$3 \text{ س } 1 + 4 \text{ س } 2 + 2 \text{ س } 3 + 4 \text{ س } 4 = 390$$

$$3 \text{ س } 1 + 2 \text{ س } 2 + \frac{1}{4} \text{ س } 3 + 5 \text{ س } 5 = 360$$

$$3 \text{ س } 1 + \frac{3}{4} \text{ س } 2 + \frac{1}{2} \text{ س } 3 + 6 \text{ س } 6 = 200$$

الخطوة الثالثة : اعداد الجدول المبدئي للحل :

معاملات دالة الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	210	170	40	صفر	صفر	صفر
		القيم	س 1	س 2	س 3	س 4	س 5	س 6
صفر	س 4	390	3	4	1	1	صفر	صفر
صفر	س 5	360	3	2	$\frac{1}{4}$	صفر	1	صفر
صفر	س 6	200	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر	1
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صافي التغير	210	170	40	صفر	صفر	صفر	صفر

المتغير الداخل



### الخطوة الرابعة : اختبار مثالية الجدول المبدئى :

يتبين من مجرد النظر الى صف صافى التغير انسه يوجد به ثلاثة قيم موجبة ، وهذا يعنى ان جدول الحسب المبدئى غير امثل ، وانه يحتاج الى تحسين ، وبذلك سنتقل الى الخطوة التالية .

### الخطوة الخامسة : اعداد الجدول الثانى لتحسين الحل :

أ - المتغير الداخلى فى الجدول الثانى للحل سيكون هو المتغير س ١ ، وهو المتغير ذات اكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير .

ب - المتغير الخارج سيكون هو المتغير س ٥ ، وهو المتغير ذات اقل قيمة موجبة من خارج قسمة قيم كل متغير اساسى على القيمة المقابلة بعمود المتغير الداخلى ( انظر خارج القسمة على يسار الجدول المبدئى ) .

ج - المفتاح هو الرقم (٣) وهو القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخلى مع صف المتغير الخارج .

د - ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد ( صف المتغير الداخلى س ١ ) وذلك بقسمة جميع ارقام الصف القديم ( صف س ٥ وهو المتغير الخارج ) على المفتاح وبذلك يكون صف س ١ فى الجدول التالى كالاتى :

صف س ٥ فى الجدول المبدئى

٣٦٠	٢	٢	$\frac{1}{3}$	صف س ١	صف
-----	---	---	---------------	--------	----

÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
٣	٣	٣	٣	٣	٣	٣	المفتاح

صف س ١ فى الجدول الثانى

١٢٠	١	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	صف س ١	صف
-----	---	---------------	---------------	--------	----

هـ - ايجاد القيم الجديدة لصف س ٤ فى الجدول الثانى

( المضاعف = ٣ )

$$٢٩٠ = ( ٣ \times ١٢٠ ) - ٣٠$$

$$٣ = ( ٣ \times ١ ) - \text{صفر}$$

$$٤ = ( ٣ \times \frac{٢}{٣} ) - ٢$$

$$١ = ( ٣ \times \frac{١}{٣} ) - \frac{١}{٣}$$

$$١ = ( ٣ \times \text{صفر} ) - ١$$

$$\text{صفر} = ( ٣ \times \frac{١}{٣} ) - ١$$

$$\text{صفر} = ( ٣ \times \text{صفر} ) - \text{صفر}$$

(و) ايجاد القيم الجديدة لصف س ٦ فى الجدول الثانى:

( المضاعف = ١ ) .

$$٢٠٠ = ( ١ \times ١٢٠ ) - ٨٠$$

$$١ = ( ١ \times ١ ) - \text{صفر}$$

$$\frac{٣}{٤} = ( ١ \times \frac{٢}{٣} ) - \frac{١}{١٢}$$

$$\frac{١}{٣} = ( ١ \times \frac{١}{٣} ) - \frac{١}{٣}$$

$$\text{صفر} = ( ١ \times \text{صفر} ) - \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = ( ١ \times \frac{١}{٣} ) - \frac{١}{٣}$$

$$١ = ( ١ \times \text{صفر} ) - ١$$

(ز) ايجاد صف التكاليف الداخلة

ويتم ايجاده عن طريق مجموع حواصل ضرب قيـم

معاملات كل عمود فى قيم معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية

(ح) ايجاد قيم صف صافى التغير .

ويتم ايجاده عن طريق طرح قيم التكاليف الداخلة

من صف الازباج الداخلة .

(ط) ايجاد قيمة دالة الهدف بالجدول الثانى

ويتم ايجادها عن طريق مجموع حواصل ضرب قيـم

المتغيرات الاساسية x معامل دالة الهدف لكل منها .

وبعد اجراء العمليات الحسابية السابقة وتدوينها

بالجدول الثانى فان الجدول الثانى للحل سيظهر على

الوجه التالى :



د - ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد س ٢  
وذلك عن طريق قسمة جميع ارقام الصف القديم ( صف س ٤  
وهو المتغير الخارج ) على المفتاح ، وبذلك يكون  
صف س ٢ فى الجدول الثالث كالاتى :

صف س ٤ فى الجدول الثانى	٣٠	صفر	٢	$\frac{1}{4}$	١	١	صفر
	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$
المفتاح	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢
صف س ٢ فى الجدول الثالث	١٥	صفر	١	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر

هـ - ايجاد القيم الجديدة لصف س ١ فى الجدول الثالث  
= ( المضاعف  $\frac{2}{3}$  )

$$\begin{aligned}
 120 &= ( \frac{2}{3} \times 15 ) - 110 \\
 1 &= ( \frac{2}{3} \times \text{صفر} ) - 1 \\
 \frac{2}{3} &= ( \frac{2}{3} \times 1 ) - \text{صفر} \\
 \frac{1}{4} &= ( \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} ) - \text{صفر} \\
 \text{صفر} &= ( \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} ) - \frac{1}{6} \\
 \frac{1}{3} &= ( \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - ) - \frac{2}{3} \\
 \text{صفر} &= ( \frac{2}{3} \times \text{صفر} ) - \text{صفر}
 \end{aligned}$$

و - ايجاد القيم الجديدة لصف س ٦ فى الجدول الثالث  
: ( المضاعف  $\frac{1}{12}$  )

$$\begin{aligned}
 80 &= ( \frac{1}{12} \times 15 ) - \frac{315}{4} \\
 \text{صفر} &= ( \frac{1}{12} \times \text{صفر} ) - \text{صفر} \\
 \frac{1}{12} &= ( \frac{1}{12} \times 1 ) - \text{صفر} \\
 \frac{1}{3} &= ( \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} ) - \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{صفر} - &= \left( \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{24} \\ \frac{1}{3} - &= \left( \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{24} \\ 1 &= \left( \frac{1}{12} \times \text{صفر} \right) - 1 \end{aligned}$$

ز - ثم يتم ايجاد قيم صف التكاليف الداخلة وكذلك قيمة دالة الهدف وقيم صف صافي التغير . وبعد اجراء العمليات الحسابية السابقة وتدوينها بالجدول الثالث فان جدول الحل الثالث سيظهر بالشكل التالي :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة					
		القيم					
١٧٠	٢ س	صفر	١	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	صفر
٢١٠	١ س	١	صفر	صفر	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	صفر
صفر	٦ س	صفر	صفر	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{7}{24}$	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة					
٢٥٦٥٠		صافي التغير					
		صفر	صفر	صفر	٢٥٠-	٥٠-	٥٥-
		صفر	صفر	١٧٠	٤٢٥	٥٠	٥٥
		صفر	صفر	١٧٠	٤٢٥	٥٠	٥٥

ويتضح من الجدول الثالث للحل انه يمثل جدول الحل

الامثل والذي يتضمن :

انتاج ١١٠ جهاز تكيف تحقق ربحا مقداره ٢٣١٠٠

انتاج ١٥ فرن كهربائي تحقق ربحا مقداره ٢٥٥٠

الارباح القصوى ٢٥٦٥٠

وهذا الكم من الإنتاج سيستغل طاقة قسم التصنيع بكاملها ( س ٤ ) ويستغل طاقة قسم التجميع بكاملها ( س ٥ ) ، ويتبقى طاقة عاطلة بقسم التفتيش ( س ٦ ) مقدارها  $\frac{315}{4}$  (  $\frac{3}{4}$  ٧٨ ساعة ) .

### حل مشاكل تخفيض التكلفة بطريقة السمبلكس

Solving Minimization problems with simplex

تستخدم طريقة السمبلكس أيضا لحل المشاكل التي يكون الهدف فيها تخفيض التكاليف ، وعلى الرغم ان تطبيق طريقة السمبلكس لحل مشاكل تخفيض التكلفة عملية سهلة ولا تحتاج جهد اضافي ، الا انه قد يكون من المفيد ان نقوم باجراء تطبيق لها على تلك النوعية من المشاكل ، لنقف على حقيقة انه يتعين عمل بعض التعديلات لمراحل وخطوات طريقة السمبلكس والتي سبق تطبيقها على مشاكل التعظيم .

ولتسهيل متابعة تناول هذا الموضوع فاننا سنتناول في الجزء التالي تطبيق هذه الطريقة ، على ذات مشكلة تخفيض التكلفة ، والتي سبق حلها في مقدمة هذا الكتاب باستخدام طريقة الرسم البياني ، والخاصة بشركة القاهرة للمنتجات الغذائية ، ولقد تمثلت تلك المشكلة في ان الشركة تريد ان تخفض من تكلفة مزيج القمح والارز ، على ان تحافظ على ما يحتاجه المستهلك من فيتامين (أ) وفيتامين (د) ، وليذكر القارئ اننا قد قمنا بصياغة هذه المشكلة على الوجه التالي :

دالة الهدف تخفيض  $٠٠٠٨ \text{ ر.س} + ٠١٢ \text{ ر.س} ٢$

بشرط ان :

$$٢ \text{ ر.س} + ١ \text{ ر.س} ٢ \leq ١ \quad ( \text{ قيد فيتامين أ} )$$

$$٤ \text{ ر.س} + ١ \text{ ر.س} ٢ \leq ١ \quad ( \text{ قيد فيتامين ب} )$$

$$\text{س} ١ ، \text{س} ٢ \leq \text{مفر} \quad ( \text{ عدم السلبية} )$$

وفيما يلي سنقوم بحل هذه المشكلة باستخدام طريقة

السيمليكس ، والتي تستلزم السير فى خطوات الحل التالية :

### الخطوة الاولى : تحويل متباينات القيود الى معادلات

تبدأ خطوات طريقة السيمليكس بتحويل المشكلة الى صيغة تصلح للحل باستخدام طريقة السيمليكس وذلك بإضافة المتغيرات الراكدة Slack variables لمتباينات المشكلة لتحويلها الى معادلات ، وفى المشكلة السابقة الخاصة بتعظيم الارباح رأينا ان المتغير الراكد يضاف الى الجانب الاقل فى القيد ومن ثم يتحول من متباينة الى معادلة وحيث ان المشكلة التى كنا نعالجها كانت متبايناتها  $( \geq )$  لذلك كنا نضيف المتغيرات الراكدة الى الجانب الايمن منها وهو الجانب الاقل فى القيد ، الا انه بالنظر الى متباينات قيود مشكلة شركة القاهرة للمنتجات الغذائية نجد ان الجانب الاقل هو الجانب الايسر حيث ان المتباينات من النوع  $\leq$  ( اكبر من او يساوى ) ، اذن سنضيف المتغير الراكد الى الجانب الايسر فى كل قيد من القيود المفروضة على دالة الهدف ، وبإضافة المتغيرات الراكدة س ٢ ، س ٤ الى متباينات القيود ستظهر على الصورة التالية :

$$٢س١ + ٥س٢ = ١ + س٣ \quad ( معادلة قيد فيتامين أ )$$

$$٤س١ + ٢س٢ = ١ + س٤ \quad ( معادلة قيد فيتامين د )$$

ويجدر ان نلفت النظر عند هذا الحد ان المتغيرات الراكدة التى اضعناها الى متباينات مشكلة التخفيض تختلف فى معناها عن تلك التى كنا نضيفها الى متباينات مشكلة التعظيم ، فهى فى مشاكل التعظيم كانت بمثابة مقدار الطاقة غير المستغلة فى كل قيد ، اما هنا وفى مشاكل التخفيض فانها تعنى عكس ذلك تماما ، فهى تمثل مقدار الزيادة عن المطلوب لمقابلة الاحتياجات ، ويمكن توضيح هذا المفهوم بوضوح اكثر

إذا عبرنا عن القيدین السابقین فی صورتها العامة  
اللفظية كالآتي :

( الفیتامین المستمد من المتغيرات القرارية ) =  
( الاحتیاجات اليومية من الفیتامین ) + الفیتامین  
الزائد من المتغيرات المضافة ) .

ولكن قد یثار تساؤل وهو لماذا نأخذ فی  
اعتبارنا الحل الذی یمدنا بأكثر من الحد الأدنى  
لاحتیاجات اليومية من الفیتامین فی الوقت الذی نحاول  
فیه ان نحل بالتكاليف الى حدھا الأدنى ؟ ولإجابة علی  
ذلك نقول ان المشكلة التي نعالجها الان بها قیدین  
لاحتیاجات ، وحتى یمکن تحقيق احد القیدین ولیکن قید  
فیتامین (ا) یلزم ان نستخدم قمح وارز أكثر من  
الحاجة لتحقيق قید فیتامین (د) ، وهذا بدوره سیؤدي  
الى وجود زیادة او فائض من فیتامین (د) یزید عن  
الحاجة .

### الخطوة الثانية : اعداد الجدول المبدئي

#### Preparing the Initial Tableau

ان اعداد هذه الخطوة وتنفيذها قد یحتاج اولا ان  
نقف علی بعض المفاهیم العامة التي تساعد علی الفهم  
الصحيح لكيفية اعداد هذا الجدول، لما سیكون بیننا  
وبین الاسلوب الذی اتبع فی مشاكل التعظیم من اختلافات  
فیتعین علینا بداية ان نعين الحل المبدئي الممكن والذی  
سیمثله الجدول المبدئي للحل ، فبالنسبة لمشاكل  
التعظیم وجدنا انه بعد اضافة المتغيرات الراكدة الى  
القيود لم تكن هناك اى صعوبة فی اجراء الخطوة  
الثانية وهي تعیین حل مبدئي ممكن ، اذ كان هذا الحل  
المبدئي الممكن یقع دائما عند نقطة الاصل ، والتي تكون  
فیهما قيم المتغيرات القرارية مساوية للصفر ، وتكون  
المتغيرات الراكدة هي المتغيرات الاساسية ، والتي  
یمکن حساب قيمة كل منها بالتعويض فی معادلات القيود  
بجعل قيم المتغيرات القرارية مساوية للصفر ، عندئذ



نحصل على قيم تلك المتغيرات الراكدة ( المتغيرات الأساسية في الحل المبدئي الممكن ) .

والسؤال الآن الا يمكن ان نقوم بعمل نفس الشيء في مشاكل التخفيض ؟ وبمعنى آخر الا يمكن ان نختار نقطة الاصل كحل مبدئي ونعين قيم المتغيرات الراكدة بمعلومية قيم المتغيرات القرارية المساوية للصفر عند نقطة الاصل ؟ للإجابة على ذلك سنقوم بالسير نفس مفهوم مشاكل التعظيم لنرى مدى امكانية اختيار نقطة الاصل كحل مبدئي في مشاكل التخفيض .

كانت معادلة قيد فيتامين (أ) كالآتي :

$$٢س + ١ = ٢س + ١$$

فاذا اخترنا نقطة الاصل كحل مبدئي ، اذن ستكون قيم كل من س ١ ، س ٢ وهي المتغيرات القرارية مساوية للصفر ، وبالتعويض في تلك المعادلة يكون الناتج :

$$٢س + ١ = ( صفر ) + ( صفر )$$

$$٢س + ١ = صفر$$

$$٢س = -١$$

اي ان المتغير الراكد ( س ٣ ) وهو المتغير الأساسي عند نقطة الاصل يكون متغيرا سالبا .

وكذلك الحال بالنسبة لمعادلة قيد فيتامين (د)

والتي كانت على الصورة التالية :

$$٤س + ١ = ٢س + ١$$

واذا اخترنا نقطة الاصل كحل مبدئي ممكن ستكون قيم المتغيرات القرارية ( س ١ ، س ٢ ) مساوية للصفر، اي ان :

$$٤س + ١ = ( صفر ) + ( صفر )$$

$$٤س = -١$$

اي ان المتغير الراكد ( س ٤ ) وهو متغير أساسي عند نقطة الاصل سيكون متغيرا سالبا، ولمعالجة مشكلة ظهور المتغيرات الراكدة بمعاملات سالبة في الجدول المبدئي للحل فاننا نحتاج الى ان نضيف متغيرا مكمل لكل قيد

يكون فيه المتغير الراكد له قيمة سالبة ، وهذه المتغيرات الجديدة تسمى المتغيرات الوهمية أو المتغيرات الاصطناعية Artificial variables وقد سميت بذلك لأنها تستخدم لتحويل نقطة الاصل الوهمية من نقطة غير ممكنة الى نقطة ممكنة ، واهميتها فقد تكمن فى انها اداة حسابية تسمح بمعالجة نوعين من القيود وهما النوع المتساوى ( معادلات ) والنوع الاكبر من أو يساوى (  $\leq$  ) .

وعلى ذلك يمكن ان نعتبر المتغير الصناعى ( ص ١ ) هو بمثابة المتمم الصناعى الذى يتم وضعه بمعادلة القيد الاول ليمنع ان يأخذ المتغير الراكد ( س ٣ ) قيمة سالبة ، كذلك نعتبر ( ص ٢ ) هو بمثابة المتمم الصناعى الذى يضاف الى معادلة القيد الثانى حتى لا يأخذ المتغير الراكد ( س ٤ ) قيمة سالبة ، وبإضافة تلك المتغيرات الصناعية الى معادلات القيود السابقة تصبح القيود الجديدة على الصورة التالية :

$$٢ر + ١ص + ٥س = ١ + ١ + ٣س$$

$$٤ر + ١ص + ٢ر + ٢س = ٢ + ١ + ٤س$$

وبعد اجراء هذا التحويل نكون قد تمكنا من تحويل نقطة الاصل من نقطة غير ممكنة الى نقطة حل ممكن ، اذ ان منهج السمبلكس سوف يختار المتغيرات الاصطناعية لتكون هى المتغيرات الاساسية المبدئية ( عند نقطة الاصل الوهمية ) ، وستكون المتغيرات القرارية والمتغيرات الراكدة بمثابة متغيرات غير اساسية قيمة كل منها صفر ، وعندئذ تكون قيم المتغيرات الصناعية كالآتى :

$$٢ر + ( صفر ) + ٥ر + ( صفر ) + ١ص = ١ + ( صفر ) + ١$$

$$\therefore ١ص = ١$$

وكذلك الحال بالنسبة لمعادلة القيد الثانى

$$٤ر + ( صفر ) + ٢ر + ( صفر ) + ٢ص = ٢ + ( صفر ) + ١$$

$$\therefore ٢ص = ١$$

وهذا معناه ان نقطة الاصل ( الوهمية ) اصبحت نقطة حل مبدئى ممكن ، فيها قيم المتغيرات الراكدة والوهمية = صفر ، والمتغيرات الصناعية لها قيم موجبة .  
 وهناك مشكلة اخرى ستظهر ويتطلب الامر معالجتها —————  
 ليستقيم الحل بطريقة السمبلكس ، وتتلخص ههههه  
 المشكلة فى انه عندما نقوم باختيار مثالية جدول الحل المبدئى ، فسنجد انه طبقا لقاعدة اختبار المثالية يمثل جدول الحل الامثل ، وذلك لان المتغيرات الصناعية التى اضعناها الى معادلات القيود ليست ممثلة فى دالة الهدف ، ومن ثم ليس لها تكلفة ، وبذلك ظهر الحل فى الحل المبدئى بانه حل امثل لان متغيراته الاساسية ص ١ ، ص ٢ ليس لها تكلفة ، ونحن لا نريد بطبيعة الحال ( وفقا لمنهج السمبلكس ) ان نستبدل احد المتغيرات القرارية والتى لها تكلفة ، بأحد المتغيرات الصناعية والتى ليس لها تكلفة .  
 ومعنى ما تقدم ان اضافة المتغيرات الصناعية لمعادلات القيود وان كان يمكننا من التغلب على مشكلهههه  
 المعاملات السالبة للمتغيرات الراكدة ، الا انه حتى هذا الحد من التحليل لم يمكننا من ان نتغلب على مشكلة عدم التحرك الى نقطة طرفية اخرى افضل من نقطة الاصل .

ولعلاج هذه المشكلة يتعين ان نضيف الى دالة الهدف كل متغير صناعى اضيف لقيود المعاملات . وان تكون لسهه  
 تكلفة بدالة الهدف حتى لا نصطدم بعد عدة جولات للحل انه قد ظهر لنا ثانية متغير صناعى ، احتل مكانا بين المتغيرات الاساسية وهو ما نسعى الى استبعاده كليسهه  
 لانه متغير وهمى وزائف ، اذن يتطلب الامر اضافته الى دالة الهدف وان نحدد له تكلفة مرتفعة جدا حتى لا يدخل مرة اخرى كمتغير أساسى واحد الطرق المناسبة لاجراء ذلك هى ان نحدد تكلفة كل متغير صناعى بقيمة مقدارها

(م) وهي تكلفة مرتفعة جدا وهذا المدخل يسمى طريقة  
(م) الكبرى Big "M" Method ويمكن ان نتترك  
الرمز (م) كمعامل دالة هدف للمتغير الصناعي او ان  
نستبدله بقيمة مرتفعة جدا اذا ما قورنت بمعاملات  
المتغيرات القرارية بدالة الهدف ، وهناك من يفضل  
الالتجاء الى المدخل الثانى ومثلا يجعل فى هذا المثال  
قيمة (م) مائة ملين وهي بذلك تفوق كثيرا جدا قيم  
معاملات الهدف للمتغيرات القرارية .

ولكننا نفضل تجنب العمل باعداد كبيرة تتطلب سب  
عمليات حسابية لا داعى لها ومن ثم سنرمز بالحرف (م)  
للقيمة الكبيرة لمعاملات الهدف للمتغيرات الصناعية  
وبعد اجراء التحويلات السابقة ستظهر المشكلة على  
صورة الصياغة التالية : ( مع ملاحظة اننا جعلنا  
معاملات دالة الهدف قيم صحيحة لتسهيل العمليات  
الحسابية ) .

دالة الهدف تخفيض ٨ س ١ + ١٢ س ٢ + م ص ١ + م ص ٢  
معادلات القيود

$$٢ر س ١ + ٥ر س ٢ - ٢ س ٣ + ١ ص ١ = ١$$

$$٤ر س ١ + ٢ر س ٢ - ٢ س ٤ + ١ ص ٢ = ١$$

وبذلك سيأخذ الجدول المبدئى للحل الشكل التالى  
( سنحول دالة الهدف من جنيها الى مليارات ) .

الجدول المبدئى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٨	١٢	صفر	صفر	م	م
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	ص ١	ص ٢
م م	ص ١ ص ٢	١ ١	٢ر ٤ر	٥ر ٢ر	١- صفر	صفر ١ -	١ صفر	صفر ١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية	٦ر م	٧ر م	م -	م -	م	م
٢ م	صافى التغير	٨-٦ر م	١٢-٧ر م	م	م	صفر	صفر	صفر

$$\frac{١}{٨} = \frac{١}{٨}$$

متغير داخل



### الخطوة الثالثة : اختبار مثالية الجدول المبدئى

يلاحظ ان التكاليف قد بلغت فى جدول الحل المبدئى (٢ م) وهى تكاليف عالية جدا ، كما يتضح ان قيمة صافى التغير تختلف بين الزيادة والنقصان من عمود لآخر بالنسبة للمتغيرات غير الاساسية ، وحيث أننا نهدف الى تخفيض التكاليف لذلك فان الحل سيكون غير امثل طالما وجد ان هناك متغير او اكثر من المتغيرات غير الاساسية له قيمة سالبة فى صف صافى التغير ( على عكس مشاكل تعظيم الارباح ) ، لان الحل الامثل يحدث عندما نجد ان كل قيم صف صافى التغير اما صفرية او موجبة .

وتطبيقا للقاعدة السابقة فان الجدول المبدئى السابق لا يمثل الحل الامثل لان صف صافى التغير يشير الى انه فى الامكان تخفيض اجمالى التكاليف عن طريق اختيار اى من المتغيرين س ١ ، س ٢ كمتغير داخل حيث ان صافى تغير اى منها يمثل قيمة سالبة ( لاحظ أننا ذكرنا قبل ذلك ان قيمة م كبيرة جدا ) . لذلك يتطلب الامر تحسين الحل واختيار نقطة طرفية اخرى .

### الخطوة الرابعة : تحسين الحل

ويسير تحسين الحل فى نفس الخطوات التى سبق توضيحها فى مشكلة التعظيم وهى كالاتى :

(١) تعيين المتغير الداخلى : ان الخطوة الاولى فى تحسين الحل هى تعيين المتغير الداخلى ، والقاعدة فى اختيار المتغير الداخلى لمشاكل التخفيض هى عكس ما اتبعناه عند حل مشاكل التعظيم ، فحيث أننا نحاول تخفيض التكاليف ، لذلك فإننا سنختار المتغيرات ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير كمتغير داخلى

وبالنظر الى صف صافى التغير يتبين ان القيمتين السالبتين هما : ( ٨ - ٦ ر م ) و ( ١٢ - ٧ ر م ) ، وحيث ان ( ١٢ - ٧ ر م ) هو العدد الاكبر باشارة سالبة فى صف صافى التغير لذلك فان س ٢ هو المتغير الداخلى ( يمكن ان تفرض قيمة كبرى لقيمة م ولتكن ١٠٠ حتى تساعدك على تحديد القيمة السالبة الاكبر ) .

$$٨ - ( ٦ ر م \times ١٠٠ ) = ( ٨ - ٦٠ ) = ٥٢$$

$$١٢ - ( ٧ ر م \times ١٠٠ ) = ( ١٢ - ٧٠ ) = ٥٨$$

(٢) تعيين المتغير الخارج : بنفس الطريقة التى اتبعناها فى مشاكل التعظيم ، فالمتغير الخارج هو المتغير ذات اقل خارج قسمة لقيم المتغيرات الاساسية على المعاملات المقابلة بعمود المتغير الداخلى ، وقد اجريت تلك العملية الحسابية على يسار الجدول المبدئى ، ويتضح منها ان خارج القسمة الاقل يقابل المتغير ص ١ ، ومن ثم فانه يعتبر المتغير الخارج .

(٣) تحديد قيمة المفتاح : والقيمة (مر) هى المفتاح حيث انها القيمة التى تقع عند تقاطع عمود المتغير الداخلى مع صف المتغير الخارج .

(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيس الجديد ( صف

المتغير الداخلى س ٢ ) .

صف ص ١ فى ١ ٢ ر م ١ - صف ١ صف

الجدول المبدئى

÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
مر	مر	مر	مر	مر	مر	مر	المفتاح

صف س ٢ فى ٢ ٤ ر ١ - صف ٢ صف

الجدول الثانى

(٥) ايجاد القيم الجديدة للصف ص ٢ فى الجدول الثانى

( المضاعف = ٢ر )

$$\begin{aligned}
 ١ - &= ( ٢ \times ٢ر ) = ٦٠ر \\
 ٤ر - &= ( ٤ \times ٢ر ) = ٣٢ر \\
 ٢ر - &= ( ١ \times ٢ر ) = \text{صفر} \\
 \text{صفر} - &= ( ٢ - \times ٢ر ) = ٤٠ر \\
 ١ - &= ( \text{صفر} \times ٢ر ) = ١ر \\
 \text{صفر} - &= ( ٢ \times ٢ر ) = ٤ر \\
 ١ - &= ( \text{صفر} \times ٢ر ) = ١
 \end{aligned}$$

(٦) ولايجاد باقى القيم بالجدول كدالة الهدف وقيم صف التكاليف الداخلة ، وكذلك قيم صف صافى التغير ، سنتبع نفس الطريقة التى اتبعت فى حل مشكلة تضخيم الارباح .

(٧) تصوير الجدول الثانى للحل . ( يلاحظ انه يمكن اسقاط عمود ص ١ ( المتغير الخارج ) من الجدول الثانى للحل . او يمكن الابقاء عليه لانها متغيرات صناعية بخروج احدهما كمتغير خارج نقوم بحذفه من الجدول لانه قد ادى المطلوب منه فى تسهيل الحل ولا داعى لاستمراره وهذا ما فعلناه عند اعداد الجدول الثانى للحل تسهيلا للعمليات الحسابية ) .

الجدول الثانى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٨	١٢	صفر	صفر	م
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	ص ٢
١٢	س ٢	٢	٤ر	١	٢ -	صفر	صفر
م	ص ٢	٦ر	٣٢ر	صفر	٤ر	١ -	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	٤٨ +	١٢	٢٤ -	م -	م
		صافى التغير	٣٢ -	صفر	٢٤ -	م	صفر
			٣٢ر		٤ر		

واذا اعتبرنا ان قيمة م هي ١٠٠ ( كقيمة كبرى ) ،  
ستكون قيمة دالة الهدف ٨٤ في حين كانت بالجدول الاول  
٢٠٠ أى ان الحل يتجه نحو التحسين وهذا يؤكد صحة ما  
قمنا به من خطوات .

### الخطوة الخامسة : اختبار مثالية الجدول الثانى

وبفحص صف صافى التغير بالجدول الثانى نجد ان كلا  
من المتغيرين س ١ ، س ٣ لهما قيم صافى تغير سالبة  
ومعنى ذلك ان الجدول الثانى لا يمثل الحل الامثل ولكن  
يتعين تحسينه .

### الخطوة السادسة : تحسين الحل الوارد بالجدول الثانى

(١) تحديد المتغير الداخلى : ان الاختيار سينحصر بين  
كلا من المتغيرين س ١ ، س ٣ وهما اللذان لهما قيمـا  
سالبة فى صف صافى التغير ، وحيث ان المتغير الداخلى هو  
ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير، لذا  
يكون المتغير الداخلى هو المتغير س ١ . ويمكن حساب  
ذلك كالآتى بفرض ان قيمة م كبرى = ١٠٠

$$س١ = ٣٢ - ٣٢ \times ١٠٠ = ٣٢ - ٣٢٨ = -٢٨٨$$

$$س٣ = ٢٤ - ٤٠ \times ١٠٠ = ٢٤ - ٤٠٠ = -١٦$$

وبذلك يكون المتغير س ١ هو المتغير الداخلى .

(٢) تحديد المتغير الخارج : من نواتج خارج القسمة  
على يسار الجدول الثانى يتضح ان المتغير الخارج هو  
ص ٢ لانه ذات اقل خارج قسمة ( ١٨٧٥ ) .

(٣) تعيين المفتاح : والمفتاح هو القيمة ( ٣٢ ) وهى  
القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخلى مع صف  
المتغير الخارج .



(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد ( صف  
المتغير س ١ )

صف ص ٢ فى	٦ر	٣٢ر	صفر	٤ر	١-	١
الجدول الثانى	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	٣٢	٣٢ر	٣٢ر	٣٢ر	٣٢ر	٣٢ر
صف س ١ فى	٨٧٥ر١	١	صفر	٢٥ر١	٥-٢٥ر٣	٥ر٢١٣
الجدول الثالث						

(٥) ايجاد القيم الجديدة للصف س ٢ فى الجدول الثالث  
( المضاعف = ٤ر )

$$\begin{aligned}
 ٢ - &= ( ٤ر \times ٨٧٥ر١ ) = ٢٥ر١ \\
 ٤ر - &= ( ٤ر \times ١ ) = \text{صفر} \\
 ١ - &= ( \text{صفر} \times ٤ر ) = ١ \\
 ٢- - &= ( ٤ر \times ٢٥ر١ ) = ٥-٢٥ر٣ \\
 \text{صفر} - &= ( ٤ر \times ٥-٢٥ر٣ ) = ٢٥ر١
 \end{aligned}$$

(٦) ولايجاد باقى القيم بالجدول ، كقيمة دالة الهدف  
وقيم صف التكاليف الداخلة ، وكذلك قيم صف صافى  
التغير سنتبع نفس الطريقة التى اتبعت فى الانتقال من  
الجدول المبدئى الى الجدول الثانى .

(٧) تصوير الجدول الثالث للحل . مع ملاحظة استبعادنا  
للمتغير الصناعى ص ٢ .

## الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٨	١٢	صفر	صفر
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س
١٢	٢ س	١٢٥ ر	صفر	١	٢٥ ر	١٢٥ ر
٨	١ س	٨٧٥ ر	١	صفر	١٢٥ ر	٣١٢٥ ر
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٨	١٢	٢٠	١٠	
٣٠	صافى التغير	صفر	صفر	٢٠	١٠	

وحيث ان صف صافى التغير بالجدول الثالث لا يحتوى على قيم سالبة ، فاننا بذلك نكون قد وصلنا الى الحل الامثل ويتمثل فى ان تكون نسبة المزج بين الارز والقمح هى :

$$١٨٧٥ \text{ ارز} : ١٢٥ \text{ قمح}$$

$$٣ : ٢$$

وهى نفس القيمة التى توصلنا اليها باستخدام الطريقة البيانية .

تمرين محلول :

اوجد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية التى امكن وضع صياغتها على الشكل المبسط التالى :

$$\text{دالة الهدف تخفيض } ٦ \text{ س } ١ + ١٠ \text{ س } ٢$$

بشرط ان :

$$١٠٠ \geq ١ \text{ س } ١ + ٥ \text{ س } ٢$$

$$٢٠ \geq ١ \text{ س } ١$$

$$١٦ = ١ \text{ س } ١ + ٢ \text{ س } ٢$$

$$\text{صفر} \leq ١ \text{ س } ١ , ٢ \text{ س } ٢$$

الحل :

الخطوة الاولى : تحويل متباينات القيود الى معادلات

يلاحظ ان القيود الواردة على دالة الهدف فى المثال السابق تشتمل على متباينات من النوع (  $\leq$  ) اكبر او يساوى ، ومن النوع (  $\geq$  ) اقل من او يساوى بالاضافة الى معادلة ، وعلى ذلك تبدأ طريقة السمبلكس بتحويل المتباينات الى معادلات وبالنسبة للمتباينة من النوع الاول (  $\leq$  ) فاننا نقوم باضافة متغيرا راكدا مطروحا ( س ٢ ) ومتغيرا اصطناعيا موجبا ( ص ١ ) وعلى ذلك تكون المتباينة بعد تحويلها الى معادلة فى الصورة التالية :

$$١٠ \text{ س } ١ + ٥ \text{ س } ٢ - ٣ \text{ ص } ١ = ١٠٠$$

ولتحويل المتباينة س ١  $\geq ٢٠$  الى معادلة يضاف اليها المتغير الراكد فقط وبذلك تصبح بعد تحويلها الى معادلة كالاتى :

$$٢٠ = ١ \text{ س } + ٤ \text{ س } ٢$$

اما المعادلة الثالثة فيضاف اليها المتغير الاصطناعى ( ص ٢ ) وبذلك تكون على الشكل التالى :

$$١٦ = ١ \text{ س } + ٢ \text{ س } ٢ + ٢ \text{ ص } ٢$$

ويتعين ان يتم تمثيل المتغيرات الاصطناعية بدالة الهدف ، ولضمان استبعادها من الحل الامثل تعطى لتلك المتغيرات وزنا كبيرا فى صورة رمز معين وليكن الرمز ( م ) ، ولكننا سبق وان وجدنا ان استخدام رمز ليعبر عن القيمة الكبيرة للمتغيرات الاصطناعية يعقد العمليات الحسابية ، ولذلك سنفترض قيمة رقمية كبيرة بالمقارنة بتلك المعاملات الواردة بدالة الهدف وهى ( ١٠ ، ٦ ) لذلك سنفترض ان تلك القيمة الكبيرة هى ١٠٠ .

وبناءً على ما تقدم فإنه بعد إجراء التعديلات السابقة تكون المشكلة على الوجه الآتى :

دالة الهدف تخفيض ٦ س ١ + ١٠ س ١ + ١٠٠ ص ١ + ١٠٠ ص ٢  
المعادلات :

$$١٠٠ = ١٠ س ١ + ٥ س ٢ - ٣ ص ١ + ١ ص ٢$$

$$٢٠ = ٤ س ١ + ١ س ٢$$

$$١٦ = ١ س ١ + ٢ س ٢ + ٢ ص ١$$

الخطوة الثانية : اعداد الجدول المبدئى للحل

ويتم اعداده وفق الطريقة المعتادة لمنهج السمبلكس وسيظهر الجدول المبدئى للحل على الصورة التالية :

الجدول المبدئى

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٦	١٠	صفر	صفر	١٠٠	١٠٠
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	١ ص	٢ ص
١٠٠	١ ص	١٠٠	١٠	٥	١-	صفر	١	صفر
صفر	٤ س	٢٠	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر
١٠٠	٢ ص	١٦	١	١	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١١٠٠	٦٠٠	١٠٠-	صفر	١٠٠	١٠٠	١٠٠
١١٦٠٠	صافى التغير	١٠٩٤-	٥٩٠-	١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر

$$١٠ = \frac{١٠٠}{١٠}$$

$$٢٠ = \frac{٢٠}{١}$$

$$١٦ = \frac{١٦}{١}$$

متغير داخل :



### الخطوة الثالثة : اختيار مثالية الحل بالجدول المبدئي

بالنظر الى صف صافي التغير بالجدول المبدئي يتبين ان هناك قيم صافي تغير سالبة ، وهذا يعنى وفقا لقاعدة الامثلية ، ان الجدول المبدئي لا يقدم الحل الامثل ولكنه يحتاج الى تحسين ، وهذا يقودنا الى الخطوة الرابعة .

### الخطوة الرابعة : تحسين الحل

وكما هو معتاد تسير خطوات تحسين الحل كما يلي :

(١) تعيين المتغير الداخل : سيتم اختيار المتغير س ١ كمتغير داخل لانه ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافي التغير بالجدول المبدئي .

(٢) تحديد المتغير الخارج : سيكون المتغير الخارج هو المتغير الاصطناعى س ١ حيث انه يمثل اقل خارج قسمة كما هو مبين على يسار الجدول المبدئي .

(٣) تحديد المفتاح . القيمة (١٠) هي قيمة المفتاح وهي القيمة الواقعة عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد ( صف المتغير الداخل س ١ ) .

صف ص ١	فسى	١٠٠	١٠	٥	١-	صف صفر	١	صف صفر
الجدول المبدئي	÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷	÷
المفتاح	÷	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠
صف س ١	فسى	١٠	١	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	صف صفر	$\frac{1}{10}$	صف صفر
الجدول الثانى								

(٥) ايجاد القيم الجديدة لباقي الصفوف :

(أ) القيم الجديدة للصف ٤ في الجدول الثاني  
( المضاعف = ١ ) .

$$\begin{aligned}
 20 &= ( 1 \times 10 ) - 10 \\
 1 &= ( 1 \times 1 ) - \text{صفر} \\
 \text{صفر} &= ( 1 \times \frac{1}{2} ) - \frac{1}{2} \\
 \text{صفر} &= ( 1 \times \frac{1}{10} - \frac{1}{10} ) \\
 1 &= ( 1 \times \text{صفر} ) - 1 \\
 \text{صفر} &= ( 1 \times \frac{1}{10} ) - \frac{1}{10} \\
 \text{صفر} &= ( 1 \times \text{صفر} ) - \text{صفر}
 \end{aligned}$$

(ب) القيم الجديدة للصف ٢ في الجدول الثاني  
( المضاعف = ١ ) .

$$\begin{aligned}
 16 &= ( 1 \times 10 ) - 6 \\
 1 &= ( 1 \times 1 ) - \text{صفر} \\
 1 &= ( 1 \times \frac{1}{2} ) - \frac{1}{2} \\
 \text{صفر} &= ( 1 \times \frac{1}{10} - \frac{1}{10} ) \\
 \text{صفر} &= ( 1 \times \text{صفر} ) - \text{صفر} \\
 \text{صفر} &= ( 1 \times \frac{1}{10} ) - \frac{1}{10} \\
 1 &= ( 1 \times \text{صفر} ) - 1
 \end{aligned}$$

(٦) ولايجاد باقي قيم الجدول كدالة الهدف ، وقيم صف التكاليف الداخلة ، وكذلك قيم صف صافي التغير ، سنتبع نفس الاسلوب المعتاد لطريقة السمبلكس .

(٧) تصوير الجدول الثاني للحل ويلاحظ ايضا اننا سنسقط منه عمود ص ١ وهو المتغير الخارج حيث لا داعى لوجرده لانه قد ادى المطلوب منه في تسهيل الحل .

## الجدول الثانى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية				القيم	ص	ص	ص	ص
		٦	١٠	صفر	صفر	١٠٠				
٦	١ ص	١٠	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	٤ ص	١٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
١٠٠	٢ ص	٦	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	٦	٥٢	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٦٦٠	صافى التغير	صفر	٤٢-	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر

المتغير الداخل

الخطوة الخامسة : اختبار مثالية الجدول الثانى

بفحص صف صافى التغير بالجدول الثانى يتبين أن هناك قيم صافى تغير سالبة ، وهذا يعنى ان الجدول الثانى لا يقدم الحل الامثل ولكن يحتاج الى تحسين وهذا ما سنفعله فى الخطوة التالية .

الخطوة السادسة : تحسين الحل

وتسير اجراءات تحسين الحل كما يلى :

- (١) تعيين المتغير الداخل : سيتم اختيار المتغير ( ٢ ص ) كمتغير داخل فى الجدول الثالث ، لانه ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير كما هو واضح بالجدول الثانى .

(٢) تحديد المتغير الخارج : سيكون المتغير الخارج هو

المتغير الاصطناعي ص ٢ حيث انه يمثل اقل خارج قسمة

كما هو مبين على يسار الجدول الثانى

(٣) تحديد المفتاح : وتمثل القيمة  $(\frac{1}{4})$  نقطة تقاطع

عمود المتغير الداخلى مع صف المتغير الخارج ، وعليه

فانها تمثل قيمة المفتاح .

(٤) ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد ( صف

المتغير الداخلى س ٢ )

صف ص ٢ فى	٦	صفر	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	صفر	١
الجدول الثانى						
	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
المفتاح						
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
صف س ٢ فى	١٢	صفر	١	$\frac{1}{5}$	صفر	٢
الجدول الثالث						

(٥) ايجاد القيم الجديدة لباقي الصفوف

(أ) القيم الجديدة للصف س ١ فى الجدول الثالث

( المضاعف  $\frac{1}{4}$  ) .

$$\begin{aligned}
 10 &= ( \frac{1}{4} \times 12 ) - 4 \\
 1 &= ( \frac{1}{4} \times \text{صفر} ) - 1 \\
 \frac{1}{4} &= ( \frac{1}{4} \times 1 ) - \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{10} &= ( \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} ) - \frac{1}{10} \\
 \text{صفر} &= ( \frac{1}{4} \times \text{صفر} ) - \text{صفر} \\
 \text{صفر} &= ( \frac{1}{4} \times 2 ) - 1
 \end{aligned}$$

(ب) القيم الجديدة للصف س ٤ فى الجدول الثالث

( المضاعف  $\frac{1}{4}$  ) .

$$\begin{aligned}
 10 &= ( \frac{1}{4} - \times 12 ) - 16 \\
 \text{صفر} &= ( \frac{1}{4} - \times \text{صفر} ) - \text{صفر}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{صفر} &= \left( \frac{1}{2} - x \right) - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} &= \left( \frac{1}{2} - x \right) - \frac{1}{10} \\ 1 &= \left( \frac{1}{2} - x \right) - \text{صفر} \\ 1 &= \left( \frac{1}{2} - x \right) - \text{صفر} \end{aligned}$$

(٦) ولايجاد باقى قيم الجدول ، وهى دالة الهدف ، وصف التكاليف الداخلة ، وقيم صافى التغير ، نتبمع الاسلوب المعتاد .

(٧) تصوير الجدول الثالث للحل ، ويلاحظ كذلك اننا اسقطنا فى ذلك الجدول عمود ص ٢ لانه متغير خارج وادى مهمته فى تسهيل الحل .

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	١٠	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤
٦	س ١	٤	١	صفر	١/٥ -	صفر
صفر	س ٤	١٦	صفر	صفر	١/٥ -	١
١٠	س ٢	١٢	صفر	١	١/٥ -	صفر
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٦	١٠	٤/٥	صفر	صفر
١٤٤	صافى التغير	صفر	صفر	٤/٥ -	صفر	صفر

المتغير الداخلى

### الخطوة السابعة : اختبار مثالية الجدول الثالث

على الرغم من ان قيمة دالة الهدف قد انخفضت الى ١٤٤ جنيه في الجدول الثالث بعد ان كانت ٦٦٠ جنيه بالجدول الثاني ، اى ان الحل بالجدول الثالث كان افضل من الحل بالجدول الثاني ، الا انه مع ذلك لا يعتبر جدول الحل الامثل ، اذ ما زال صف صافى التغير بالجدول الثالث به قيمه سالبة للمتغير س ٣ وهذا يعنى ان الجدول الثالث لا يقدم الحل الامثل ولكن يتعين العمل لمزيد من تحسين الحل .

### الخطوة الثامنة : تحسين الحل واعداد الجدول الرابع

- (١) المتغير الداخل هو المتغير س ٣
- (٢) المتغير الخارج هو المتغير س ٢
- (٣) المفتاح هو  $\frac{1}{5}$
- (٤) القيم الجديدة للصف الرئيسى الجديد (صف المتغير الداخل س ٣ )

صف س ٢ فى	١٢	صفر	١	$\frac{1}{5}$	صفر
الجدول الثالث	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$	$\div$
المفتاح	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
صف س ٢ فى	٦٠	صفر	٥	١	صفر
الجدول الرابع					

(٥) القيم الجديدة لباقي الصفوف

- (١) القيم الجديدة للصف س ١ فى الجدول الرابع
- (المضاعف =  $\frac{1}{5}$  )

$$\begin{aligned}
 ٤ - &= ( \frac{1}{5} - \times ٦٠ ) \\
 ١ - &= ( \frac{1}{5} - \times \text{صفر} ) \\
 \text{صفر} - &= ( \frac{1}{5} - \times ٥ ) \\
 -\frac{1}{5} - &= ( \frac{1}{5} - \times ١ ) \\
 \text{صفر} - &= ( \frac{1}{5} - \times \text{صفر} )
 \end{aligned}$$

- (ب) القيم الجديدة للصف س ٤ فى الجدول الرابع

( المضاعف  $\frac{1}{5}$  ) .

$$\begin{aligned}
 16 &= \left( \frac{1}{5} \times 60 \right) - 4 \\
 \text{مفر} &= \left( \frac{1}{5} \times \text{مفر} \right) - \text{مفر} \\
 \text{مفر} &= \left( \frac{1}{5} \times 5 \right) - 1 \\
 \frac{1}{5} &= \left( \frac{1}{5} \times 1 \right) - \text{مفر} \\
 1 &= \left( \frac{1}{5} \times \text{مفر} \right) - 1
 \end{aligned}$$

(٦) ثم يتم حساب باقى قيم الجدول وهى دالة الهدف ،  
التكاليف الداخلة ، صافى التغير وسيظهر جدول الحل  
الرابع على الشكل التالى :

الجدول الرابع

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة			
		القيم			
٦	س ١	١	١	١٠	مفر
مفر	س ٤	١ -	مفر	٢	س ٢
مفر	س ٣	٥	مفر	١	مفر
دالة الهدف		٦	٦	٦	مفر
٩٦		٤	مفر	٤	مفر
		التكاليف الداخلة			
		صافى التغير			

وواضح من الجدول الرابع انه جدول الحل الامثل ،  
وبذلك يكون الحل الامثل هو س ١ = ١٦ ، س ٢ = ٢ ، مفر = ٠ .  
وتصل التكلفة الى ادنى حد لها ، اذ تبلغ ٩٦ جنيهاً

## معالجة بعض الحالات الخاصة فى حل نماذج البرامج الخطية :

فى بعض الاحيان وعند حل مشاكل البرمجة الخطية ، تظهر بعض الحالات الخاصة ، ونظرا لاهمية مواجهة وحل هذه المشاكل فاننا سنستعرض فيما يلى كيفية التى يتم بها التعامل مع تلك الحالات الخاصة ، وقد اخترنا امثلة لغرض التوضيح وراعيانا ان تكون بسيطة وسهلة وفى نفس الوقت يمكن حلها ببيانيا وبطريقة السمبلكس حتى تكون الفائدة اعم اذ ستظهر تلك الحالات فى الرسم البيانى على شكل يختلف عن شكل ظهورها فى طريقة السمبلكس ، مما يستوجب التعرف على شكل ظهورها فى الاسلوبين ، والحالات الخاصة التى سنتناولها هى :

- أولا : حالة تعدد الحلول المثلى .
  - ثانيا : حالة الحل غير المحددة .
  - ثالثا : حالة ان الحل الممكنة غير موجودة .
  - رابعا : حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول .
  - خامسا : حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج .
- وفىما يلى توضيحا لكيفية التعامل مع تلك الحالات الخاصة .

### أولا : حالة تعدد الحلول المثلى :

وكما هو واضح من طبيعة هذه الحالة الخاصة فى البرامج الخطية فانها تفيد انه لا يوجد حل امثل واحد لمشكلة البرمجة الخطية كما تعودنا على ذلك فى كافة التطبيقات التى تم حلها ، ولكن تظهر عند حل بعض مشاكل البرامج الخطية ، سواء كان اسلوب الحل الطريقة البيانية ام طريقة السمبلكس ، ان هناك عدة حلول مثلى للمشكلة وتعطى جميعها نفس قيمة دالة الهدف وحتى يمكن معرفة ابعاد طبيعة مشكلة البرمجة الخطية التى تنتابها هذه الظاهرة سنفترض مشكلة البرمجة الخطية التالية :



الصياغة الرياضية للمشكلة

دالة الهدف تعظيم س ١ + ٢ س ٢ ————— أقصى  
ربح ممكن بشرط ان :

$$\begin{aligned} 24 &\geq 2 \text{ س } ٢ + ١ \text{ س } ١ \\ 18 &\geq 2 \text{ س } ٢ + ١ \text{ س } \frac{3}{2} \\ 10 &\geq 1 \text{ س } ١ \\ 11 &\geq 2 \text{ س } ٢ \\ ١ \text{ س } ١ &\leq 2 \text{ س } ٢ \text{ صفر} \end{aligned}$$

وفيما يلي نقوم بحل هذه المشكلة بالطريقة  
البيانية وبطريقة السمبلكس وسنبداً بالطريقة البيانية :

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باهمـال

الاشارة ( > ) .

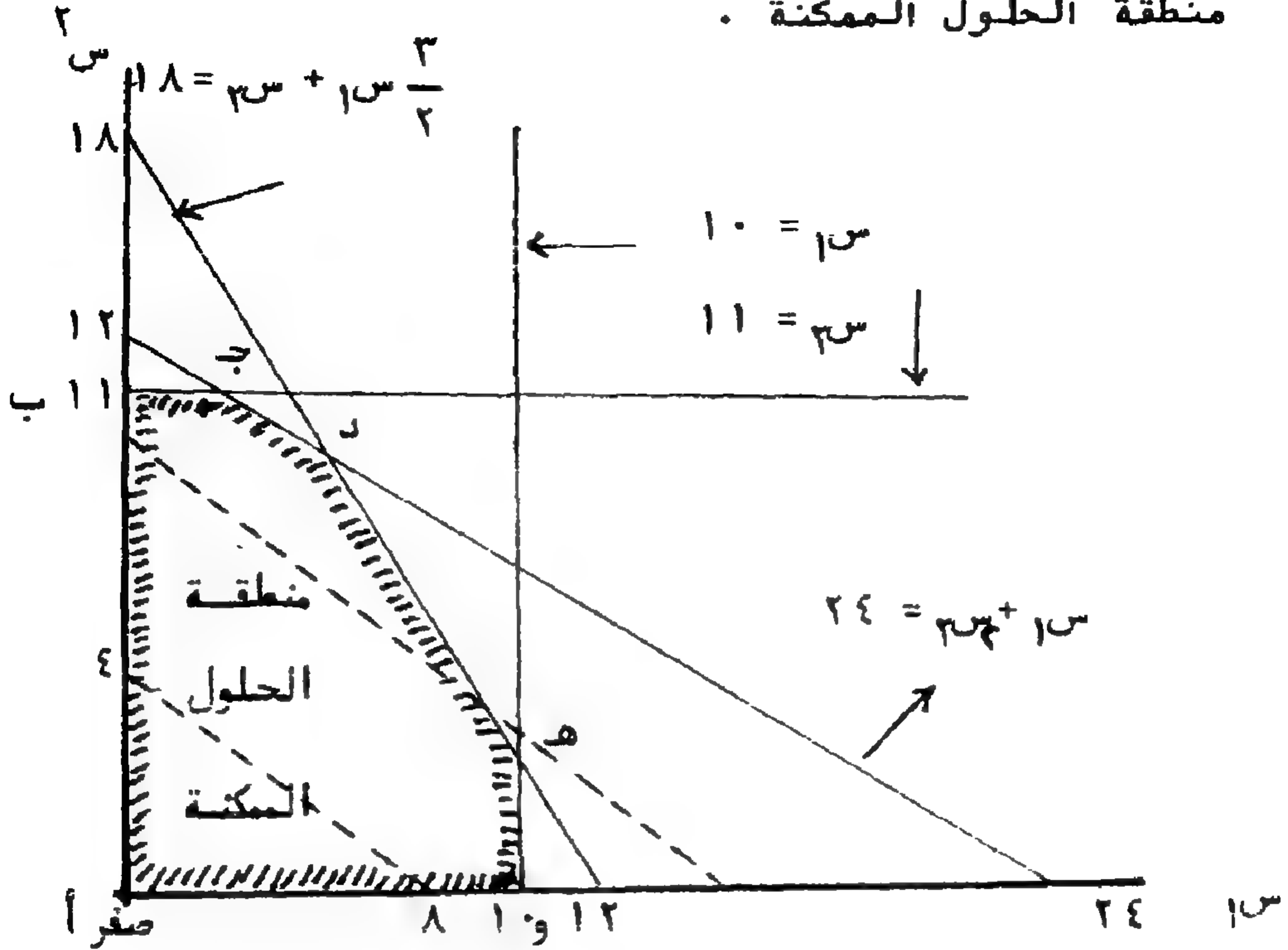
$$\begin{aligned} 24 &= 2 \text{ س } ٢ + ١ \text{ س } ١ \\ 18 &= 2 \text{ س } ٢ + ١ \text{ س } \frac{3}{2} \\ 10 &= 1 \text{ س } ١ \\ 11 &= 2 \text{ س } ٢ \end{aligned}$$

(٢) التمثيل البياني للمعادلات

(١) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة

معادلات القيود		احداثى النقطة الاولى		احداثى النقطة الثانية
		نقطة ان س ١ = صفر	نقطة ان ٢ س ٢ = صفر	نقطة ان ٢ س ٢ = صفر
٢٤ = ٢ س ٢ + ١ س ١	صفر	١٢	٢٤	صفر
١٨ = ٢ س ٢ + ١ س ١	صفر	١٨	١٢	صفر
١٠ = ١ س ١	—	∞	١٠	صفر
١١ = ٢ س ٢	صفر	١١	∞	—

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البياني وتحديد منطقة الحلول الممكنة .



ومن هذا الشكل يتضح ان منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة أ ب ج د هـ ، ويمكن تعيين نقطة الحل الأمثل باستخدام طريقة خط الربح المتساوي ، فإذا اخترنا قيمة لدالة الهدف ولتكن ٨ حيث ان هذا الرقم يقبل القسمة على معاملات دالة الهدف كما انه يمثل كمية انتاج تقع بمنطقة الحلول الممكنة فان الخط المتقطع الاول بالشكل البياني يمثل دالة الهدف  $٨ = ٢س + ١ب$  ثم نقوم برسم خطوط متوازية لهذا الخط ( كما هو موضح بالشكل ) في اتجاه زيادة قيمة دالة الهدف ، وبالتحرك لاعلى حتى نصل الى اعلى نقطة لتكون هي نقطة الحل الأمثل التي تعطي بقيمة دالة الهدف الى حدها الاقصى ، سنجد ان حافة المسطرة سوف تنطبق تماما مع خط المعادلة  $٢٤ = ٢س + ١ب$  ، ومعنى ان خط الربح المتساوي منطبق على هذا الخط ان اي نقطة على هذا الخط في حدود منطقة الحلول الممكنة يعتبر حلاً أمثل ، اي ان هذه المشكلة لها حلول مثلى متعددة .

وعمرهما سنجر ب ذلك ليقف القارىء على تلك الحقيقة واضحة . ان النقطتين د ، ج يقعان على خط المعادلة  $س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤$  وفى نفس الوقت من حدود منطقة الحل الممكنة ، ان ذلك يعنى ان كلا من النقطتين د ، ج يمثل حلا امثلا بل والاكثر ان اى نقطة واقعة بينهما على نفس الخط يعتبر حلا امثلا ايضا . وسنجر ب الان قيمة دالة الهدف عند النقطتين ج ، د .

قيمة دالة الهدف عند النقطة ج : لحساب قيمة دالة الهدف عند النقطة (ج) يتعين :

أولا : ان نحسب اقيم كل من س ١ ، س ٢ عند تلك النقطة ويتم ذلك عن طريق حل المعادلتين

$$س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤$$

$$س ٢ = ١١$$

وبالتعويض بقيمة س ٢ فى المعادلة الاولى نحصل على قيمة س ١

$$س ١ + ١١ \times ٢ = ٢٤$$

$$س ١ = ٢٤ - ٢٢$$

$$س ١ = ٢$$

اى ان النقطة ج تمثل س ١ = ٢ ، س ٢ = ١١  
 . قيمة دالة الهدف عند النقطة ج  $= ١١ \times ٢ + ٢ \times ١ = ٢٤$  جنيه .

قيمة دالة الهدف عند النقطة (د)

النقطة (د) هى نقطة تقاطع معادلة القيد الاول

$$(س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤)$$

ومعادلة القيد الثانى  $(\frac{٣}{٢} س ١ + س ٢ = ١٨)$

اذن عن طريق حل هاتين المعادلتين آنيا نحصل على احدائى تلك النقطة كالاتى :

$$(١) \quad س ١ + ٢ س ٢ = ٢٤$$

$$(٢) \quad \frac{٣}{٢} س ١ + س ٢ = ١٨$$

$$(٣) \quad ٢٦ = ٢ س ٢ + س ١$$

وبطرح (١) من (٣)

$$\begin{aligned} \therefore 12 &= 2 \text{ س } 1 \\ \therefore 6 &= \frac{12}{2} = 1 \text{ س } 1 \end{aligned}$$

وبالتعويض بتلك القيمة في المعادلة الاولى نحصل على  
قيمة س ٢

$$24 = 2 \text{ س } 2 + 6$$

$$6 - 24 = 2 \text{ س } 2$$

$$9 = \frac{18}{2} = 2 \text{ س } 2$$

∴ احداثى النقطة (د) هو (٩ ، ٦) .

وبذلك تكون قيمة دالة الهدف عند النقطة (د) هي

$$24 = 9 \times 2 + 6 \times 1 \text{ جنيه}$$

وبمقارنة قيمة دالة الهدف عند النقطة (د) بقيمتها

عند النقطة (ج) نجد انها متماثلة وتساوى ٢٤ جنيه ،

وهذا يعنى ان النقطتين (د) ، (ج) نقطتان للحل الامثل

ليس هذا فقط بل وكافة النقاط الواقعة بينهما على خط

المعادلة الاولى كلها تمثل حولا مثلى وبنفس القيمة

دالة الهدف اى هناك تعدد فى الحلول المثلى .

وقد يكون من المفيد ايضا فى هذا المكان ان نبرز شكل

تلك الحالة اذا ما تم حلها باستخدام اسلوب السمبلكس

### (١) الصياغة الرياضية للمشكلة :

تعظيم س ١ + ٢ س ٢ ← اقصى ربح ممكن

بشرط ان

$$24 \geq 2 \text{ س } 2 + 1 \text{ س } 1$$

$$18 \geq 2 \text{ س } 2 + \frac{2}{3} \text{ س } 1$$

$$10 \geq 1 \text{ س } 1$$

$$11 \geq 2 \text{ س } 2$$

$$\text{صفر} \geq 2 \text{ س } 2 + 1 \text{ س } 1$$



(٢) تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة

المتغيرات الراكدة :

$$\begin{aligned}
 24 &= 3س + 2س + 1س \\
 18 &= 4س + 2س + 1س \\
 10 &= 5س + 1س \\
 11 &= 6س + 2س
 \end{aligned}$$

(٣) اعداد جداول الحل وصولا للحل الامثل :

الجدول المبدئي :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	١	٢	صفر	صفر	صفر	صفر
		القيم	١س	٢س	٣س	٤س	٥س	٦س
صفر	٣س	٢٤	١	٢	١	صفر	صفر	صفر
صفر	٤س	١٨	$\frac{2}{3}$	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	٥س	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١	صفر
صفر	٦س	١١	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافى التغيير	١	٢	صفر	صفر	صفر	صفر

المتغير الداخل

الجدول الثاني :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية					
		القيم		١	١	صفر	صفر
صفر	٣ س	٢	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	٤ س	٧	$\frac{٢}{٣}$	صفر	صفر	١	صفر
صفر	٥ س	١٠	١	صفر	صفر	صفر	١
٢	٦ س	١١	صفر	١	صفر	صفر	صفر
دالة الهدف		التكاليف الداخلية		صفر	٢	صفر	صفر
٢٢		صافي المتغير		١	صفر	صفر	٢-

↑  
المتغير الداخل

الجدول الثالث :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية					
		القيم		٢	١	صفر	صفر
١	١ س	٢	١	صفر	١	١	صفر
صفر	٤ س	٤	صفر	صفر	صفر	$\frac{٣}{٢}$ -	صفر
صفر	٥ س	٨	صفر	صفر	صفر	١-	٢
٢	٦ س	١١	صفر	١	صفر	صفر	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلية		١	٢	١	صفر
٢٤		صافي المتغير		صفر	صفر	١-	صفر

↑  
متغير داخل

وباختبار مثالية الجدول الثالث نجد ان جميع قيم صف صافي المتغير اما صفرية او سالبة اي انه يمثل جدول الحل الامثل . ولكن هنا يثار تساؤل الا يمكن ان يكون هناك حل امثل آخر ؟ للإجابة على هذا التساؤل نقول انه اذا اردنا ان نعدل في الحل الوارد بالجدول الثالث ونسير الى جدول رابع وهذا يتطلب تعيين متغير داخل من المتغيرات غير الاساسية ليصبح متغير غير اساسي . نحن نعلم ان لدينا في هذه المشكلة ستة متغيرات كما هو واضح من الجدول الثالث اربعة منها اساسية واثنين غير اساسية وهما :

المتغيرات الاساسية هي : س<sub>١</sub> ، س<sub>٤</sub> ، س<sub>٥</sub> ، س<sub>٦</sub>

المتغيرات غير الاساسية هي : س<sub>٣</sub> ، س<sub>٧</sub>

فاذا اردنا تعديل الحل بالجدول الثالث يتعيّن اختيار س<sub>٣</sub> أو س<sub>٧</sub> ليصبح متغير داخل اي ينتقل من حالته غير الاساسية ليصبح متغير اساسي . ولكن أيهما نختار ؟

بالنظر الى قيمة صافي المتغير لكل منهما نجد انه بالنسبة للمتغير غير الاساسي س<sub>٣</sub> ( - ١ ) وهذا يعنى ان اختيار هذا المتغير سيؤدي الى تخفيض دالة الهدف وهذا عكس ما هو مطلوب اما قيمة صافي المتغير للمتغير س<sub>٧</sub> ( صفر ) فان ذلك يعنى انه يمكن ان يدخل في الحل دون اي تغير في قيمة دالة الهدف وهذا هو المطلوب . والجدول الرابع يقدم هذا التعديل .

## الجدول الرابع :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية					
		القيم	١	٢	صفر	صفر	صفر
١ صفر صفر ٢	١ س ٦ س ٥ س ٢ س	٦ ٢ ٤ ٩	١ صفر صفر صفر	صفر صفر صفر ١	$-\frac{1}{4}$ $-\frac{2}{4}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{4}$	١ $\frac{1}{2}$ ١- $-\frac{1}{4}$	صفر صفر ١ صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية	١	٢	١	صفر	صفر
	٢٤	صافى التغير	صفر	صفر	١-	صفر	صفر

وبمقارنة قيمة دالة الهدف بالجدول الرابع نجد  
انها نفس قيمة دالة الهدف بالجدول الثالث اى ان المشكلة  
التي عالجنها لها اكثر من حل امثل ويعطى نفس قيمة  
دالة الهدف فقيمة المتغيرات القرارية كانت فى كل من  
الجدولين كالاتى :

القيمة بالجدول الرابع	القيمة بالجدول الثالث	المتغيرات القرارية
٦	٢	١ س
٩	١١	٢ س
٢٤ جنيه	٢٤ جنيه	قيمة دالة الهدف

وقبل ان نترك هذه الحالة نود ان نلفت النظر  
الى انه يجدر ملاحظة التماثل بين دالة الهدف والقيود  
الاول ، وهذا معناه انه عند رسم خط الربح المتساوى  
سوف ينطبق على معادلة القيد الاول ، وعلى ذلك عندما



تكون دالة الهدف هي نفسها احد القيود عند كتابته على صورة معادلة ، فاننا نحصل على حلول مثلى متعددة.

ولعل معرفة الادارة ومتخذي القرارات بان المشكلة التى بين ايديهم لها عدة حلول مثلى يمكنهم من حرية الحركة والمرونة والمقارنة والملاءمة وفى وضع افضل لمقابلة اى تعديلات او ظروف طارئة . اذ بدل ان يفرض حل واحد قد تعترضه بعض المعوقات اثناء التنفيذ تكون الادارة قادرة على الاختيار من بين تلك الحلول المثلى وفقا للموقف الذى يستدعى اتخاذ القرار؛ لذلك يتعين عند حل مشكلة برمجة خطية ان نقف على الحل او الحلول المثلى ولا يكتفى بحل واحد بحجة ان جميعها سواء لانها تحقق نفس الربحية فترشيد اتخاذ القرارات الادارية يتطلب مزيدا من المرونة وهذا ما يوفره تعدد الحلول المثلى .

### ثانيا : حالة الحلول غير المحددة :

يحدث فى بعض الاحيان عند حل احدى مشاكل البرمجة الخطية ان نجد ان الحلول المثلى غير محددة ولا يمكن تعيينها بسهولة ، وهذه الحالة تشير الى حقيقة ان قيمة دالة الهدف يمكن ان تزيد بدون حدود وذلك فى حالة مشاكل التعظيم او تقل قيمتها فى حالة مشاكل المتخفيض بدون حدود ، ويحدث هذا سواء كنا نتبع اسلوب الرسم البيانى فى الحل او طريقة السمبلكس ، ولتوضيح هذه الحالة سنفترض المثال التالى :

مثال : أوجد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية والتى تم اعداد صياغتها الرياضية على الوجه التالى :

۲۰	۷	۴	۱	۴	۱
۸۰	۷	۲	۱	۸	۱
صفر	۷	۰	۱		۱

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باهمـنـال

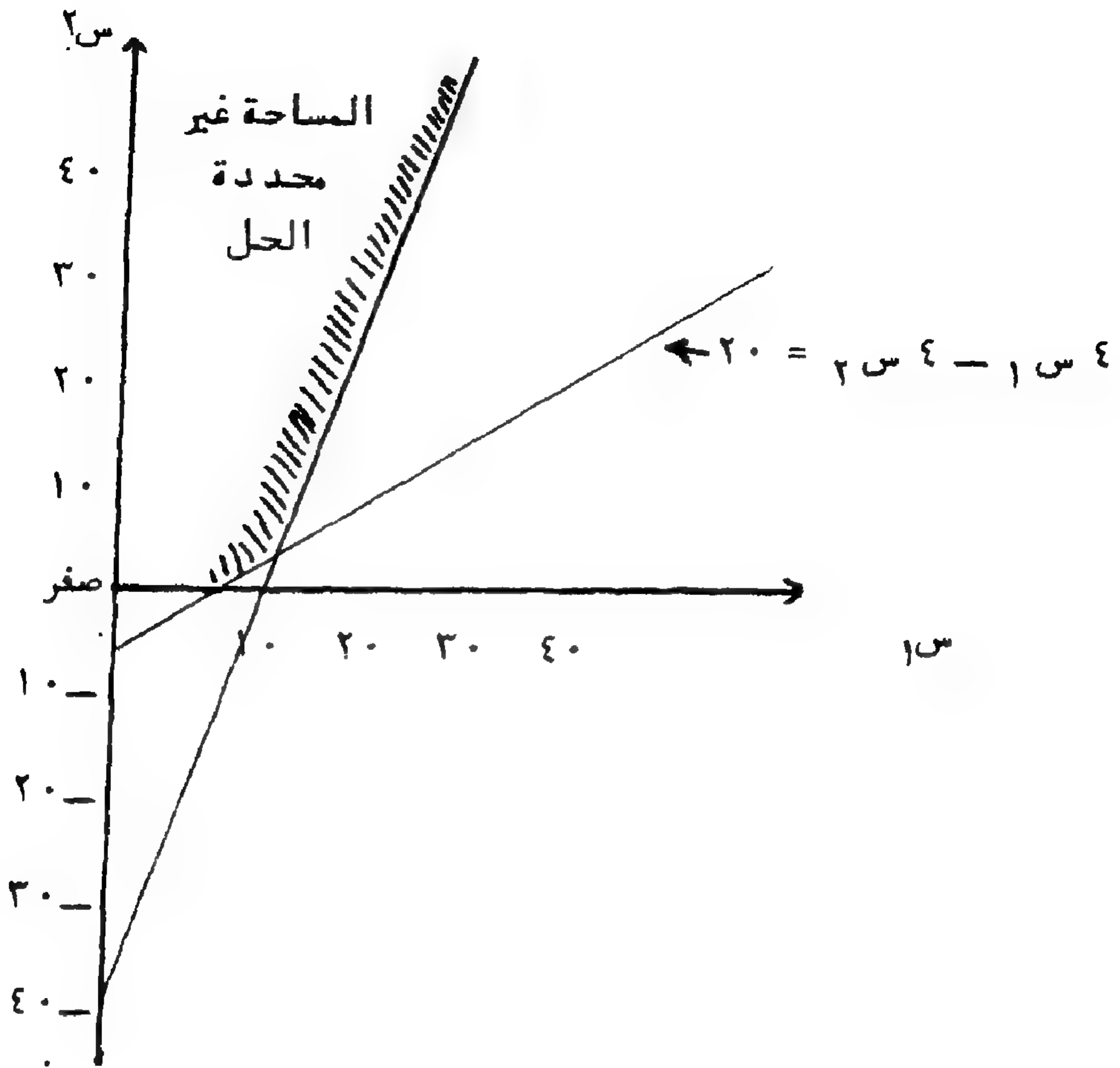
$$\begin{array}{lcl} 20 & = & 4 \text{ س } 1 - 2 \text{ س } 4 \\ 80 & = & 8 \text{ س } 1 - 2 \text{ س } 2 \end{array}$$

(أ) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة

معادلات القيسود		احداثى النقطة الاولى		احداثى النقطة الثانية	
بفرض س <sub>١</sub> =	اذن س <sub>٢</sub> =	بفرض س <sub>١</sub> =	اذن س <sub>٢</sub> =	بفرض س <sub>٢</sub> =	اذن س <sub>١</sub> =
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٤ س <sub>١</sub> - ٤ س <sub>٢</sub> = ٢٠	٨ س <sub>١</sub> - ٢ س <sub>٢</sub> = ٨٠	صفر	صفر	٥ -	٥
		صفر	صفر	٤٠ -	٢٠

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البيانى وتحديد

• **منطقة الحلول الممكنة**



ومن هذا الرسم البياني يتضح ان منطقة الحلول الممكنة هي مساحة غير محددة الحل ومن ثم فان الحل في هذه الحالة لتلك المشكلة غير محدد ، ولعل هذا الوضع ناشئ من انه يلاحظ من القيود بتلك المشكلة ان المتغير  $S_1$  يمكن ان تزيد قيمته بدون حدود وهذا معناه صعوبة تحديد حل معين .

وفيما يلي نتناول حل ذات المشكلة باتباع طريقة السمبلكس لنتعرف على شكل جداول الحل وكيف تظهر المشكلة بان حلها غير محدد ومن ثم نتوقف عن المزيد من اجراءات تحسين الحل .

(١) الصياغة الرياضية للمشكلة

دالة الهدف تعظيم ١٢ س<sub>١</sub> + ٦ س<sub>٢</sub> ← أقصى ربح  
ممکن بشرط ان :

$$\begin{array}{rcl} 20 & \geq & 4 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 \\ 80 & \geq & 8 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 \\ \text{صفر} & \leq & \text{س}_1 \end{array}$$

(٢) تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة

$$\begin{array}{rcl} 20 & = & 4 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 + \text{س}_3 \\ 80 & = & 8 \text{ س}_1 - 2 \text{ س}_2 + \text{س}_4 \end{array}$$

(٣) اعداد الجدول المبدئي للحل :

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٢	٦	صفر	صفر
		القيم	س <sub>١</sub>	س <sub>٢</sub>	س <sub>٣</sub>	س <sub>٤</sub>
صفر	س <sub>٣</sub>	٢٠	٤	٤ -	١	صفر
صفر	س <sub>٤</sub>	٨٠	٨	٢ -	صفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صافي المتغير	١٢	٦	صفر	صفر	صفر

↑  
المتغير الداخل



ويجب من الجدول المبدئي ان الحل غير امثل  
ولذا سيتم تحسينه في الجدول الثانى

(٤) الجدول الثانى للحل

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	١٢	٦	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤
١٢	س ١	٥	١	١ -	$\frac{1}{4}$	صفر
صفر	س ٤	٤٠	صفر	٦	٢ -	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلية	١٢	١٢ -	٣	صفر
٦٠		صافى التغير	صفر	١٨	٣ -	صفر

المتغير الداخل

(٥) الجدول الثالث للحل

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	١٢	٦	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤
١.٢	س ١	$\frac{25}{3}$	١	صفر	$\frac{1}{12}$ -	$\frac{1}{6}$
٦	س ٢	$\frac{20}{3}$	صفر	١	$\frac{1}{3}$ -	$\frac{1}{6}$
دالة الهدف		التكاليف الداخلية	١٢	٦	٢ -	٣
١٤ -		صافى التغير	صفر	صفر	٢	٣ -

ونلاحظ من الجدول الثالث انه مازالت قيمة صافي التغير للمتغير غير الاساسي  $s_3$  موجبة وهذا يعنى امكانية تحسين الحل ، باختيار  $s_3$  متغير داخل ، على الرغم من خروجه قبل ذلك عند الانتقال من الجدول الثانى ، وحتى لو سرنا فرضا فى الحل وفقا للقاعدة العامة لطريقة السمبلكس واخترنا  $s_3$  متغير داخل فعند تحديد المتغير الخارج سنجد ان خارج القسمة للمتغيرات الاساسية قيما سالبة ( كما هو موضح على يسار الجدول الثالث وهنا لا يمكن اختيار ايهما حيث ان القاعدة ان المتغير الخارج هو اقل خارج قسمة موجب وحيث لا يوجد خارج قسمة موجب فان الحل يتوقف .

وكان من الممكن ملاحظة ان هذا سيحدث لهذه المشكلة وان الحل غير محدد وذلك اذا ما نظرنا الى عمود  $s_3$  بالجدول المبدئى فاننا نلاحظ ان معاملات هذا العمود اما سالبة او صفرا وهذا يعنى ان قيمة  $s_3$  غير محدودة وان دالة الربح تزيد بلا حدود .

ولكن هل يعنى ما قدمناه فى الجزء السابق ان مشكلة البرمجة الخطية غير محددة المساحة للحل لا يمكن ان نصل فى حلها الى حل امثل ، الحقيقة ان الاجابة بنعم على هذا التساؤل امر غير صحيح اذ ان هناك مشاكل لها مساحة غير محددة الحل ولكن يمكن الوصول الى حل امثل لها . ان ذلك يتوقف على شكل دالة الهدف الخاصة بتلك المشكلة . اذن يمكن القول بعقبة عامة انه لا يمكن الادعاء بان مشاكل البرمجة الخطية والتي تتصف بان منطقة الحلول الممكنة لها غير محددة المساحة ليس لها حل امثل ولكن ذلك يتوقف على الشكل الذى تكون عليه دالة الهدف ، ويمكن التحقق من ذلك بمثال تطبيقي

مثال :

اوجد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية التي  
تم صياغتها على الوجه التالي :  
دالة الهدف : تعظيم  $z = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow$  اقصى ربح ممكن  
بشرط ان :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\leq \text{صفر} \end{aligned}$$

الحل البياني :

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات عن طريق  
اهمال الاشارة (  $>$  )

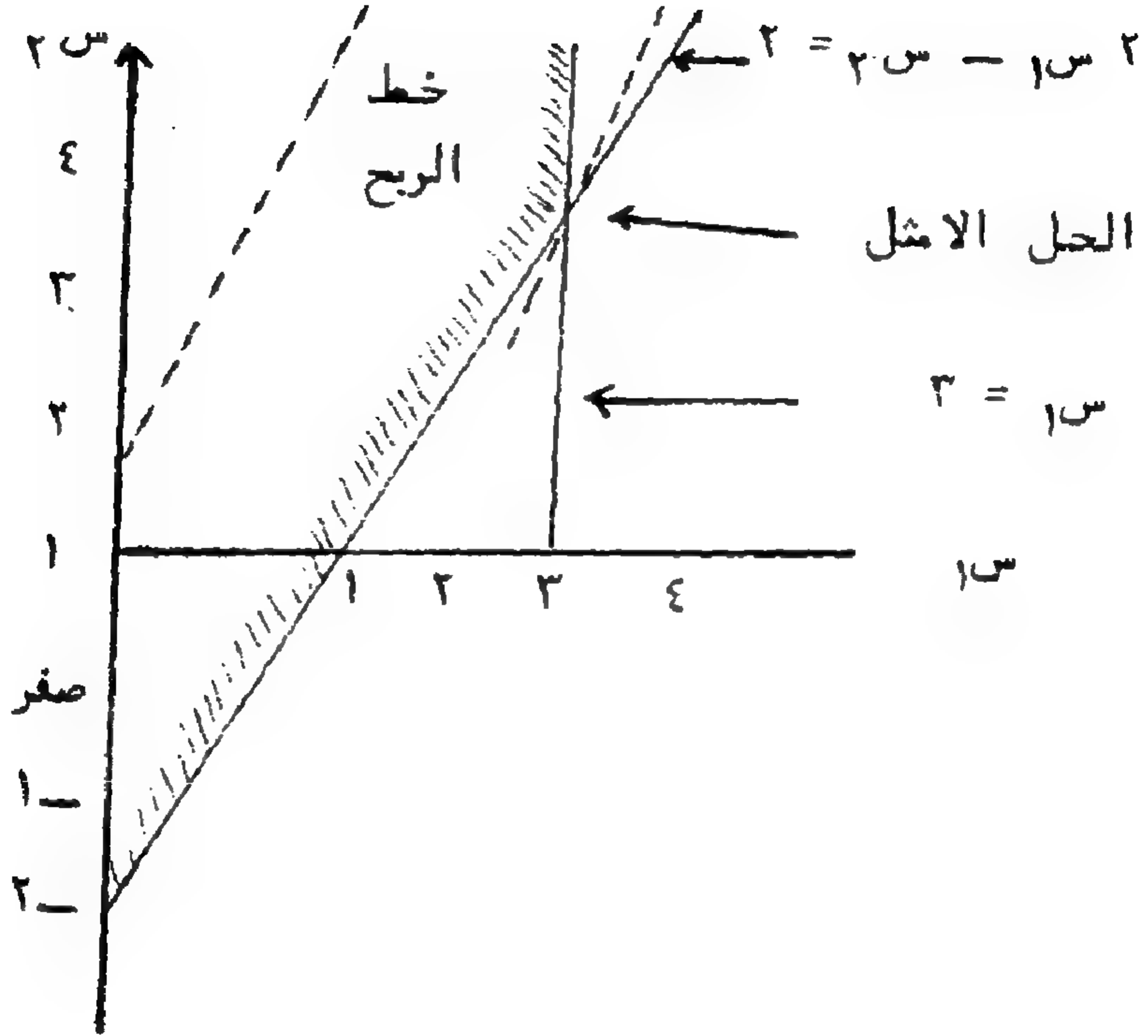
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

(٢) التمثيل البياني للمعادلات

(أ) ايجاد الاحداثيات الخاصة بكل معادلة .

معادلات القيود		احداثى النقطة الاولى		احداثى النقطة الثانية	
		بفرض ان $x_1 = 0$	اذن $x_2 = 2$	بفرض ان $x_2 = 0$	اذن $x_1 = 3$
$2x_1 - x_2 = 2$		صفر	$2 -$	صفر	١
$x_1 = 3$		صفر	$\infty$	صفر	٣

(ب) تمثيل الاحداثيات على الرسم البياني وتحديد منطقة الحلول الممكنة .



ويثبت ان الحل الامثل هو نقطة تقاطع خطى المعادلتين، وذلك على الرغم من ان المساحة التي تمثل منطقة الحلول الممكنة غير محددة . والحل الامثل من هذا الشكل هو :

$$\begin{aligned} S_1 &= 3 \\ S_2 &= 2 \end{aligned}$$

وتصل الارباح الى اقصى حد لها اذ تبلغ ٥ جنيه .

الحل بطريقة السمبلكس :

وفيما يلي حل المشكلة السابقة باستخدام طريقة السمبلكس وذلك لتحديد الحل الأمثل في حالة وجود منطقة حلول ممكنة غير محددة .

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة .

$$\begin{aligned} 2 &= 3s_1 + 2s_2 - s_3 \\ 3 &= s_4 + s_5 \end{aligned}$$

(٢) اعداد الجدول المبدئي للحل :

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٣	١-	صفر	صفر
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س
صفر	٣ س	٢	٢	١-	١	صفر
صفر	٤ س	٣	١	صفر	صفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر	صافي التغير	٣	١-	صفر	صفر	صفر

متغير داخل





## (٤) الجدول الثالث للحل

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الأرباح الداخلية	٣	١-	صفر	صفر
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س
٣	١ س	٣	١	صفر	صفر	١
١ -	٢ س	٤	صفر	١	١-	٢
دالة الهدف		التكاليف الداخلية	٣	١-	١	١
٥		صافي التغير	صفر	صفر	١-	١-

ويمثل الجدول الثالث جدول الحل الأمثل وهو نفس الحل الذي توصلنا اليه من خلال حل المشكلة بالطريقة البيانية .

### ثالثا : حالة أن الحلول الممكنة غير موجودة :

إذا تبين أنه لا يمكن الوفاء ومقابلة كل القيود المفروضة على دالة الهدف سواء كان تعظيم أو تخفيض ، فإنه يمكن القول أنه لا يوجد الحل الممكن لتلك المشكلة ، إذ أن الحل الممكن هو ذلك الحل الذي لا يتعارض مع أي من القيود المفروضة أو الشروط المقيدة . ودائما تظهر هذه الحالة في ظل وجود قيود تتضمن (  $\geq$  ) وكذلك قيود تتضمن (  $\leq$  ) . وفي هذه الحالة سنجد أن كلا المتغيرات لا يمكن أن يتقابلا وبالتالي ليس هناك مساحة أو منطقة حلول ممكنة ومن ثم لا حل ممكن .

### مثال :

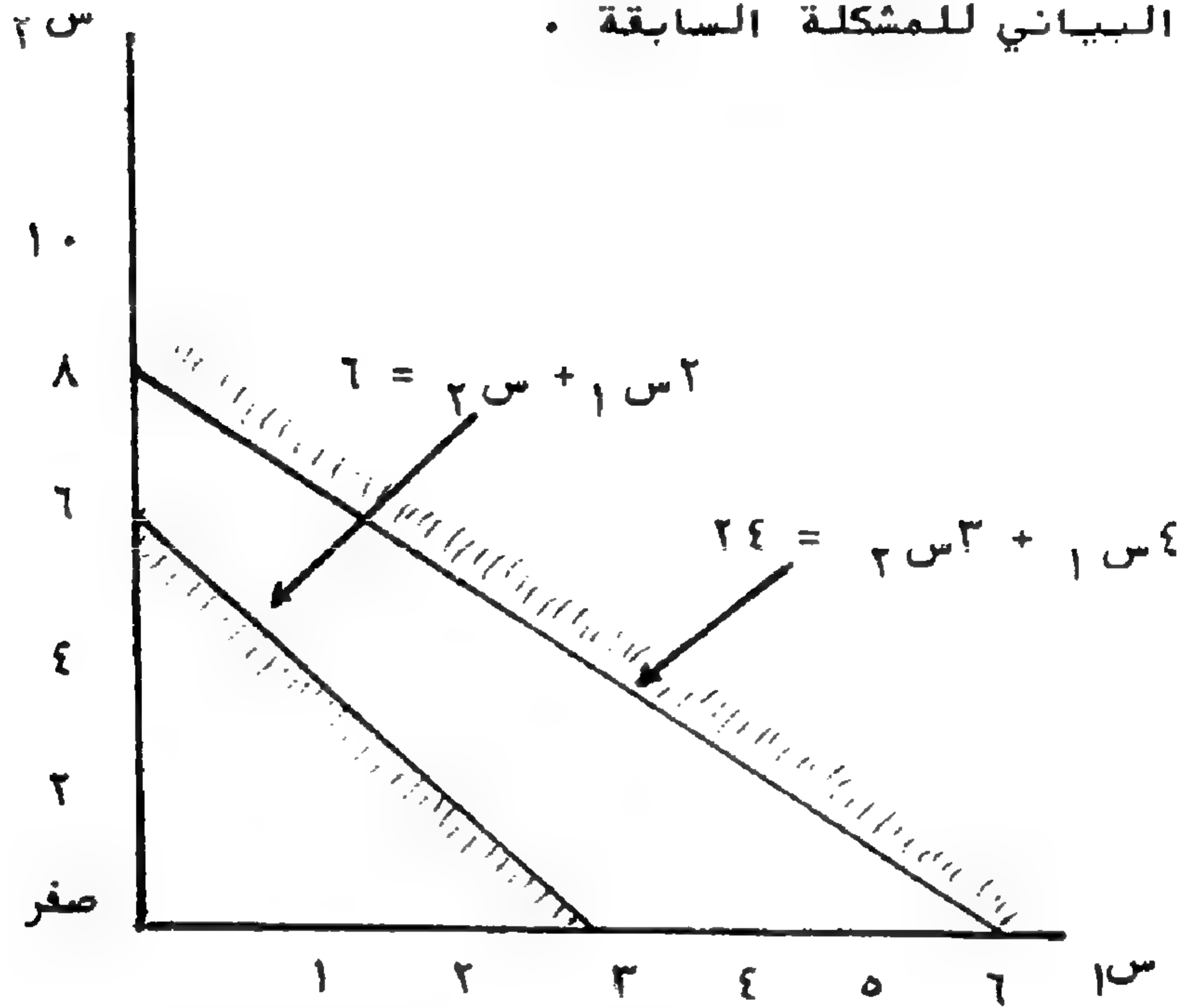
أوجد الحل الأمثل للمشكلة التالية :

دالة الهدف    تخفيض  $٥س_١ + ٤س_٢$     ← أدنى حد ممكن

$$\begin{aligned} \text{بشرط أن :} \quad & 2 \leq 2s_1 + s_2 \\ & 24 \leq 4s_1 + 3s_2 \\ & s_1, s_2 \geq \text{صفر} \end{aligned}$$

(١) الحل باستخدام الحل البياني :

بعد الانتهاء من اجراءات الحل العادية باستخدام المدخل البياني فان الشكل التالي يمثل التمثيل البياني للمشكلة السابقة .



ويتبين من هذا الشكل أن الحلول الممكنة غير موجودة وذلك لأنه لا توجد منطقة يمكن أن تقابل كل القيود الموجودة .

(٢) الحل باستخدام طريقة السمبلكس :

ونهدف من حل تلك المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس الى الوقوف على الشكل الذى ستأخذه جداول الحل فى تلك الحالة ( أ ) تحويل المتباينات الى معادلات بعد اضافة المتغيرات الراكدة والاصناعية :

$$\begin{aligned} 2 &= 2s_1 + s_2 + s_3 \\ 24 &= 4s_1 + 3s_2 + s_4 \end{aligned}$$

( ب ) اعداد الجدول المبدئى للحل .

## الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٥	٤	صفر	صفر	١٠٠
		القيم	س	س ٢	س ٣	س ٤	ص ١
صفر ١٠٠	س ٣ ص ١	٦ ٢٤	٢ ٤	١ ٣	١ صفر	صفر ١-	صفر ١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٤٠٠	٣٠٠	صفر	١٠٠-	١٠٠
	٢٤٠٠	صافي التغير	٢٩٥-	٢٩٤-	صفر	١٠٠	صفر

↑  
متغير داخل

## الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٥	٤	صفر	صفر	١٠٠
		القيم	س	س ٢	س ٣	س ٤	ص ١
٥ ١٠٠	س ١ ص ١	٣ ١٢	١ صفر	$\frac{1}{4}$ ١	$\frac{1}{4}$ ٢-	صفر ١-	صفر صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٥	$١٠٢\frac{1}{4}$ -	$١٩٧\frac{1}{4}$ -	١٠٠-	صفر
	١٢١٥	صافي التغير	صفر	$٩٨\frac{1}{4}$ -	$١٩٧\frac{1}{4}$	١٠٠	١٠٠

↑  
متغير داخل

نلاحظ ان المتغير الاصطناعي ص مازال موجودا  
بالجدول الثاني على الرغم ان دوره مجرد تسهيل الحل ثم  
يختفى ويتم الاستغناء عنه ولو واصلنا الحل فيمكن أن  
نلاحظ ان المتغير ص ١ سيستمر ايضا بالجدول الثالث .

## الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٥	٤	صفر	١٠٠
		القيم	٣	٢	٣	٤
٤	٢	٦	٢	١	١	صفر
١٠٠	١	٦	٢-	صفر	٢-	١- صفر
دالة الهدف		التكاليف الداخلية	١٩٢-	٤	٢٩٦-	١٠٠- صفر
٦٢٤		صافي التغير	١٩٧	صفر	٢٩٦	١٠٠

وواضح ان المتغير الاصطناعي مازال باقيا بالجدول الثالث رغم ان الحل كما هو واضح من صف صافي التغير انه حل أمثل .

وبناء على ماتقدم فانه يمكن القول انه اذا تبين من الرسم البياني انه لا يمكن مقابلة كل القيود الممثلة بالرسم ولا نستطيع تحديد منطقة للحلول الممكنة عندئذ نعلم ان المشكلة ليس لها حل ممكن . أما اذا كان الحل بواسطة طريقة السمبلكس فاننا يمكن ان نعرف ان المشكلة ليس لها حل ممكن اذا استمر احسب المتغيرات الاصطناعية باقيا في الحل حتى نصل الى الحل الأمثل .

#### رابعاً : حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول :

لقد سبق القول في الاجزاء السابقة التي تناولنا فيها منهج طريقة السمبلكس انه يلزم لتعيين المتغير الداخل فحص صف صافي التغير، فاذا كانت المشكلة التي نقوم بحلها ذات هدف تعظيم فيكون المتغير الداخل في تلك الحالة هو المتغير ذات اكبر قيمة موجبة في صف



صافي التغير ، واذا كانت المشكلة ذات هدف تخفيضي فيكون المتغير الداخل هو المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة . الى هذا الحد لاتوجد مشكلة اذن فـ في عملية اختيار المتغير الداخل ، ولكن المشكلة تبدأ في الظهور عندما نجد أن هناك أكثر من متغير واحد متعادل في صف صافي التغير ويمثل أكبر قيمة أي أكثر من متغير مرشح للدخول وفقا لقاعدة اختيار المتغير الداخل ، عندئذ ستكون المشكلة هي الاختيار من بين هذه المتغيرات المرشحة للدخول . وفي الحقيقة فلاتوجد هناك قاعدة محددة للمفاضلة بينهما ، وطالما انه لاتوجد قاعدة محددة ترشد الى اختيار معين يسهم في الوصول الى الحل الأمثل بشكل أسرع اذن يمكن الاختيار بطريقة جزافية . ولكن يبقى تساؤل هل اختيار المتغير الداخل جزافيا سيؤثر في الوصول الى الحل الأمثل ؟

للإجابة على ذلك نقول ان الاختيار الجزافي ليس له تأثير على الحل الأمثل ولكن تأثيره سينعكس على الوصول الى ذلك الحل اسرع وفي عدد جداول للحل أقل . ولكن الحقيقة اننا لانملك قاعدة تمكنا من هذا الاختيار الذي يسهم في سرعة الوصول الى الحل الأمثل ومن ثم فليس أمامنا سوى الاختيار الجزافي لحين التوصل الى القاعدة التي تحقق حسن الاختيار بدلا من الاختيار الجزافي .

مثال اوجد الحل الأمثل للمشكلة التي تم صياغتها على

الوجه التالي :

دالة الهدف تعظم  $10x_1 + 10x_2$  ← اقصى ربح ممكن بشرط أن :

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \leq \text{مفر}$$

(١) تحويل متباينات القيود الى معادلات باضافة المتغيرات الراكدة

$$10 = 1س + 2س + 3س$$

$$5 = 2س + 4س$$

(٢) اعداد الجدول المبدئي للحل :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	١٠	١٠	صفر	صفر
		القيم	٣س	٢س	٣س	٤س
صفر	٣س	١٠	١	٢	١	صفر
صفر	٤س	٥	صفر	١	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافي المتغير	١٠	١٠	صفر	صفر

المتغير الداخل

يتبين من هذا الجدول ان هناك حالة تعدد في المتغيرات المرشحة للدخول، اذ ان صافي المتغير للمتغير غير الاساسي ٣س ، والمتغير غير الاساسي الاخر ٤س متعادلان، وحيث ان القاعدة الواجبة التطبيق في تلك الحالة هي الاختيار بينهما جزافيا، لذلك فقد تسمم اختيار المتغير ٣س ليكون هو المتغير الداخل ( هذا الاختيار وان كان يبدو انه جزافيا الا انه متعمد من جانبنا لهدف سوف يتم الكشف عنه في موضعه المناسب، حيث انه لو تم اختيار ٤س لادى الى ظهور مشكلة نحن في غنى عنها ) .

(٣) الجدول الثاني لتحسين الحل :

بعد الانتهاء من العمليات الحسابية لتحسين الحل

بالجدول المبدئي ، فان الجدول الثاني للحل يظهر على الصورة التالية : ( مع ملاحظة انه لا توجد عمليات حسابية نظرا لان المفتاح (١) ومضاعف صف س٣ (صفر) .

الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	١٠	١٠	صفر
		القيم	س١	س٢	س٣
١٠ صفر	س١ س٤	١- ٥	١ صفر	٢ ١	١ صفر ١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٠	٢٠	١٠ صفر
١٠٠	صافي التغير	صفر	١٠-	١٠-	١٠ صفر

وباختبار مثالية الجدول الثاني يتضح انه يمثل الحل الأمثل ، وعليه يمكن القول انه امكن التغلب على مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول بالاختيار الجزافي لاي منهما .

أما لماذا ذكرنا قبل ذلك انه قد يبدو ان اختيارنا للمتغير س١ كمتغير داخل انه قد تم بشكل جزافي الا انه في حقيقته متعمد من جانبنا ، فانه لتوضيح السبب وراء ذلك سنعيد حل نفس المثال السابق مع تعديل بسيط انه سيتم اختيار س٣ كمتغير داخل ، وفي هذه الحالة سنجد ان اختيار المتغير الخارج وتعيينه سيصبح مشكلة ان سنجد ان خارج القسمية سيكون كالاتي :

$$\begin{aligned} \text{عند صف س٣} \quad ٥ &= \frac{١٠}{٢} \\ \text{عند صف س٤} \quad ٥ &= \frac{٥}{١} \end{aligned}$$

أي سيكون هناك تعدد في المتغيرات المرشحة للخروج وهذا يمثل مشكلة تحتاج الى حل ، لذلك فان السر وراء اختيار

المتغير س<sub>١</sub> كمتغير داخل هو حقيقة جاء بتطبيق قاعدة الاختيار الجزافي ولكن بتصرف بمعنى الا يكون جزافيا محضا ولكن بتصرف اذا كان من الممكن ان يكون هذا التصرف يبعدنا عن الدخول فى مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج والتي تتطلب جهدا حسابيا كبيرا كما يتضح من الجزء التالي :

### حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج :

قد يحدث التعادل عند اختيار المتغير الخارج، فقد يتساوى خارج قسمة قيم المتغيرات الاساسية على المعاملات المقابلة بعمود المتغير الداخل وذلك لأكثر من صف كما تبين ذلك من الجدول الثاني ، ولتوضيح تلك الحالة بصورة اكثر عمقا سواء من حيث ظهورها أو من حيث كيفية التعامل معها نفترض ان الجدول المبدئي التالي يمثل الجدول الاول لحل احدى مشاكل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس والمطلوب تحسين هذا الحل وصولا الى الحل الامثل .

#### الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٣	٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
صفر صفر صفر	س ٣	٤	١	صفر	١	صفر	صفر
	س ٤	٦	صفر	١	صفر	١	صفر
	س ٥	١٢	٣	٢	صفر	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	صفر	صافي التغير	٣	٥	صفر	صفر	صفر

المتغير الداخل

ويتضح من الجدول المبدئي ان المتغير س<sub>٣</sub> هو المتغير  
الداخل لأنه اكبر قيمة موجبة في صف صافي المتغير، أما  
بالنسبة للمتغير الخارج وتحديده، فنسجد ان أمامنا  
متغيران اساسيان لهما نفس القيمة من خارج قسمة قيم  
تلك المتغيرات على العناصر المقابلة لها في عمود  
المتغير الداخل، وهما المتغيرين س<sub>٤</sub>، س<sub>٥</sub> وهذا يعني  
انهما سيصلان الى الصفر في وقت واحد عند زيادة المتغير  
الداخل س<sub>٣</sub> بمقدار ٦ وحدات .

وقد يتبادر الى ذهن القارئ تساؤل: ولماذا لا نختار  
ايهما بطريقة جزافية كما فعلنا في حالة تعدد المتغيرات  
المرشحة للدخول؟ للإجابة على ذلك سنبين للقارئ  
مدى خطورة الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في هذه  
الحالة . فبفرض انه قد تم الاختيار الجزافي للمتغير  
س<sub>٤</sub> كمتغير خارج . فان جدول السمبلكس الثاني سيظهر  
بعد اجراء كافة العمليات الحسابية على النحو التالي :

الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية				
		القيم				
صفر	س <sub>٣</sub>	٤	١	صفر	١	صفر
٥	س <sub>٢</sub>	٦	صفر	١	صفر	صفر
صفر	س <sub>٥</sub>	صفر	٢	صفر	صفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	صفر	صفر	٥	صفر	صفر
		٣٠	صافي المتغير	٢	صفر	صفر

ويتبين من هذا الجدول مدى خطورة الاختيار الجزافي  
للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج



بالجدول المبدئي ، لقد نتج عن ذلك كما هو واضح من الجدول الثاني ان اصبحت المتغير الاساسي (س<sub>٥</sub>) له قيمة صفرية ، وهذا معناه ببساطة ان الحل بدأ يعاني من الانتكاس او الاعتلال او ( التحليل ) Degeneracy والحل المنتكس هو ذلك الحل الذي تكون فيه قيمة أحد المتغيرات الاساسية مساوية للصفر ، لأنه وفقاً لمنهج السمبلكس يكون عدد المتغيرات الاساسية مساوياً لعدد تباينات القيود ( بخلاف قيود عدم السلبية ) ، أي ان لكل قيد متغير أساس يمثل به جدول السمبلكس المبدئي ثم يستمر الحل ويستمر عدد تلك المتغيرات الاساسية محافظة على هذه القاعدة حتى التوصل الى جدول الحل الأمثل ، أي انه يشترط لايجاد حل اساسي ممكن غير منتكس أن يتوفر في جدول الحل ( أي جدول من المبدئي حتى الأمثل ) عدد من المتغيرات الموجبة ( اكبر من الصفر ) يتساوى مع عدد قيود المشكلة .

ونفرض اننا تغاضينا عن ظهور حالة الانتكاس التي ألمت بالجدول الثاني وحاولنا تحسين الحل الوارد بذلك الجدول ، فكما هو واضح من صف صافي التغير بذلك الجدول يمكن اختيار س<sub>١</sub> كمتغير داخل ، ويكون المتغير س<sub>٥</sub> هو المتغير الخارج ، ويكون جدول الحل الثالث كالآتي :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الارباح الداخلة				القيمة
		٣	٥	صفر	صفر	صفر
صفر	٣ س	صفر	صفر	١	صفر	٥ س
٥	٢ س	صفر	١	صفر	١	١ - ٣
٢	١ س	١	صفر	صفر	صفر	١ - ٣
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣	٥	صفر	٢	١
		صفر	صفر	صفر	٢ -	١ -
٣٠	صافي التغير	صفر	صفر	صفر	٢ -	١ -

وواضح ان الجدول الثالث يمثل الحل الامثل لان صف  
صافي التغير لا توجد به اى قيم موجبة ، ويتبين ان قيم  
المتغيرات بالحل الامثل هي :

المتغيرات الاساسية	المتغيرات غير الاساسية
$s_1 = \text{صفر}$	$s_4 = \text{صفر}$
$s_2 = 6$	$s_5 = \text{صفر}$
$s_3 = 4$	

وطبعاً واضح من هذه النتائج ان الحل مازال يعاني  
من حالة الاعتلال او الانتكاس لان المتغيرات الاساسية  
ذات القيم الموجبة ( اكبر من الصفر ) اثنتين فقط ، في  
حين ان عدد قيود المشكلة ثلاثة ، كذلك نلاحظ ان قيمة  
دالة الهدف بالجدول الثالث كما كانت عليه في الجدول  
الثاني ، وهذا الامر كان متوقعا لان المتغير  $s_1$  كانت  
قيمته صفر ومن ثم لم تتأثر قيمة دالة الهدف .

تبين لنا مما سبق مظاهر المشكلة ، ولكن ماهي  
خطورتها ، ان خطورة الاختيار الجرافي للمتغير الخارج  
في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج قد يؤدي الى  
ان نواجه اثناء حل المشكلة بطريقة السمبلكس بأحد  
أمرين وكلاهما يزيد المشكلة تعقيدا وهما :

الامر الاول : طول مراحل الوصول الى الحل الامثل .

الامر الثاني : دائرية الحل .

وفيما يلي شرح وتوضيح للأمريين السابقين .

فبالنسبة للأمر الاول فان اختيار أحد المتغيرات  
المرشحة للخروج اختيارا جرافيا اذا كان هناك تعدد في  
المتغيرات المرشحة للخروج قد يؤدي الى ان عدد الجداول  
المطلوب اتمامها ومولا الى الحل الامثل - بفرض الوصول  
الى هذا الحل - يزيد كثيرا عن عددها اذا احسن اختيار  
هذا المتغير الخارج . ولتوضيح هذه الحالة سنفترض مشكلة

ما ثم نقوم بحلها مرة باختيار احد المتغيرات دون الآخر المرشح معه للخروج ، ومرة ثانية باختيار المتغير الآخر المرشح للخروج بدلا من المتغير الذي اخترناه في الحالة الأولى ، وذلك لنرى تأثير هذا الاختيار على عدد جداول الحل وصولا للحل الأمثل للمشكلة .

مثال : أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية التي تم صياغتها على الوجه التالي :

دالة الهدف : تعظيم  $9س_1 + 6س_2$  ←  
بشرط أن :

$$\begin{aligned} 144 &\geq 12س_1 + 6س_2 \\ 180 &\geq 6س_1 + 12س_2 \\ 108 &\geq 9س_1 \\ 0 &\leq 6س_1 + 9س_2 \end{aligned}$$

الحل :

بعد القيام بالعمليات الحسابية المعتادة وفقا لطريقة السمبلكس سيظهر جدول الحل المشاوي على الصورة التالية :

الجدول المشاوي

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٩	٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	٣	٢	٣	٤	٥
صفر	٣	٧٢	صفر	١٢	١	صفر	$-\frac{2}{3}$
صفر	٤	٣٦	صفر	٦	صفر	١	$-\frac{4}{3}$
٩	١	١٢	١	صفر	صفر	صفر	$-\frac{1}{9}$
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٩	صفر	صفر	صفر	صفر	١
١٠٨	صافي التغير	صفر	صفر	٦	صفر	صفر	١-

↑ المتغير الداخل

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{72}{12} \\ 1 &= \frac{36}{6} \end{aligned}$$

ومن الجدول الثاني يتضح ان هناك تعدد فى المتغيرات المرشحة للخروج ، وسنظهر للقارئ الآن ما هو أثر الاختيار الجزافى للمتغير الخارج على عدد جداول الحل ، لذلك سنواصل تحسين الحل مرة باختيار س<sub>٤</sub> كمتغير خارج ، ثم مرة اخرى باختيار س<sub>٣</sub> كمتغير خارج لنقارن بين عدد الجداول فى الحالتين .

في حالة اختيار ( س<sub>٤</sub> ) كمتغير خارج :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٩	٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	س <sub>١</sub>	س <sub>٢</sub>	س <sub>٣</sub>	س <sub>٤</sub>	س <sub>٥</sub>
صفر	س <sub>٣</sub>	صفر	صفر	صفر	١	٢-	٢
٦	س <sub>٢</sub>	٦	صفر	١	صفر	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$ -
٩	س <sub>١</sub>	١٢	١	صفر	صفر	صفر	$\frac{1}{9}$
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٩	٦	صفر	١	$\frac{1}{3}$ -	
١٤٤	صافي التغير	صفر	صفر	صفر	١ -	$\frac{1}{3}$	

↑  
متغير داخل

الجدول الرابع

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٩	٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	س <sub>١</sub>	س <sub>٢</sub>	س <sub>٣</sub>	س <sub>٤</sub>	س <sub>٥</sub>
صفر	س <sub>٥</sub>	صفر	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	١ -	١
٦	س <sub>٢</sub>	٦	صفر	١	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$ -	صفر
٩	س <sub>١</sub>	١٢	١	صفر	$\frac{1}{18}$ -	$\frac{1}{9}$	صفر
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٩	٦	صفر	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	صفر
١٤٤	صافي التغير	صفر	صفر	صفر	$\frac{1}{9}$ -	$\frac{2}{3}$ -	صفر

في حالة اختيار ( س ٣ ) كمتغير خارج :

الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٩	٦	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
٦	س ٢	٦	صفر	١	$\frac{1}{12}$	صفر	$-\frac{1}{18}$
صفر	س ٤	صفر	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	١	١-
٩	س ١	١٢	١	صفر	صفر	صفر	$\frac{1}{9}$
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	٩	٦	$\frac{1}{2}$	صفر	$\frac{2}{3}$	
١٤٤	صافي التغير	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	صفر	$-\frac{2}{3}$	

يتضح مما سبق ان اختيار المتغير س ٣ كمتغير خارج سيخفض عدد جداول السمبلكس المطلوبة للوصول الى الحل الأمثل ، وهذا يعنى ان الاعتماد على الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج قد يقودنا الى كثرة جداول الحل وما يستتبعها من استطالة العمليات الحسابية المطلوبة وهولا للحل الأمثل، وهذه المعوكة والعقبة تمثل احدى مخاطر الاختيار الجزافي المشار اليه .

أما الامر الثاني والذي يعتبر من مخاطر الاختيار الجزافي للمتغير الخارج فانه يتمثل في أن قيمة دالة الهدف قد لا تتغير من جدول لآخر ، وقد يستمر الامر كذلك لعدة جداول متتالية ، وقد يعزل الامر ان تدخل جـولات الحل في حلقة دائرية تدور فيها وتتكرر فيها نفس مجموعة المتغيرات التي سبق اختفاؤها وهذا ما نطلق عليه دائرة الحل ، ولتوضيح ذلك الامر سنقوم بحل المشكلة



التالية وسنكتفى ببيان الجدول المبدئي والجدول الاخير  
للمقارنة بينهما واستنتاج طبيعة العقبة التي اطلقنا  
عليها اصطلاح دائرية الحل :

دالة الهدف تعظيم  $٧٥س_١ - ١٥٠س_٢ + ٢٠س_٣ - ٦س_٤$   
بشرط أن :

$$٢٥س_١ - ٦٠س_٢ - ٤٠س_٣ + ٩س_٤ + ٥س_٥ = \text{مفر}$$

$$٩٠س_٢ - ٢٠س_٣ + ٢٠س_٤ + ٣س_٥ = \text{مفر}$$

$$٣س_٣ = ٧س_٦ + ١$$

$$١س_١ ، ٢س_٢ ، ٣س_٣ ، ٤س_٤ \leq \text{مفر}$$

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٧٥	١٥٠	٢٠	٦	مفر	مفر	مفر
		القيم	١س	٢س	٣س	٤س	٥س	٦س	٧س
مفر	٥س	مفر	٢٥	٦٠	٤٠	٩	١	مفر	مفر
مفر	٦س	مفر	٩٠	٢٠	٣	٢	مفر	١	مفر
مفر	٧س	١	مفر	مفر	١	مفر	مفر	مفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	مفر	مفر	مفر	مفر	مفر	مفر	مفر	مفر
مفر	صافي التغير	٧٥	١٥٠	٢٠	٦	مفر	مفر	مفر	مفر

↑  
متغير داخل

وبعد عدة جولات للحل بفرض تحسين الحل سيظهر الجدول السابع كما يلي :

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٧٥ر	١٥٠-	٠ر٢	٦-	صفر	صفر	صفر
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س	٧ س
صفر	٥ س	صفر	٢٥ر	٦٠-	٠ر٤	٩	١	صفر	صفر
صفر	٦ س	صفر	صفر	٩٠-	٠ر٢	٣	صفر	١	صفر
صفر	٧ س	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
صفر		صافي التغير	٧٥ر	١٥٠-	٠ر٢	٦-	صفر	صفر	صفر

وبمقارنة الجدول السابع بالجدول المبدئي نجد أن الجدول السابع هو نفسه الجدول المبدئي أي أننا انتهينا من حيث بدأنا، ولو واصلنا الحل فسنعود بعد سبع جداول الى نقطة البداية مرة أخرى، وسنظل ندور في دائرة مغلقة ليس لها نهاية، اذ لا يمكن الوصول الى الحل الأمثل، وهذا ما نطلق عليه ظاهرة الارتداد أو دائرية الحل، وهذا الأمر نشأ بسبب الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج.

#### كيفية اختيار المتغير الخارج :

اذا كان الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج يؤدي الى ظهور المشاكل والمعوقات التي اوضحناها سابقا، اذن يتعين البحث عن أسلوب يمكننا من البعد عن هذا الاختيار

الجزافي ومايجره من عقبات . وهناك طريقتان تستخدمان في هذه الحالة متى توافرت شروط معينة .

### أولا : طريقة تشارنز وكوبر

#### Charnes & Copper Method

وتقوم هذه الطريقة على مجموعة من الخطوات هي :

- ١- تحديد المتغيرات الأساسية المتعادلة ، أي المتغيرات المرشحة للخروج .
- ٢- يتم ايجاد خارج قسمة معاملات أول عمود — من صفوف الوحدة والذي يقع على يسار عمود المتغير الداخل على معاملات هذا العمود (عمود المتغير الداخل) وبالنسبة لصفوف المتغيرات الأساسية المرشحة للخروج .
- ٣- اذا كان خارج القسمة من الخطوة الثانية يمثل قيما غير متساوية فانه يتم اختيار المتغير المقابل للقيمة الاقل كمتغير خارج، وبذلك نكون قد وصلنا الى حل مشكلة التعادل . ولكن بفرض ان قيم خارج القسمة مازالت متعادلة أيضا ، فانه يتعين ان نجرى ذات العمل الذي قمنا به في الخطوة الثانية ولكن باستخدام ثاني عمود من صفوف الوحدة على يسار عمود المتغير الداخل ، ونستمر في ذلك حتى يمكن ان نصل الى قيم متفاوتة نتمكن من اختيار اقلها قيمة ليكون المتغير الأساسي صاحب هذه القيمة هو المتغير الخارج ومن ثم نتجاوز مشكلة التعادل .

ولتوضيح الكيفية التي يتم بها تطبيق قاعدة تشارنز وكوبر عمليا فاننا نعود الى المثال الذي اوردناه لعرض مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج، وفيما يلي الجدول المبدئي في ذلك المثال .

## الجدول المبدئي

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٣	٥	مفر	مفر	مفر
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س
مفر	٣ س	٤	١	مفر	١	مفر	مفر
مفر	٤ س	٦	مفر	١	مفر	١	مفر
مفر	٥ س	١٢	٣	٢	مفر	مفر	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلية	مفر	مفر	مفر	مفر	مفر
مفر		صافي التغير	٣	٥	مفر	مفر	مفر

↑  
المتغير الداخل

ويتبين من الجدول المبدئي ان هناك تعدد في المتغيرات المرشحة للخروج اذ ان هناك تعادل في خارج القسم لكل من س ٤ ، س ٥ كما هو مبين على يسار الجدول ومن ثم هناك مشكلة في اختيار المتغير الخارج لأننا لايتعين ان نقوم بالاختيار الجرافي من بينها حتى لا نتعرض للعقبات السابق الاشارة اليها ، ولذلك سنقوم بتطبيق قاعدة " تشارلز وكوبر " وفق خطواتها المحددة التالية :

١- الخطوة الاولى هي تحديد المتغيرات المتعادلة والمرشحة للخروج ، ومن الجدول المبدئي السابق يتضح ان كل من المتغير س ٤ ، والمتغير س ٥ هي متغيرات أساسية متعادلة مرشحة للخروج .

٢- يتم قسمة عناصر اول عمود من معقوفة الوحدة والواقع على يسار عمود المتغير الداخل على عناصر عمود المتغير الداخل بالنسبة للمتغيرات المتعادلة أي بصورة تفصيلية على الوجه التالي :

خارج القسمة	مصفوفة الوحدة			عمود المتغير الداخل	المتغيرات الأساسية
	١	صفر	صفر	صفر	س ٣
$\frac{\text{صفر}}{١} = \text{صفر}$	صفر	١	صفر	١	س ٤
$\frac{\text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$	صفر	صفر	١	٢	س ٥

(٣) يتضح من الخطوة السابقة ان خارج القسمة مازال متساوي ، لذلك سننتقل لاجراء نفس عملية القسمة ولكن عن طريق العمود الثاني من مصفوفة الوحدة كالاتي :

خارج القسمة	مصفوفة الوحدة			عمود المتغير الداخل	المتغيرات الأساسية
	١	صفر	صفر	صفر	س ٣
$١ = \frac{١}{١}$	صفر	١	صفر	١	س ٤
$\frac{\text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$	صفر	صفر	١	٢	س ٥

ويتضح من خارج القسمة اننا استطعنا ان نعمل الى قيم غير متساوية وان المتغير س يمثل خارج القسمة الاقل ، لذلك سيتم اختياره كمتغير خارج ويتم اعداد الجدول الثاني للحل كالاتي :



## الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٣	٥	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
صفر	س ٣	٤	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	س ٤	صفر	٢ - ٣	صفر	١	١	١ - ٢
٥	س ٢	٦	٣ - ٢	١	صفر	صفر	١ - ٢
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٥ - ٢	٥	صفر	صفر	٥ - ٢
	٣٠	صافي التغير	٩ - ٢	صفر	صفر	صفر	٥ - ٢

وهذا يمثل الحل الأمثل . اذن تمكنا وبسهولة من التخلص من المخاطر التي تنشأ من الاختيار الجرافي للمتغير الخارج وذلك باتباع منهج طريقة تشارنوكوبر . ويمكن للقارئ تطبيق هذه الطريقة لحل المشكلة الدائرية التي أوردناها في هذا الجزء .

### ثانيا : طريقة (م) المعرى :

وهذه الطريقة تقوم على فكرة جعل قيم المتغيرات الأساسية التي تساوى صفرا في عمود القيم تساوى قيمة ضئيلة جدا تقترب من الصفر ولكنها ليست صفرا ، ولنرمز لهذه القيمة بالرمز م ، ولذلك تعرف هذه الطريقة بطريقة (م) المعرى ، وفيما يلي مثالا رقميا يتم من خلاله تلمس ملامح طريقة (م) المعرى في علاج مشكلة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج .

### مثال :

دالة الهدف تعظيم  $١٢س١ + ١٥س٢ + ١٤س٣$  ← أقصى ربح ممكن

بشرط أن :

$$\begin{array}{rcl}
 \text{مفر} & \approx & - \text{س} ١ + \text{س} ٢ \\
 \text{مفر} & \approx & - \text{س} ١ + \text{س} ٢ + \text{س} ٣ \\
 ١٠٠ & \approx & \text{س} ١ + \text{س} ٢ + \text{س} ٣ \\
 \text{مفر} & \approx & \text{س} ١ ، \text{س} ٢ ، \text{س} ٣
 \end{array}$$

وبعد اضافة المتغيرات الراكدة الى هذه الصياغة ،  
سيظهر جدول الحل المبدئي على الصورة التالية مع ملاحظة  
اننا وضعنا الرمز (م) محل القيمة مفر امام المتغير  
س ٤ ، والمتغير س ٥ وذلك تطبيقا لطريقة (م)  
المعزى .

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	١٢	١٥	١٤	مفر	مفر	مفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
مفر	س ٤	م	- ١	١	مفر	١	مفر	مفر
مفر	س ٥	م	- ١	مفر	٢	مفر	١	مفر
مفر	س ٦	١٠٠	١	١	١	مفر	مفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية	مفر	مفر	مفر	مفر	مفر	مفر
مفر		صافي التغير	١٢	١٥	١٤	مفر	مفر	مفر

↑  
المتغير الداخل

## الجدول الثاني

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	١٢	١٥	١٤	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
١٥	س ٢	م	١-	١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	س ٥	م	١-	صفر	٢	صفر	١	صفر
صفر	س ٦	١٠٠-م	٢	صفر	١	١-	صفر	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٥	١٥	صفر	١٥	صفر	صفر
١٥	صافي التغير		٢٧	صفر	١٤	١٥-	صفر	صفر

↑  
المتغير الداخل

## الجدول الثالث

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	١٢	١٥	١٤	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦
١٥	س ٢	$\frac{٣}{٢} + ٥٠$	صفر	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	$\frac{١}{٢}$
صفر	س ٥	$\frac{٣}{٢} + ٥٠$	صفر	صفر	$\frac{٥}{٢}$	$\frac{١}{٢} -$	١	$\frac{١}{٢}$
١٢	س ١	$\frac{٣}{٢} + ٥٠$	١	صفر	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢} -$	صفر	$\frac{١}{٢}$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٢	١٥	$\frac{٢٧}{٢}$	$\frac{٣}{٢}$	صفر	$\frac{٢٧}{٢}$
	$\frac{٣}{٢} + ١٢٥٠$	صافي التغير	صفر	صفر	$\frac{١}{٢}$	$\frac{٣}{٢} -$	صفر	$\frac{٢٧}{٢} -$

↑  
المتغير الداخل

## الجدول الرابع

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلية	١٢	١٥	١٤	مفر	مفر	مفر
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س
١٥	٢ س	$\frac{٢٢}{٥} + ٤٠$	مفر	١	مفر	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٥} -$	$\frac{٢}{٥}$
١٤	٣ س	$\frac{٢}{٥} + ٢٠$	مفر	مفر	١	$\frac{١}{٥} -$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٥}$
١٢	١ س	$\frac{٢٢}{٥} - ٤٠$	١	مفر	مفر	$\frac{٢}{٥} -$	$\frac{١}{٥} -$	$\frac{٢}{٥}$
دالة الهدف	التكاليف الداخلية		١٢	١٥	١٤	$\frac{٧}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	$\frac{٦٨}{٥}$
$\frac{٢٨}{٥} + ١٣٦٠$	صافي التغير		مفر	مفر	مفر	$\frac{٧}{٥} -$	$\frac{١}{٥} -$	$\frac{٦٨}{٥} -$

وبالنظر الى صف صافي التغير يتضح ان الجدول الرابع يمثل جدول الحل الامثل، وحيث اننا افترضنا من البداية ان قيمة (م) صغيرة جدا اذن يمكن اهمالها ومن ثم يكون الحل الامثل كالاتي :

$$١ س = ٤٠ ، ٢ س = ٤٠ ، ٣ س = ٢٠$$

وتكون قيمة دالة الهدف ١٣٦٠

اسئلة وتطبيقات :

- ١- ماذا يقصد بالقيد المحكم، وما هو العنصر المحوري ؟
- ٢- لماذا يتم اختيار المتغير ذات أكبر قيمة موجبة في صف صافي التغير ليكون هو المتغير الداخل في الجولة التالية للحل ( في مشاكل التعظيم)؟ وكيف يتم اختيار المتغير الداخل في حاسبة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول ؟
- ٣- علل لما يأتي :
  - أ) اذا كان مضاعف صف أحد القيود يساوى صفرا فان معاملات هذا القيد لن تتغير في الجدول التالي وستظل على ماهي عليه .
  - ب) اذا كان المفتاح يساوى واحد صحيح فان أرقام الصف الرئيسي الجديد هي نفسها أرقام الصف القديم.
  - ج) تعتبر المتغيرات الراكدة في مشاكل تخفيض دالة الهدف بعفة عامة بمثابة متغيرات اضافية اكثر منها طاقة غير مستغلة.
  - د) ان اضافة متغيرات اصطناعية الى قيود المشكلة يستلزم ايضا اضافة هذه المتغيرات الى دالة الهدف .
- ٤- ماهي خطورة الاختيار الجزافي للمتغير الخارج في حالة تعدد المتغيرات المرشحة للخروج ؟
- ٥- ماهو المقصود بظاهرة الانتكاس أو دائرية الحل ؟ وكيف يمكن علاجها ؟
- ٦- شركة صناعية تتخصص في انتاج ثلاثة نوعيات من المنتجات هامش الربح للوحدة من كل منها كان كالآتي :



النوع الاول	٢٠ جنيه
النوع الثاني	٤٠ ،،
النوع الثالث	٣٠ ،،

ويمر كل نوع من هذه المنتجات على ثلاثة أقسام انتاجية بفرض تصنيعها لتكون تامة الصنع، وكان الوقت المطلوب لانتاج الوحدة الواحدة من كل نوع من هذه المنتجات من تلك الاقسام الانتاجية كالتالي :

المنتج	القسم الاول	القسم الثاني	القسم الثالث
النوع الأول	٣ ساعة	٢ ساعة	١ ساعة
النوع الثاني	٤ ،،	١ ،،	٣ ،،
النوع الثالث	٢ ،،	٢ ،،	٢ ،،

والمطلوب تحديد الانتاج الامثل الذي يعمل بالارباح المحققة الى اقصى حد لها في ضوء الطاقة المتاحة بالاقسام الانتاجية وهي :

٦٠	ساعة	بالقسم الاول
٤٠	،،	،، الثاني
٨٠	،،	،، الثالث

٧- مصنع طاقته الانتاجية محدده بتسعين ساعة اسبوعيا مقسمة بين آلتين : الآلة الاولى تستغل ثلثي الوقت والباقي للآلة الثانية. فاذا كان المصنع ينتج منتجين س<sub>١</sub> و س<sub>٢</sub> ، واذا كانت الآلة الاولى تنتج من س<sub>١</sub> ثلاثة امثال انتاجها من س<sub>٢</sub> ، والآلة الثانية تنتج من المنتج س<sub>٢</sub> ضعف وحدات س<sub>١</sub> ، واذا كان ربح الوحدة من المنتج س<sub>١</sub> ستة جنيهات ومن المنتج س<sub>٢</sub> عشرة جنيهات . احسب أفضل تشكيلة انتاجية من منتجات المصنع والتي تعمل على تحقيق هدف تعظيم الربح .

٨-

إذا علمت انه في احدى الشركات الصناعية التي تنتج ثلاثة منتجات يبلغ هامش الربح للوحدة الواحدة من كل منتج على الترتيب ٨، ٦، ١٢ جنيه . ولكنه نظرا لندرة المواد الأولية المستخدمة في الانتاج . فقد أعدت ادارة الانتاج بيانا احصائيا عن عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج الوحدة الواحدة من المنتجات الثلاثة ظهر على الصورة التالية :

البيان	المادة أ	المادة ب	المادة ج
عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج وحدة من المنتج الاول	٨	٩	١٠
عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج وحدة من المنتج الثاني	٦	٨	١٢
عدد وحدات المواد الأولية اللازمة لانتاج وحدة من المنتج الثالث	١٢	١٨	١٥
مجموع وحدات المواد الأولية التي يمكن الحصول عليها .	٩٦	١٢٦	١٥٠

والمطلوب : استخدام طريقة السمبلكس في تخطيط معدل الانتاج الامثل في حدود المواد الموجودة .

٩-

تقوم احدى شركات الادوية بانتاج دواء مقوى يمد الجسم بالحد الأدنى من مجموعة الفيتامينات أ ، ب ، ج . ويتم انتاج هذا الدواء من تركيبة معينة من ثلاثة انواع مختلفة من المواد الغذائية ( س ، س٢ ، س٣ ) . والجدول التالي يبين كمية الفيتامينات الموجودة داخل كل وحدة من الاغذية المختلفة والحد الأدنى للفيتامينات المطلوبة في هذا الدواء .

المادة الغذائية	مقدار الفيتامينات بالملجم فى كل وحدة			تكلفة الوحدة من المادة الغذائية
	فيتامين (أ)	فيتامين (ب)	فيتامين (ج)	
س ١	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠	٦٠ قرش
س ٢	٢٠٠	١٠٠	٢٠٠	٤٠ قرش
س ٣	١٠٠	٣٠٠	٢٠٠	٨٠ قرش
الحد الأدنى للفيتامينات المطلوبة	٢٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	

والمطلوب ايجاد الخلطة المثلى من الأنواع المختلفة من المواد الغذائية المذكورة بهدف تخفيض التكاليف مع الاحتفاظ بالحد الأدنى للمقادير المطلوبة من الفيتامينات التى يحتوى عليها هذا الدواء.

١٠- قامت شركة مصر للطيران بتطوير هيكل اسطولها الجوى وذلك بشراء عدد من الطائرات الحديثة من طراز بوينج ٧٦٧، وقد توقعت الشركة تطورا كبيرا فى حجم الحركة على طائراتها التى تلقى جاذبية سوقية، ولكن نظرا لأن هذا النوع من الطائرات قد انضم حديثا لاسطول الجوى للشركة فان الامر يستلزم القيام بحملة اعلانية لتعريف المستهلك بهذا التطوير، وقد حددت ادارة التسويق وتنشيط المبيعات بالشركة ان ميزانية الاعلان المخصصة للحملة الاعلانية لهذا الطراز ٥٠ مليون جنيه فى السنة الاولى لانضمامها للتشغيل، وكان الشركة عادة تعلن عن خدماتها باستخدام ثلاثة وسائل اعلانية، تكلفة الاعلان فى المرة الواحدة لكل منها كالآتى :

الاعلان للمرة الواحدة بالمجلات الشهرية ٢٠٠٠٠ جنييه  
 ، ، ، ، ببرامج الاذاعة الشهرية ٣٠٠٠٠ ، ،  
 ، ، ، ، بالبرامج التلفزيونية ٥٠٠٠٠ ، ،  
 ومن خلال تحليل الحملات الاعلانية السابقة التي  
 قامت بها الشركة في فترات سابقة ، استخلصت الشركة  
 ان فاعلية الاعلان لكل وسيلة من الوسائل الثلاث  
 كانت وفق تقييم الشركة كالاتي :

<u>الوسيلة الاعلانية</u>	<u>درجة الفاعلية</u>
المجلات الشهرية	٢٠
برامج الاذاعة الشهرية	٢٥
البرامج التلفزيونية	٣٠

فاذا علمت ان سياسة الاعلان بالشركة تسير على  
 عدم تخصيص اكثر من نصف ميزانية الاعلان للبرامج  
 التلفزيونية ، كذلك فان الحد الاقصى للاعلان في كل  
 من المجلات الشهرية وبرامج الاذاعة الشهرية هو  
 عدد ١٢ مرة لكل منها حيث انها شهرية الاصدار .

والمطلوب في ضوء المعلومات السابقة ايجاد  
 افضل توزيع لميزانية الاعلان على الوسائل  
 الاعلانية الثلاث والتي تعمل على تحقيق القيسود  
 السابقة وتوليد اكبر فاعلية اجمالية للاعلان .

١١- تقوم احدى الشركات بانتاج ثلاثة أنواع من السلع  
 يبلغ هامش ربح كل منها على الترتيب : ٦٠ ، ٥٠ ،  
 ٤٠ جنيها . ويتطلب انتاج هذه الانواع القيام  
 بعمليات انتاجية هي التصنيع والتفتيش والتجميع ،  
 كذلك تحتاج كل سلعة منها الى نوعية معينة من  
 المواد الخام وبعض الاجزاء الجاهزة ، وقد تسم  
 تحديد احتياجات كل نوعية منها كالاتي :  
 النوع الاول يتطلب : ٣ ساعات تصنيع ، ٢ ساعة تجميع ،  
 ساعة تفتيش واحدة ، ٢ كيلوجرام مادة خام ،

عدد واحد موتور كهربائي ،قاعدة صلب  
بسمك ١٠ ملليمتر.

النوع الثاني يتطلب : ٢ ساعة تصنيع ،٢ ساعة تفتيش ،  
٣ كيلوجرام مادة خام ،قاعدة صلب بسمك  
٨ ملليمتر.

النوع الثالث يتطلب : ٢ ساعة تصنيع ،ساعة تجميع واحدة ،  
نصف ساعة تفتيش ،٥ كيلوجرام مادة خام ،  
قاعدة صلب بسمك ١٠ ملليمتر.

فالمطلوب اعداد الصياغة الرياضية لهذه المشكلة  
اذا علمت أن :

( ا ) ساعات التصنيع المتاحة ١٢٠ ساعة ،ساعات التجميع  
المتاحة ٨٠ ساعة ،ساعات التفتيش المتاحة  
٥٠ ساعة .

( ب ) المواد الخام التي يمكن تدبيرها حاليا لاتزيد  
عن ١٤٠ كيلوجرام .

( ج ) عدد الموتورات الكهربائية المتوافرة تبلغ ٢٠  
موتورا ، كذلك يتوافر بالمخازن قواعد صلب  
عددها ٦٠ قاعدة منها ٤٠ وحدة ذات سمك  
١٠ ملليمتر والباقي بسمك ٨ ملليمتر.

( د ) تشير توقعات السوق ان الحد الاقصى المتوقع  
لمبيعات كل وحدة من نوعيات المنتجات  
الثلاثة هي على الترتيب ٣٠ ، ٤٠ ، ٣٠ .  
( هـ ) المساحة المخزنية المتاحة بالشركة لاتسمح  
بتخزين اكثر من ٦٠٠ وحدة من وحدات المنتجات  
الثلاث .

١٢- تحتاج احدى الشركات الى انتاج ١٠٠٠ كيلوجرام من  
خليط معين، ويتطلب ذلك خلط ثلاثة أصناف من المواد  
الخام هي صنف ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، وتبلغ تكلفة الكيلوجرام  
من هذه الأصناف ٥ جنيه، ٦ جنيه، ٧ جنيه على التوالي،



ولا يمكن استخدام أكثر من ٣٠٠ كيلوجرام من الصنف ١٠١، كما يجب استخدام ١٥٠ كيلوجرام على الأقل من الصنف ١٠٢، كما يجب استخدام ٢٠٠ كيلوجرام على الأقل من الصنف ١٠٣ ، والمطلوب تحديد الكمية اللازمة من كل صنف لتخفيض التكلفة الى أدنى حد ممكن .

١٣- فيما يلي الصياغة الرياضية لاحدى مشاكل البرمجة الخطية :

تعظيم  $4س١ + ٨س٢ + ١٠س٣ \leftarrow$  أقصى ربح ممكن  
بشرط أن :

$$س١ + س٢ + س٣ \geq ١٠٠٠$$

$$٥س١ + ٥س٢ + ٣س٣ \geq ١٥٠٠$$

$$٥س١ + س٢ + س٣ \geq ٢٠٠٠$$

$$س١ ، س٢ ، س٣ \leq \text{مفر}$$

والمطلوب :

- تكوين اول حل ممكن .
- تحسين الحل المبدئي باستخدام طريقة السمبلكس
- تفسير وضع المشكلة بعد انتهاء الخطوة السابقة .

١٤- يقوم تليفزيون جمهورية مصر العربية (القناة الاولى) باستكمال اختيار البرامج للدورة الجديدة . وقد حدد منفذى البرامج ثلاثة أنواع من برامج الوقت الاساسي يمكن ان يتم بها استكمال البرامج . وبعد المناقشة مع معدى البرامج الثلاثة ، استطاعت الادارة ان تقدر الايراد المتوقع لكل ساعة من كل برنامج كحيلة اعلانات كالاتي :

<u>نوع البرنامج</u>	<u>الايراد في الساعة</u>
---------------------	--------------------------

حلقات كوميدى	٢٠٠٠ ر. ٢٠٠ جنية
--------------	------------------

حلقات بوليسية ٣٠٠٠ ر. ٣٠٠ جنيه  
افلام تليفزيونية ٢٥٠٠ ر. ٢٥٠ جنيه

وقد اتضح ان الوقت المتاح كل ليلة لعرض هذه البرامج هي ثلاث ساعات يوميا أي ٢١ ساعة اسبوعيا ، وتضع الادارة في اعتبارها محاولة تخفيض عدد الساعات التي ستخصص لبرامج العنف ، فمثلا الحلقات البوليسية بها من العنف ضعف الافلام التليفزيونية ، في حين ان الحلقات الكوميدية يفترض انها خالية تماما من مواقف العنف .

وقد وافق مخطط البرامج على تحديد عدد ساعات العنف بحيث لا يزيد عن ما يعادل ١٢ ساعة من الحلقات البوليسية ، وهذا التحديد من ساعات العنف يوزع بين نوعي برامج العنف ( الحلقات البوليسية والافلام التليفزيونية ) أي ان الاثنى عشر ساعة المخصصة لبرامج العنف يمكن أن تستخدم كلها كحلقات بوليسية ، او على سبيل المثال يمكن تخصيص عشر ساعات منها للحلقات البوليسية و ٤ ساعات من الافلام التليفزيونية ( وهي تعادل ساعتين من الحلقات البوليسية ) . وعلى ضوء تلك القيود المطلوب توزيع الساعات المتاحة على الانواع الثلاثة من البرامج المقترحة بغرض تعظيم الايراد .

١٥- يريد أحد المنتجين ان ينتج ١٠٠ طن من مادة ما تتكون على الاقل من ٥٠٪ من العنصر ( أ ) ، و ٢٠٪ من العنصر ( ب ) . ويمكنه ان يستخدم لصنع هذه المادة مزيج من نوعين من الخامات النوع الأول من الخامات ( س ) تكلفة الطن منه ٢٠ جنيه ويعطى ٦٠٪ من العنصر ( أ ) ، و ٢٠٪ من ( ب ) والنوع الثاني من الخامات ( ص ) تكلفة الطن

منه ٤٠ جنيه ويعطى ٤٠٪ من العنصر (أ) و ٥٠٪ من العنصر (ب) .

### والمطلوب :

- تحديد المزيج بين نوعى الخامات ( س ، ص ) الذى يمكن من تخفيض تكلفة انتاج المادة الى اقل حد ممكن وذلك باستخدام الرسم البياني .
  - ناقش ميزة استخدام الطريقة البيانية بالمقارنة بطريقة السمبل كس فى حل هذا النوع من المشاكل .
- ١٦- تقوم احدى الشركات بانتاج غذاء للحيوانات ، ونظرا لحدوث تغيير فى تكاليف المواد الخام الداخلة فى تركيب هذا الغذاء فانها قررت اعادة النظر فى محتويات كيس الغذاء الذى تنتجه كغذاء للخيول . وهذا الغذاء يتكون من ثلاثة مواد خام تكلفة كل كيلوجرام منها كالاتي :

المادة (أ)	تكلفة الكيلوجرام	١٠٠ قرش
المادة (ب)	، ، ،	١٢٠ قرش
المادة (ج)	، ، ،	١٥٠ قرش

وتنتج الشركة كيس الغذاء بوزن نظى مقداره عشرة كيلوجرامات ويحتوى على خليط من المسود الخام السابقة . وهناك بعض الاشتراطات المفروضة على نسب خلط تلك المواد :

- كل عبوة ينبغى الا تحتوى على اكثر من نصف وزنها من المادة الخام (أ) .

- ينبغى ان يكون مقدار المادة الخام (ب) الموجودة بالعبوة لا تزيد عن ضعف مقدار المستخدم من المادة (ج) .

- كل عبوة يتعين ان تحتوى على الاقل على مقدار ٦٠٪ من وزنه بروتينات علما بأن

النسبة المئوية للبروتين في كل مادة من  
المواد الخام المستعملة يوضحها البيان التالي :

المادة الخام      النسبة المئوية للبروتين

أ      ٥٠٪

ب      ٨٠٪

ج      ٦٠٪

والمطلوب : استخدام طريقة السمبل كس في تحديد  
اقل تكلفة خلط لهذه المواد الخام لكل عبوة  
تزن ١٠ كيلو جرامات مع مراعاة الاشتراطات السابق  
ذكرها .

١٧- شركة تنتج ثلاث سلع ويوضح البيان التالي  
التكاليف والامكانيات اللازمة لانتاجها :

السلع	التكلفة للوحدة	ساعات عمل للوحة
ثلاجات	٧٠٠	٢
غسالات كهربائية	١٠٠٠	٣
مطابخ	٥٠٠	١

والحد الاقصى للطلب على كل سلعة كالتالي :

ثلاجات ٢٠٠٠

غسالات كهربائية ٣٠٠٠

مطابخ ١٥٠٠

وتبلغ ميزانية الانتاج اليومية ٢٠٠ ألف جنيه ،  
وتتطلب ٦٠٠ ساعة عمل ، والمساحة التخزينية  
المتوفرة لكل سلعة ٥٠٠ وحدة ، فاذا علمتان سعر  
البيع للوحدة كالتالي :

الثلاجات ١٤٠٠ جنيه

الغسالات الكهربائية ٢٠٠٠ جنيه

المطابخ ١٠٠٠ جنيه

ما هو المزيج السلعي الذي يحقق اقصى ربح في ضوء  
القيود ؟

١٨- استخدم اسلوب السمبل كس لتوضيح أن المشكلة التالية ليس لها حلا ممكنا :

دالة الهدف تعظيم  $s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 5s_4$   
بشرط أن :

$$15 \geq s_1 + s_2 + 10s_3 + 5s_4$$

$$22 \geq s_1 - s_2 + 10s_3 + 9s_4$$

$$4 \leq s_1 + 2s_2 + s_3 + s_4$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

١٩- استخدم اسلوب السمبل كس لبيان ان المشكلة التالية لها حلا أمثلا غير محدد.

دالة الهدف . تعظيم  $s_1 + s_2 + 4s_3 + 3s_4 + 5s_5$   
بشرط أن :

$$20 \geq -s_1 + s_2 + 6s_3 + 5s_4 - s_5$$

$$10 \geq s_1 - s_2 + 2s_3 + 4s_4 + s_5$$

$$20 \geq s_1 - s_2 + 3s_3 + 3s_4 + 2s_5$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0$$

٢٠- حدد الحل المبدئي للمشكلة التالية باستخدام اسلوب السمبل كس .

دالة الهدف تخفيض  $s_1 - s_2 - 2s_3 + 3s_4 - 4s_5$   
بشرط أن :

$$0 = s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - 3s_5$$

$$6 \leq s_1 + 7s_2 - 3s_3 - 5s_4 + s_5$$

$$12 \leq s_1 - s_2 + 9s_3 + 9s_4 + 9s_5$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0$$

س غير مفيدة الاشارة .





## الفصل الثالث

# تحليل الحساسية والثائية للبرامج الخطية

\* مقدمة

\* تحليل الحساسية

\* الثنائية



## الفصل الثالث

### تحليل الحساسية والثباتية للبرامج الخطية

#### مقدمة :

تناولنا فى الفعولين السابقين الكيفية الستى يمكن بها صياغة نماذج البرمجة الخطية ، والصورة النهائية التى تكون عليها تلك الصياغة ، لتعبير بصدق عن محتوى المشكلة موضوع البحث ، ولتأخذ الصورة التى يمكن معها استخدام الاسلوب الرياضى الذى يصلح للتعامل معها ، وكذلك فقد غطى هذين الفعولين الكيفية التى يمكن بها حل هذه المشاكل والتوصل الى نتائج محددة تمثل الحل الامثل، والحقيقة انه على الرغم من الاهمية الكبيرة لتلك النتائج فى التوصل الى قرار محدد ، الا انه من وجهة النظر الادارية وخاصة لدى متخذى القرار ، تعتبر نتائج حل المشكلة اقل اهمية اذا ما قورنت باهمية تحليل وتفسير تلك النتائج .

وسنقف جليا على هذه الحقيقة عندما يتبين لنا مدى اتساع وعمق وضخامة المعلومات التى يمكن الحصول عليها واستنتاجها واستقراؤها واستخلاصها من خلال تحليل نتائج البرامج الخطية ، ولعله قد يكون مثيرا للدهشة هذا الكم الهائل من المعلومات التى سنسرى كيف يمكن الوقوف عليها وكيف انها تعطى صورة كاملة لأمور كثيرة لدرجة انه سيكون من المقنع التسليم بأهمية تحليل وتفسير نتائج حل المشكلة ، بدلا من التوقف عند مجرد التوصل الى ذلك الحل الامثل .

ونظرا للاهمية الكبرى لتحليل وتفسير نتائج الحل فقد خصصنا هذا الفصل لنتناول فيه هذا الموضوع ، او

ما يمكن ان نطلق عليه تحليل الحساسية ، أو تحليل ما بعد الامثلية Sensitivity Or Postoptimality Analysis ويعتبر هذا الموضوع بمثابة اسلوب التحليل الذى يمكن عن طريقه تحليل وتفسير نتائج الحل بالعمى الكافى الذى يخدم وجهة النظر الادارية . ان هذا التحليل ( تحليل الحساسية ) يعمل على توفير قدر من المعلومات الضرورية لمتخذ القرار الذى يواجه دائما بسؤال مضمونه . وماذا يحدث اذا . . . ؟ ان السؤال على هذا الشكل هو المقدمة الى تحليل الحساسية ، اذ انه يعكس ان نتائج الحل ليست هى كل شئ ، يبغيه ولكنه يحتاج الى معرفة المزيد عن التفسيرات والتحليلات فيما اذا حدث تغيير او تعديل فى معاملات النموذج الذى افرز هذه النتائج .

من ناحية اخرى فاذا كانت المعلومات الواردة بجدول السمبل كس النهائى تمثل مصدرا غزيرا وعميقا لتفسيرات ادارية متعددة ، فانه يمكن ان نحصل على المزيد من تلك المعلومات عن طريق تحويل المشكلة الاصلية للبرمجة الخطية ( او الصياغة الاصلية للمشكلة ) الى نموذج آخر مرافق او مقابل يطلق عليه اصطلاح المشكلة المقابلة او المشكلة الثنائية Dual Problem وعن طريق تحليل نتائج حل المشكلة الثنائية يتوافر لدينا المزيد من المعرفة بحل المشكلة الاصلية .

بناءً على ما تقدم فان هذا الفصل سيعالج فى جزئه الاول تطبيقا لتحليل الحساسية لمشاكل البرامج الخطية ، وذلك بهدف الوقوف على كيفية دراسة تأثير التغيرات التى يمكن ان تحدث فى معاملات دالة الهدف ، والتغيرات فى الطاقات المحددة لكل قيد ، وذلك كله دون الحاجة إلى إعادة حل المشكلة من بدايتها .



اما الجزء الثانى من هذا الفصل فانه سيتناول توضيح مفهوم المشكلة الثنائية ، وكيف يمكن صياغتها وحلها ، وعلاقتها بالمشكلة الاصلية ، وكيف يمكن استخدامها للإجابة على مزيد من الاسئلة المتعلقة بتحليل الحساسية ، لتحديد اثر التغيرات التى يمكن ان تحدث من ثوابت القيود ، واثر اضافة متغيرات قرارية جديدة ، وتأثيرات التغيرات من معــــــدل استخدام المتغيرات القرارية للموارد المتاحة .

ولعل القارىء يكون قد وقف على المغزى من ان يضم هذا الفصل المشكلة الثنائية الى جانب تحليل الحساسية ، اذ ان تحليل الحساسية بكافــــة مشتملاته وبمختلف ابعاد التغيرات فى معالم النموذج الخطى يفرض تناول هذه المشكلة بالشرح والتحليل للحصول على مزيد من المعلومات التى تخدم موضوع الحساسية وهذا ما سوف نراه ونقف عليه من خلال استعراض اجزاء هذا الفصل .



تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis



## تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

يسعى تحليل الحساسية الى تحقيق هدف رئيسي يخدم متخذ القرار ، وهو تحديد حساسية الحل الأمثل للتغيرات التي قد تحدث في عناصر أو معالم المشكلة ، وتتضمن عناصر أو معالم مشكلة البرمجة الخطية هامش ربح الوحدة ( أو التكلفة ) وهي معاملات دالة الهدف ، مقدار الموارد المتاحة (ثوابت القيود) ، معدلات استخدام الطاقة (معاملات القيد) ، وقيم أي عناصر أخرى تكون قد استخدمت في صياغة المشكلة . وبطبيعة الحال فان التحليل الذي يستخدم هذه العناصر أو المعالم ، يكون على درجة عالية من الأهمية لأنه يعنى بالوقوف على مدى صحة الحل الأمثل في ضوء ما يحدث من تغيرات على هذه المعالم والعناصر .

ويستطيع تحليل الحساسية بلوغ هذا الهدف من خلال دراسة وبحث مدى حدود التغير في عنصر معين قبل أن يفقد الحل أو القرار الأمثل أمثليته ، فهذه العناصر لا تتسم بالثبات ولكن يعثرها التغير ، وهذا التغير قد يكون بسبب مرور الزمن ، أو أنه يعكس عدم التأكد في القيم الحقيقية ، حيث أن كثيرا من قيم تلك العناصر تكون بمثابة قيم تقديرية وليست فعلية ومن ثم فهي خاضعة لاحتمالات الخطأ أو التغير .

ويصلح اختبار الحساسية للتطبيق على نتائج أي نموذج من نماذج بحوث العمليات ، الا أننا سنقصر دراستنا في هذا الجزء على تحليل حساسية نماذج البرمجة الخطية .

من ناحية أخرى فانه لا ينبغي ان يفهم من العرض السابق ان أي تغيرات في قيم عناصر مشكلة البرمجة الخطية قد تؤدي بالضرورة الى ان يفقد الحل الأمثل أمثليته ، اذ نجد في أحوال كثيرة ومتكررة أن بعض



التغيرات الطفيفة في قيم تلك العناصر قد لا تؤدي إلى تغيير الحل الأمثل ، لذلك نجد أن تحليل الحساسية في مشاكل البرمجة الخطية يهتم بتحديد حجم التغير في قيمة العنصر والذي يؤدي إلى أن يفقد الحل أمثليته .

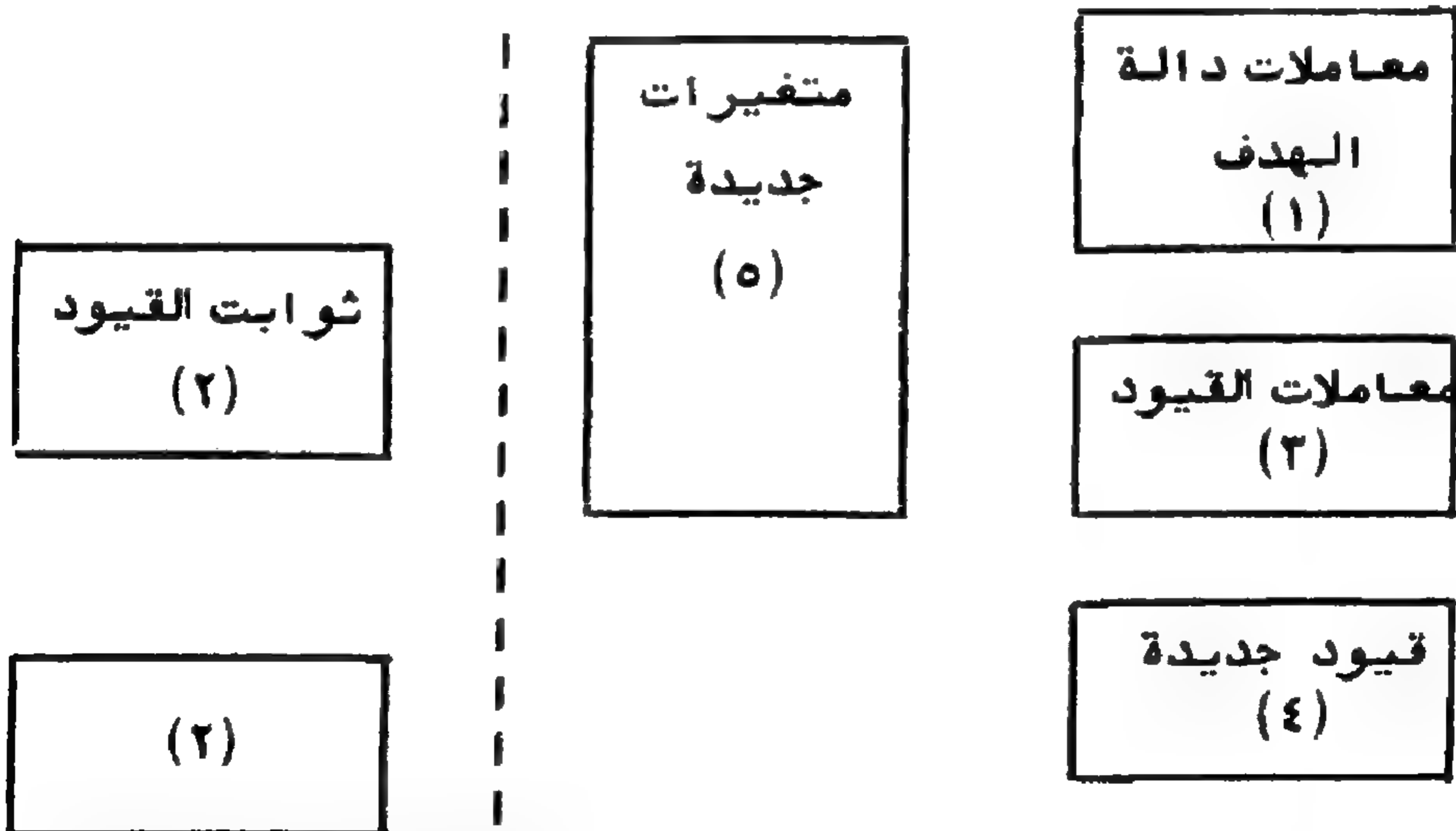
فإذا تبين أن الحل الأمثل لن يتغير إلا إذا كانت هناك تغيرات كبيرة ومحسوسة في قيم العنصر المعين، في هذه الحالة فإن المدير أو متخذ القرار أيا كان مستواه الإداري سيكون أكثر ثقة في أن الحل صحيح ولمدى كبير، أما إذا كان الحل الأمثل له حساسية كبيرة للتغير لأي تغيرات ولو طفيفة في قيم عناصر المشكلة، فإن متخذ القرار سيفضل أن يدعم النتائج الخاصة بالحل بالمزيد والمزيد من التحليل والدراسة والفحص والتقصي في سبيل التحديد الدقيق لهذه العناصر ومراقبة قيمها حتى يقلل من احتمال أن يكون القرار الذي اتخذه سيصبح غير أمثل .

من الاستعراض السابق لمفهوم تحليل الحساسية يمكن أن نقدم التعريف التالي ليعكس طبيعة تحليل الحساسية " تحليل الحساسية هو اختبار مدى صلاحية الحل الأمثل في ظل التغيرات التي قد تطرأ على عناصر المشكلة ، أما التغيرات التي قد تظهر من خارج النموذج " . ومغزى تحليل الحساسية وفق هذا التعريف ، أنه قد تطرأ بعد إيجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ، بعض التغيرات في معاملات دالة الهدف ، وثوابت القيود ، ومعاملات القيود ، أو متغيرات أخرى تفرغ نفسها لتدخل كعنصر من عناصر النموذج ، ويراد معرفة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل للنموذج ، دون الحاجة إلى حل النموذج مرة أخرى ، بل يمكن الاكتفاء باختبار مدى صلاحية الحل الأمثل في ظل الظروف الجديدة . وذلك باستخدام أسلوب تحليل الحساسية أو تحديد ما بعد الأمثلية .

مما سبق يتبين أن التغيرات التي يمكن أن تحدث في حالة مشاكل البرامج الخطية والتي يتناولها تحليل الحساسية تتلخص في :

- ١- التغير في معاملات دالة الهدف (سواء كانت هامش ربح ، أم تكلفة) .
- ٢- التغير في ثوابت القيود أو قيم الجانب الأيسر من القيود .
- ٣- التغير في معاملات القيود (معدلات استخدام الموارد)
- ٤- اضافة قيود جديدة .
- ٥- اضافة متغيرات قرارية جديدة .

ويمكن تصوير هذه الحالات الخمس في الشكل التالي والذي يمثل في مجمله معالم أو عناصر نموذج البرمجة الخطية .



وفيما يلي نتناول بالشرح والتحليل كيف يمكن إجراء تحليل الحساسية للتغيرات التي يمكن أن تحدث في هذه العناصر ويمكن أن نجرى هذا التحليل على المدخل البياني للحل ، إلا أنه من الأفيد والاكثر استخداماً أن نجرى هذا التحليل على جدول السمبلكس الأخير .

ويمكن أن يكون المثال السابق الذي تناولناه في الفصل السابق مجالاً لهذا التحليل، إلا أننا نرى حتى

يكون تحليلنا بالعمق الكافي ويغطي كافة ما نريــــــــــــد توضيحه في هذا الخصوص ان نستخدم مثالا آخر يعكس مشكلة أكبر من التي عالجنها سابقا .

مثال : احدى الشركات الصناعية تتخصص في انتاج أربعة نوعيات من المنتجات يرمز اليها على الترتيب س١، س٢، س٣، س٤ . والجدول التالي يمثل هامش ربح الوحدة والعمليات الصناعية اللازمة لانتاج تلك النوعيات ومعدل احتياج كل سلعة من هذه العمليات الصناعية وكذلك الطاقة القصوى للاقسام الصناعية :

المنتجات	الاقسام الانتاجية		هامش ربح الوحدة
	تجميع	تصنيع	
س١	٢٠ ساعة	٢٠ ساعة	٢٠٠٠ جنيه
س٢	٢٥ ،،	٢٠ ،،	٥٠٠٠ جنيه
س٣	٣٠ ،،	١٢ ،،	٤٠٠٠ جنيه
س٤	١٥ ،،	١٠ ،،	٢٠٠٠ جنيه
الطاقة المتاحة اسبوعيا	٩٠٠ ساعة	٩٠٠ ساعة	

ولقد تبين ان الشركة متعاقدة مع بعض العملاء على ضرورة توريد على الاقل ٥٠٠٠ وحدة من س١ ، ٣٠٠٠ وحدة من س٢ اسبوعيا . والشركة ترغب في تحديد مزيج الانتاج الامثل الذي يعمل على تعظيم الارباح .

الحل :

يتم اعداد الصياغة الرياضية لتلك المشكلة كالآتي :

- ١- دالة الهدف تعظيم  $٢٠٠٠س١ + ٥٠٠٠س٢ + ٤٠٠٠س٣ + ٢٠٠٠س٤$
- ٢- القيود :

$$\begin{aligned}
 900 &\geq 20s_1 + 25s_2 + 30s_3 + 15s_4 \\
 900 &\geq 20s_1 + 20s_2 + 12s_3 + 10s_4 \\
 5000 &\leq s_1 \\
 3000 &\leq s_3 \\
 s_1, s_2, s_3, s_4 &\leq \text{مفر}
 \end{aligned}$$

وبعد تحويل متباينات القيود بإضافة المتغيرات  
 الراكدة والاصطناعية واعداد جدول الحل المبدئي ثم  
 السير في خطوات تحسين الحل ، سنجد اننا وصلنا الى  
 جدول الحل النهائي الامثل التالي :

## جدول السمبلكس الاخير ( الحل الأمثل )

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	القيم								الهدف الذالة	التكاليف الداخلية	التغير صافي	١٦٤٠٠٠
			١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨				
٥٠٠٠	٣	$\frac{2}{5}$ ٢٨	صفر	١	صفر	٢/٥	$\frac{1}{5}$	صفر	صفر	صفر	٣	٢٠٠٠	صفر	٢٠٠٠٠
صفر	٦	١٩٦	صفر	صفر	صفر	٢-	$\frac{4}{5}$	١	صفر	١٢-	٣	صفر	صفر	٢٠٠٠٠
٢٠٠٠	١	٥	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣	٢٠٠٠	صفر	٢٠٠٠٠
٤٠٠٠	٣	٣	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١-	٣	٢٠٠٠	صفر	٢٠٠٠٠



ومن هذا الجدول يتضح ان الحل الأمثل هو :

انتاج عدد ٥ وحدات من س <sub>١</sub>	تعطي	١٠ر٠٠٠	جنيه ارباح
، ، ، ، ٢٨ $\frac{٢}{٥}$ وحدة من س <sub>٢</sub>	تعطي	١٤٢ر٠٠٠	، ، ، ،
، ، ، ، ٣ وحدات من س <sub>٣</sub>	تعطي	١٢ر٠٠٠	، ، ، ،

اجمالي الارباح للاسبوع القادم ١٦٤ر٠٠٠ جنيه

ولفرض تحليل حساسية الحل الأمثل والذي يظهر في جدول السمبلكس السابق فاننا سنتناول فيما يلي تغطية لتحليل الحساسية بشكل واضح وتحليلي متناولين النواحي التالية :

١- التغيرات في معاملات دالة الهدف .

٢- تحليل التغيرات في طاقة الموارد .

أما باقى عناصر نموذج البرمجة الخطية فسيتـم تناولها بعد استعراض مفهوم المشكلة الثنائية .

#### أولاً: التغيرات في معاملات دالة الهدف

Objective Coefficient Changes

سنبدأ تحليل الحساسية بأول عنصر من عناصر الصياغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية وهو معاملات دالة الهدف للمتغيرات القرارية الواردة بهذه الدالة . الا أنه حتى يكون تحليلنا واقعياً ومنطقياً وعلمياً فان تناول هذا التحليل يتعين أن يكون في ضوء الحقيقة التي نقتنع بها وهي ان مدى تأثير التغير يختلف عما اذا كانت هذه التغيرات تتعلق بمتغير غير اساسي أو بمتغير أساسي أو بمتغير أساسي في الحل الأمثل . الا أنه قد يتبادر الى الذهن تساؤل ، يتعين ازالة الغموض عنه وتوضيحه وهو ، ولماذا نفرق بين تلك المتغيرات طالما انها جميعاً ترد بدالة الهدف ؟ ولماذا لا يشملها التحليل بصورة جماعية وبقواعد واحدة تطبق على أي متغير قرارى تـضمه دالة الهدف ؟ الحقيقة ان هذا التساؤل قد يبدو منطقياً في ظاهره ، الا ان قليلا من التفسير سيفـع الأمور في نصابها

وسيجلى هذا الموقف وسيكون هذا التساؤل غير ذى موضوع ،  
فانه وان كانت المتغيرات القرارية جميعها قد ضمتها  
دالة الهدف ، الا أن صفتها اختلفت فى جدول الحل الامثل ،  
فمنها من أخذ مكانه فى الانتاج ومنها ماتقرر وقسّف  
انتاجه حالياً من مزيج الانتاج الأمثل ، أي هناك منها  
ماأخذت صفة المتغيرات الاساسية (وهى المتغيرات القرارية  
ذات القيم الموجبة) ، ومنها مايوصف بأنه متغير غير  
اساسي ( أي انه متغير قراري ولكن ذات قيمة صفريّة ) .  
واختلاف الصفة ينعكس على طبيعة تحليل الحساسية . وأبسط  
تلك الامور السريعة التي يمكن للقارىء ان يقف عليها  
بسرعة وبمجرد النظر هي أن المتغيرات الاساسية ستظهر فى  
عمود المتغيرات الاساسية وعلى يمينها معاملها بدالة  
الهدف والذي يؤثر على قيمة دالة الهدف وعلى قيّم  
التكاليف الداخلة لكافة متغيرات النموذج وفى نفس  
الوقت فان هذا المتغير ايضا له قيمة تظهر أمام صف  
الارباح الداخلة أي أن أي تغيير فى معاملات المتغيرات  
الاساسية سيكون لها آثارها المزدوجة على مقدار صافي  
التغير الذى يتم اختبار حساسية الحل من خلاله .

أما المتغير غير الاساسي فانه معامل له لا يظهر فقط  
الا فى صف الارباح الداخلة ومن ثم فان تأثيره على صف  
صافى التغير تأثير مباشر وليس له تأثيرات جانبية أخرى  
وطالما اختلف الاثر بين المتغير الاساسي والمتغير غير  
الاساسي ، اذن ليس من المقبول ان يتم تحليل حساسية كل  
منها بنفس المدخل وبذات الاسلوب . وهذا هو السبب فى  
اننا سنفرق فى الجزء التالى بين المتغيرات غير  
الاساسية ، والمتغيرات الاساسية .

#### (١) التغيرات فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية :

سنبدأ تحليلنا للمتغيرات القرارية بتلك المتغيرات  
غير الاساسية لأنها اسهل وأيسر وأبسط فى تحليلها ، ومن  
ثم سنفرغ منها على عجل وفى نفس الوقت تعتبر مقدمة

لتوضيح بعض المفاهيم التي يمكن تجنيدها لخدمة التحليل عند التعرض للنوع الآخر من المتغيرات .

وبالرجوع الى جدول السمبلكس السابق والذي يمثل الجدول الأخير والحل الأمثل لمشكلة المثال الذي طرحناه ، سنجد أن المتغير القراري الوحيد غير الاساسي في ذلك الجدول هو المتغير ( س ٤ ) ، مع ملاحظة اننا استبعدنا من تحليلنا المتغيرات غير الاساسية الأخرى والتي تمثل المتغيرات الراكدة ( س ٥ ، س ٦ ، س ٧ ، س ٨ ) أو المتغيرات الاصطناعية ( ص ١ ، ص ٢ ) ، حيث ان الاولى ليس لها معاملات بدالة الهدف ، والثانية اسقطت من جدول آخر أثناء جولات الحل .

والسؤال الآن ، كيف سيؤثر التغير في معامل دالة الهدف للمتغير القراري غير الاساسي ( س ٤ ) على أمثلية الحل الأخير ؟ .

ان التغير في معامل دالة الهدف نقصد به التغير في الاتجاهين بمعنى انخفاض هذا المعامل أو ارتفاعه . لذلك يتعين ان نتناول هاتين الحالتين :

#### ( أ ) - أثر النقص أو الانخفاض في معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي :

ان السبب وراء عدم دخول المتغير القراري فسي المزيج الانتاجي الأمثل ومن ثم اصبحت متغير غير اساسي هو أن مساهمة هذا المتغير ليست من الكبر بحيث تسمح بالاستبدال المربح مع احد المتغيرات الاساسية الحالية ، لأنه لو كان مربحاً بما فيه الكفاية لتمكن من ازالة احدى تلك المتغيرات الاساسية وحل محلها وبذلك يكتسب صفة المتغير الاساسي ويدخل المزيج الانتاجي الأمثل . أي أنه بهامش ربحه الحالي (معامل دالة الهدف له) لا يستطيع أن يحل محل متغير اساسي آخر ، فاذا كان الأمر كذلك فما بالنسبة لو حدث نقص أو انخفاض في ذلك المعامل للمتغير

غير الاساسي . ان ذلك سيجعله بالتاكيد غير مربح أكثر مما كان عليه ومن ثم سيستمر على حالته التي هو عليها حالياً . أي أن انخفاض معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي بأي مقدار لن يؤثر على المزيج الانتاجي الأمثل لأنه حالياً غير مربح بما فيه الكفاية فكيف يكون الامر مع هذا الانخفاض . ان هذا التحليل يقودنا ان نقرر القاعدة التالية :

قاعدة :

ان النقص أو الانخفاض في معامل دالة الهدف لأي متغير قراري غير أساسي (في مشاكل التعظيم) لن يؤدي إلى تغيير الحل الأمثل . وأن الأمر الوحيد الذي سينتج عن هذا النقص أو الانخفاض انه سيجعل هذا المتغير غير مربح عما كان عليه .

وقد يكون من المفيد أن ننقل بهذه القاعدة إلى واقع التطبيق العملي . اذ بالنظر إلى صف صافي التغير بجدول السمبلكس الأخير ، نجد أن قيمة صافي التغير للمتغير غير الاساسي ( س٤ ) هي ( - ١٠٠٠ ) ، وهذه القيمة هي نتيجة طرح التكاليف الداخلة لهذا المتغير ( ٣٠٠٠ ) من الارباح الداخلة له ( ٢٠٠٠ ) أي :

قيمة صافي التغير للمتغير غير الاساسي  $1000 = 3000 - 2000$  ولا يمكن للمتغير غير الاساسي س٤ أن يكون مرشحاً كممتغير داخل الا اذا انتقل صافي التغير من حالته السالبة إلى حالة موجبة ( عندئذ يفقد الحل أمثليته ) ، فهل يتم هذا اذا حدث انخفاض لمعامل دالة الهدف عما هو عليه ؟ ان معاملة الحالي ينتج عنه قيمة صافي تغير سالبة ، فاذا ما انخفض هذا المعامل عما هو عليه فان قيمة صافي التغير ستكون اكبر باشارة سالبة ، أي سيكون غير مربح عما كان عليه . أي أن الانخفاض ولو بأي مقدار لن يترتب عليه أي تغيير في أمثلية الحل .



( ب ) - أثر الزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي :

من ناحية أخرى ، فانه اذا اردنا ان نقف على مقدار الزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي ليفقد الحل أمثليته ، ويتحول هذا المتغير الى متغير اساسي ، فانه من المنطقي أن تكون هذه الزيادة من الكبر بحيث تكفى لتحويل ربحية المتغير من متغير غير اساسي الى متغير اساسي . ولكن ماهو مقدار تلك الزيادة- التى تكفى لهذا التحويل ؟

للإجابة على هذا التساؤل ، نقول انه قد تبين لنا عند حل مشاكل التعظيم بطريقة السمبلكس ، ان منهج طريقة السمبلكس يختار المتغير غير الاساسي ذات أكبر قيمة موجبة فى صف صافى التغير ليصبح متغيرا أساسيا ( متغير داخل ) . وقد ذكرنا أنه طالما وجد ولو متغير واحد له قيمة صافى تغير موجب ، فان الحل يعتبر غير أمثل ويحتاج الى تحسين ، وتستمر جولات الحل وصولا الى الحل الأمثل ، مثلما حدث فى المشكلة التى نعالجها الآن والتى يعبر جدول السمبلكس الأخير السابق عن الحل الأمثل لها . وتأسيسا على ذلك فان قيمة صافى التغير للمتغير غير الاساسي ( س<sub>٤</sub> ) يتعين أن تصبح قيمة موجبة حتى يفقد الجدول الأخير أمثليته ويصبح من المحتتم اختيار ( س<sub>٤</sub> ) متغير داخل ، ومن ثم ينضم الى المتغيرات الأساسية . ولن تصبح قيمة صافى التغير للمتغير س<sub>٤</sub> موجبة إلا اذا زاد معامل دالة الهدف لهذا المتغير بمقدار يكفى ليكون سببا فى جعل قيمة صافى التغير لهذا المتغير غير الاساسي قيمة موجبة .

أي انه يمكن ان نضع القاعدة التالية: "الحد الاقصى للزيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي، والتي لاتؤدى الى تغيير امثلية الحل ، لابد أن تكون زيادة كافية



تماما وبالمضبط لجعل قيمة صافي التغير لهذا المتغير مساوية للصفر".

وبتطبيق هذه القاعدة على حالة المتغير غير الاساسي ( س ) ، فاننا نجد ان قيمة صافي التغير لهذا المتغير في جدول الحل الأمثل ( - ١٠٠٠ ) ، ومعنى ذلك أن اكبر زيادة لمعامل دالة الهدف لهذا المتغير هي ( + ١٠٠٠ ) ، حيث أن هذه الزيادة ستجعل قيمة صافي التغير له مساوية للصفر ومن ثم لا يفقد الحل أمثليته ، أي انه اذا أصبح هامش ربح الوحدة من س مبلغ ٣٠٠٠ جنيه بدلا من ٢٠٠٠ جنيه فان قيمة صافي التغير عندئذ تساوي صفر كالاتي :

$$\begin{aligned} \text{قيمة صافي التغير للمتغير س} \\ = \text{معامل دالة الهدف} - \text{التكاليف الداخلة} \\ = ٣٠٠٠ - ٣٠٠٠ = \text{صفر} \end{aligned}$$

أما اذا زاد معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي ( س ) بقيمة تزيد عن ١٠٠٠ جنيه ، فان ذلك يجعله مربح ، ويجعل له قيمة صافي متغير موجبة ، ومن ثم يفقد الحل أمثليته .

والمنطق نفسه صحيح بالنسبة لمشاكل البرمجة الخطية ذات هدف التخفيض ، مع عكس الاتجاه حسب الهدف ، اذ في مشاكل التخفيض يكون المتغير القراري غير اساسي لأنه من الأرخص والأقل تكلفة استخدام وحدات من المتغيرات الاساسية . لذلك يمكن ان نفع القاعدة التالية بالنسبة لمشاكل التخفيض :

قاعدة :

" أي زيادة في معامل دالة الهدف للمتغير القراري غير الاساسي في حالة مشاكل التخفيض ، لن يؤثر على امثلية الحل ، والاشتر الوحيد الذي سينتج عن هذه الزيادة ، انه سيجعل هذا المتغير أكثر تكلفة عما كان عليه ، وكذلك فان أي انخفاض في المعامل

أكبر من قيمة صافي التغير في الجدول النهائي  
لهذا المتغير سيؤدي الى أن يفقد الحل أمثليته،  
وان التخفيض الذي لا يفقد الحل أمثليته أن يكون  
كافيا فقط لأن يجعل قيمة صافي التغير له صفرا".

مما سبق يمكن أن نضع قاعدة الحساسية التالية  
 بالنسبة للتغيرات في معاملات دالة الهدف للمتغيرات  
 القرارية غير الاساسية في مشاكل التعظيم (أو التخفيض):  
قاعدة :

" يمكن تخفيض (زيادة) معامل دالة الهدف للمتغير  
القراري غير الاساسي بأي مقدار، أو زيادته  
( تخفيضه ) بمقدار يكفي بالكاد لأن يجعل قيمة  
صافي التغير له مساوية للصفر، دون أن يتغير الحل  
الأمثل " .

ومن القاعدة السابقة يمكن استنتاج انه لكي تكون  
 الزيادة في معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي كافية  
 بالكاد لجعل قيمة صافي التغير له مساوية للصفر، فإن  
 ذلك يعنى ان هذه الزيادة هي نفسها مقدار صافي التغير  
 مع تغيير الاشارة، فمثلا قيمة صافي التغير للمتغير غير  
 الاساسي ( س ع ) في الجدول الاخير هي ( - ١٠٠٠ ) اذن أقصى  
 زيادة تجعل قيمة صافي التغير مساوية للصفر هي نفس  
 هذه القيمة مع تغيير الاشارة أي ( + ١٠٠٠ ) ومن هنا  
 يمكن استنتاج القاعدة التالية :

قاعدة:

" الحد الأقصى للزيادة في معامل دالة الهدف  
للمتغير القراري غير الاساسي في مشاكل التعظيم،  
دون أن يفقد الحل أمثليته، هو عبارة عن قيمة  
صافي التغير لهذا المتغير في الجدول الأمثل  
مع اختلاف الاشارة " .

ولكن ماذا يحدث اذا زاد معامل المتغير غير الاساسي ( س ع ) بدالة الهدف عن ١٠٠٠ جنيه ، أي بدلا من ان يكون هامش ربح هذا المتغير ٢٠٠٠ جنيه أصبح مثلا ٣٠٠١ جنيه ، في هذه الحالة ستكون قيمة صافي التغير لهذا المتغير ( ا ) ، وبظهور هذه القيمة الموجبة في صف صافي التغير ، يفقد الحل أمثليته حيث سيتم في هذه الحالة اختياره كمتغير داخل أي تحويله الى متغير اساسي .

وتلخيصا لما تقدم يمكن القول ان الحد الأقصى للنقص في معامل دالة الهدف للمتغير غير الاساسي س ع يعادل - ∞ اي ( ناقص مالانهاية ) أي يمكن تخفيضه الى مالانهاية دون ان يؤثر على امثلية الحل ، والحد الأقصى للزيادة تعادل مقدار قيمة صافي التغير له مع تغيير الإشارة . ويمكن كتابة الحدين السابقين للتغير في معامل الهدف للمتغير غير الاساسي ( س ع ) كالآتي :

— ∞ معامل دالة الهدف للمتغير س ع = ٣٠٠٠  
أي انه طالما ان هامش ربح المنتج س ع تنحصر بين ناقص مالانهاية وثلاثة آلاف جنيه فان الحل الأمثل الحالي سيظل كما هو ولن يتحول س ع الى متغير اساسي ، وهذا يعني انه لو حتى أخطأت الشركة في تقدير هامش ربح هذا المنتج ، فانه طالما ان هذا الخطأ في التقدير في الحدود السابقة فلا تأثير له على أمثلية الحل .

## ( ٢ ) التغيرات في معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية :

ان اسلوب التحليل الذي يستخدم لقياس أثر التغيرات في معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية ، سيختلف الى حد كبير عن الاسلوب الذي اتبعناه في حالة المتغيرات غير الأساسية ، ويرجع ذلك بسبب ان التغير

في أحد الاتجاهين (ارتفاعا أو انخفاضا) قد يؤدي الى تغير الحل الأمثل ، ففي حالة نموذج البرمجة الخطية

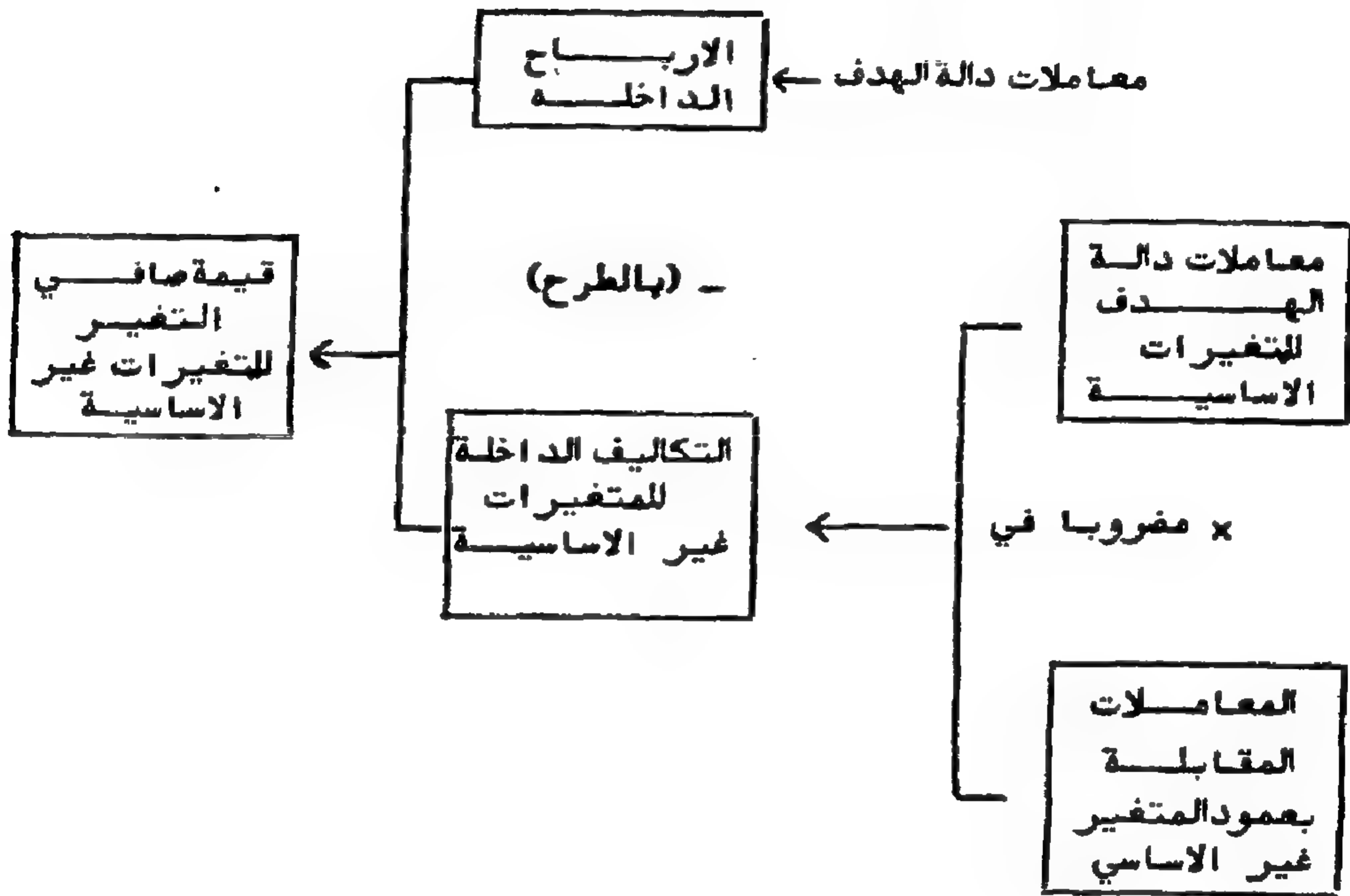
ذات هدف التعظيم ، فان الانخفاض فى معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى قد يودى الى أن يكون من المربح ان يحل أحد المتغيرات غير الاساسية محل ذلك المتغير ، ومن ثم يفقد الحل امثليته ، وفى الاتجاه الآخر ، فان زيـادة معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى ، قد يجعل ذلك المتغير مربح جدا ، الى الدرجة التى يتم فيها تحويل الطاقة المستخدمة فى انتاج احد المتغيرات الاساسية الاخرى الى . كذلك بالنسبة لمشاكل البرمجة الخطية ذات هدف التخفيض ولكن فى الاتجاه العكس .

نخلص مما سبق ان تحليل التغيرات فى معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ليست بالسهولة التى كانت عليها للمتغيرات غير الاساسية ، وفى رأينا ان السبب الرئيس لذلك ان صف التكاليف الداخلة يتأثر بصورة مباشرة بأي تغير فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية . وفى نفس الوقت فان صف التكاليف الداخلة ذات تأثير مباشر على قيمة صف صافى التغير الذى يحدد امثلية الحل .

وحتى يمكن ان نتفهم كيف يمكن حساب القيم الدقيقة للتغير الذى يمكن السماح به فى معاملات المتغيرات الاساسية فى دالة الهدف ؟ فاننا اولا نذكر القارئ أن جدول الحل الامثل لمشاكل البرمجة الخطية ذات هدف التعظيم يتسم بأن جميع قيم صف صافى التغير تكون سالبة و/أو صفرية . كما نسترجع مع القارئ أن هذه القيم يتم الحصول عليها من خلال طرح التكاليف الداخلة من معاملات دالة الهدف الاصلية وذلك لكل متغير من المتغيرات الواردة بصياغة المشكلة ، كما نذكر القارئ أن التكلفة الداخلة كان يتم حسابها عن طريق مجموع حوامل ضرب معاملات كل عمود فى معاملات دالة الهدف المقابلة للمتغيرات الاساسية ، وعلى ذلك فاذا حدث تغيير فى معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية ، فان



الآثر المباشر لذلك هو حدوث تغييرات في قيم التكاليف الداخلة للمتغيرات غير الأساسية ( فقط ولا يحدث ذلك للمتغيرات الأساسية ) ، ومن ثم فإن هذا التغير سينعكس أيضا على قيم صافي التغير لتلك المتغيرات غير الأساسية ، وقد يؤدي هذا الى ان يفقد الحل أمثليته ، والشكل التالي يوضح هذه الآثار :



وطالما ان قيم صافي التغير للمتغيرات غير الأساسية تظل سالبة أو صفرية يظل الحل أمثل دون تغيير ، وطالما ان هذه هي القاعدة ، اذن من خلالها واستنادا اليها يمكننا ايجاد حدود التغيرات في معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية عن طريق الحد الاقصى للتغيرات في كلا الاتجاهين والتي تبقى قيم صافي التغير لكل المتغيرات الأساسية سالبة أو صفرية . ويجدر ان ننوه هنا ان حساب الحد الاقصى للتغير لا يتم حسابه للمتغير غير الاساسي المعين فقط ولكن



يتحدد من خلال تأثير ذلك التغير على كافة المتغيرات غير الأساسية ، ثم بناء على ذلك يتم تحديد الحد الأقصى للتغير في الاتجاهين كما سيتبين فيما يلي :

ولنأخذ مثلا المتغير الأساسي ( س ٣ ) والسوارد بجدول السمبلكس الأخير في المشكلة السابقة ، فبالنظر الى هذا الجدول وبتخيل ما هو اثر احداث تغيير على معامل دالة الهدف لهذا المتغير الأساسي ( س ٣ ) على سبيل المثال ، وليكن هذا التغير بالزيادة ، ان التكاليف الداخلة بالاعمدة س ١ ، س ٢ ، س ٣ ، س ٤ لن تتأثر بهذه الزيادة لأنها متغيرات أساسية ، أما التكاليف الداخلة للاعمدة س ٤ ، س ٥ ، س ٦ ، س ٧ فستأثر بهذه الزيادة وترتفع قيمتها ، ومن هذا يؤثر على صافي التغير ، الأمر الذي قد يجعل احد هذه القيم تأخذ قيمة موجبة فيفقد الحل أمثليته .

وما دمنا نقوم بتحليل التغير في معامل دالة الهدف للمتغير الأساسي ( س ٣ ) ، فلنواصل التحليل حتى نعرف حدود التغير في معامل هذا المتغير دون تغير الحل الأمثل .

فيما يلي المتغير الأساسي ( س ٣ ) ومعاملات القيد المقابلة له بأعمدة المتغيرات غير الأساسية .

س ٣	س ٤	س ٥	س ٦	س ٧
٢	$\frac{٣}{٥}$	$\frac{١}{٢٥}$	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{٦}{٥}$

فاذا فرضنا ان معامل دالة الهدف للمتغير الأساسي ( س ٣ ) قد زاد بمقدار معين وليكن (  $\Delta$  ) . فان التكاليف الداخلة لكل متغير غير أساسي سوف تزيد بمقدار يعادل (  $\Delta \times$  معامل القيد لكل منها ) ، ولايجاد قيمة (  $\Delta$  ) التي تدفع بقيمة صافي التغير الى صفر

لأحد المتغيرات غير الأساسية ، فإننا ببساطة نضع قيمة التغير تعادل قيمة صافي التغير الحالية لذلك المتغير، ثم يتم حل المعادلات لإيجاد قيمة التغير (  $\Delta$  )، ومن جدول السمبلكس الأخير ، كانت قيم صافي التغير للمتغيرات غير الأساسية هي :

س ٨	س ٧	س ٥	س ٤	
٢٠٠٠-	٢٠٠٠-	٢٠٠-	١٠٠٠-	صافي التغير

أذن لإيجاد قيمة (  $\Delta$  ) نجعل قيمة حامل ضرب (  $\Delta$  )  $\times$  معامل التغير غير الأساسي ( س ٤ ) تعادل قيمة صافي التغير الحالية لذات المتغير ( س ٤ ) أي تساوى ( ١٠٠٠- ) أى تكون المعادلة كالتالي :

$$\text{قيمة التغير عند س ٤} = \Delta \times \frac{2}{5} = 1000 -$$

$$\Delta = \frac{5000}{3} - = \frac{5}{3} \times 1000 -$$

وهذه النتيجة تعنى انه اذا انخفض معامل دالة الهدف للمتغير الأساسي ( س ٣ ) بمقدار (  $\frac{5000}{3}$  ) ، فإن قيمة صافي التغير للمتغير غير الأساسي ( س ٤ ) ستكون صفراً ، وأي انخفاض أكبر من هذا فى معامل الهدف للمتغير س ٣ سيكون سبباً فى أن يكون للمتغير ( س ٤ ) قيمة صافي تغير موجبة مما يؤدي الى ان يفقد الحل والجدول الأخير أمثليته .

ولكن هل يمكن ان نعتبر ان النتيجة التـيـ وصلنا اليها فى الفقرة السابقة هى حدود التغير لمعامل دالة الهدف للمتغير الأساسي ( س ٣ ) ؟ لقد سبق القول انه لحساب هذه الحدود يتعين ان نختبر كل متغير من المتغيرات غير الأساسية ، فلربما يكون هناك متغير غير أساسي أكثر تحفزاً للتغير، اذن هذه الحدود لا يتم

تحديدها الا بعد حسابها لجميع المتغيرات غير الاساسية .  
ويمكن لتسهيل العمليات الحسابية المطلوبة  
لاستخراج قيمة (  $\Delta$  ) ان نطبق المعادلة التالية :

$\Delta$  للمتغير الاساسى (س) =  $\frac{\text{قيمة صافي التغير الحالى للمتغير غير الاساسى}}{\text{معامل القيد المقابل بعمود ذلك المتغير غير الاساسى امام المتغير الاساسى (س)}}$

$$\Delta \text{ س}_٣ \text{ مع المتغير غير الاساسى س}_٥ = \frac{١٠٠٠-}{\frac{٥}{٣}} = \frac{٥}{٣} \times ١٠٠٠- = \frac{٥٠٠٠}{٣} -$$

$$\Delta \text{ س}_٣ \text{ مع المتغير غير الاساسى س}_٥ = \frac{٢٠٠-}{\frac{١}{٢٥}} = \frac{٢٥}{١} \times ٢٠٠- = ٥٠٠٠- =$$

$$\Delta \text{ س}_٣ \text{ مع المتغير غير الاساسى س}_٧ = \frac{٢٠٠٠-}{\frac{٥}{٤}} = \frac{٤}{٥} \times ٢٠٠٠- = ٢٥٠٠- =$$

$$\Delta \text{ س}_٣ \text{ مع المتغير غير الاساسى س}_٨ = \frac{٢٠٠٠-}{\frac{٥}{٦}} = \frac{٦}{٥} \times ٢٠٠٠- = \frac{٥٠٠٠}{٣} - =$$

وهذه النتائج الاربعة السابقة تمثل حدود أو قيود على تغيرات معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى س<sub>٣</sub> ، لذلك فانه لايجاد الحد الاقصى للتغير فى المعامل الذى لايفقد معه الجدول النهائي للحل امثليته ، هو ذلك الحد أو القيد الذى يعتبر اكثر تحديدا أو اكثر احكاما، ويتسم تحديد ذلك بتعيين أصغر القيم للحدود السابقة بالموجب وبالسالب لأنهما سيمثلان حدود هذا التغير . وبالنظر الى القيم الاربعة السابقة وهى (  $\frac{٥٠٠٠}{٣} -$  ،  $٥٠٠٠ -$  ،  $٢٥٠٠ -$  ،  $\frac{٥٠٠٠}{٣} -$  ) : نجد انها جميعا قيما سالبة وهذا يعنى انه لا يوجد حد على مقدار زيادة معامل دالة الهدف للمتغير الاساسى ( س<sub>٣</sub> ) ، وبمعنى آخر يمكن زيادة معامل دالة الهدف لهذا المتغير دون أن يفقد الحل الحالى امثليته بل يستمر أمثل .

أما الحد الاقصى للتخفيض فهو أحد هذه القيم الاربعة ، ويتعين بطبيعة الحال أن تكون أصغر قيمة

بإشارة سالبة للتغير ( $\Delta$ ) وهي ( $-\frac{5000}{3}$ ) هي ذلك الحد الأقصى للتخفيض . وأي تخفيض أكثر من ذلك سيكون سببا في جعل قيمة صافي التغير لكل من المتغيرين غير الاساسيين س  $\epsilon$  ، س  $\delta$  موجبا ، وهذا يعنى فى حالة حدوثه ان الحل غير أمثل ويمكن تحسينه باختصار أي من س  $\epsilon$  ، أو س  $\delta$  كتغير داخل فى جولة تالية للحل . ويمكننا اجراء نفس العمليات الحسابية السابقة على كل من المتغير الاساسي ( س  $\rho$  ) ، والمتغير الاساسي ( س  $\sigma$  ) . وفيما يلى معاملات القيود للمتغيرات غير الاساسية فى كل من صف القيد المقابل للمتغير الاساسي ( س  $\rho$  ) وكذلك ( س  $\sigma$  ) -

	س $\epsilon$	س $\delta$	س $\rho$	س $\sigma$
س $\rho$	صفر	صفر	١-	صفر
س $\sigma$	صفر	صفر	صفر	١-

كذلك كانت قيم صافي التغير المقابلة هي :

	س $\epsilon$	س $\delta$	س $\rho$	س $\sigma$
صافي التغير	١٠٠٠-	٢٠٠-	٢٠٠٠-	٢٠٠٠-

وفيما نستخرج قيمة ( $\Delta$ ) لكل من معامل دالة الهدف للمتغير س  $\rho$  ، ثم للمتغير س  $\sigma$  .

المتغير الاساسي س  $\rho$  :

ونظرا لأن معاملات القيد للمتغيرات غير الاساسية س  $\epsilon$  ، س  $\delta$  ، س  $\rho$  صفرية ، فان هذا يعنى ان قيمة معامل الهدف للمتغير الاساسي ( س  $\rho$  ) ليس له تأثير مطلقا على قيمة صافي التغير لتلك المتغيرات غير

الاساسية ، لذلك نكتفى بحساب (  $\Delta$  ) للمتغير غير الاساسي س<sub>٧</sub> فقط كالاتي :

$$\Delta \text{ س } ١ \text{ مع المتغير غير الاساسي س } ٧ = \frac{٢٠٠٠}{١} = ٢٠٠٠$$

وهذا يعنى انه لى يبقى الحل الوارد بالجدول الاخير كما هو أمثل فينبغى الا يزيد معامل دالة الهدف للمتغير الاساسي س<sub>١</sub> بأكثر من ٢٠٠٠ جنيه (اشارة موجبة ) ، وليس هناك حدود على حجم انخفاض مساهمة ذلك المتغير ، وذلك لأنه لا أهمية لانخفاض مساهمة تلك السلعة ، والسبب فى ذلك ان القيمة المثلى لانتاج هذه السلعة في الحل الأمثل هي ٥٠٠٠ وحدة ولا يمكن ان تقل عن هذا الحد لأن هناك قيد بأن يكون الحد الأدنى للانتاج من س<sub>١</sub> هو ٥٠٠٠ وحدة .

#### المتغير الاساسي س<sub>٣</sub> :

نظرا لأن معاملات القيد للمتغيرات غير الأساسية س<sub>٤</sub> ، س<sub>٥</sub> ، س<sub>٧</sub> صفرية ، فان هذا يعنى انه لاتأثير مطلقا عليها من تغير معامل الهدف للمتغير الاساسي س<sub>٣</sub> لذلك نكتفى بحساب (  $\Delta$  ) للمتغير غير الاساسي س<sub>٨</sub> فقط كالاتي :

$$\Delta \text{ س } ٣ \text{ مع المتغير غير الاساسي س } ٨ = \frac{٢٠٠٠}{١} = ٢٠٠٠$$

وهذا يعنى ان حدود الزيادة القصوى ٢٠٠٠ ولاتوجد حدود قصوى للانخفاض .

والجدول التالي يقدم ملخصا لحدود التغير في معاملات دالة الهدف لكافة المتغيرات القرارية للمشال الذى نتناوله بالتحليل .



رمز المنتج	أقصى نسبة تخفيض	أقل معامل	المعامل الحالي	أكبر معامل	أقصى نسبة زيادة
س ١	بلا حدود	بلا حدود	٢٠٠٠	٤٠٠٠	٪١٠٠
س ٢	٪٣٣٣	٣٣٣٣	٥٠٠٠	بلا حدود	بلا حدود
س ٣	بلا حدود	بلا حدود	٤٠٠٠	٦٠٠٠	٪٥٠
س ٤	بلا حدود	بلا حدود	٢٠٠٠	٣٠٠٠	٪٥٠

وبالنظر الى بيانات هذا الجدول يمكن القول انه برغم ان النسب المئوية متفاوتة بعض الشيء الا انها جميعا مرتفعة نسبيا . وهذا الوضع يعطى متخذ القرار درجة عالية من الثقة فى الحل الأمثل الذى تم التوصل اليه .

### ثانيا : تحليل التغيرات فى طاقة الموارد :

#### Analyzing Changes In the Resource Capacities

الجزء الثاني من تحليل الحساسية هو الذى يتناول تأثير التغيرات فى طاقة الموارد، أو قيم الجانب الايسر لقيود المشكلة، وهو ما نطلق عليه فى كثير من الأحيان ثوابت القيود ، بمعنى تحليل حساسية الحل الأمثل للتغيرات فى مقدار الموارد المتاحة لسبب أو لآخر ، كوجود نقص مؤقت وغير متوقع فى الطاقة الآلية لانقطاع التيار الكهربائى أو لاحتياج الآلات الى قطع غيار ، أو لاعطال غير متوقعة . أو لأي سبب يترتب عليه تغير فى تلك الطاقات . والادارة تريد ان تقف تماما على تأثير هذا النقص فى الطاقة على الحل الأمثل ، أو تأثير الزيادة المؤقتة فى الطاقة والتي يمكن احداثها عن طريق التشغيل لاورات اضافية أو ورديات عمل اضافية .

وفيما يلى نوضح كيف يمكن استخدام جدول السمبلكس الاخير ( الحل الأمثل ) فى تحليل أثر التغيرات فى طاقة

الموارد المتاحة . ولهذا الغرض فاننا سوف نعود ثانيا  
الى تصوير جدول السمبلكس الاخير للمشكلة التى كنا  
نعالجها في بداية هذا الفصل والذى كان يأخذ الشكل  
التالى :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية					الهدف	التغيير صافى	التكاليف الداخلية					المتغيرات الاساسية
	القيمة	الارباح الداخلية	٢٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	٢٠٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠	صفر	صفر	صفر	
٤٠٠٠	٣	٣	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	١٩٦	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	٢٨ ٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
١٠٠٠٠	٣	٢١٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	١ ٢	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	٣ ٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	٤	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	٤ ٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
٢٠٠٠	٣	٦ ٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٣

جدول السمبلكس الاخير ( الحل الأمثل )

وبطبيعة الحال فان تحليل التغيرات في طاقة الموارد تتعامل بصفة أساسية مع كل من المتغيرات التي تمثل الطاقات العاطلة ( المتغيرات الراكدة ) ، وكذلك المتغيرات التي تمثل الزيادة في طاقات الموارد ( المتغيرات المضافة ) لمقابلة الاحتياجات ، أي ان تحليل حساسية طاقة الموارد تتم من خلال المتغيرات الراكدة Slack Variables والمتغيرات المضافة Surplus Variables والتي يتضمنها كل قيد من قيود المشكلة . وفيما يلي تناول تحليلنا لهذين النوعين من المتغيرات مبتدئين بالمتغيرات الراكدة ثم نتبعها بتحليل المتغيرات المضافة .

#### (١) المتغيرات الراكدة Slack Variables

سبق ان تناولنا ماذا تعنى المتغيرات الراكدة وذلك عند التعرض لخطوات حل نماذج البرمجة الخطية ، وذكرنا ان المتغير الراكد هو ذلك المتغير الذى يتسم اضافته الى الجانب الايمن للقيد (  $\geq$  ) وذلك لتحويل القيد من متباينة الى معادلة ، وان المتغير الراكد يمثل الطاقة غير المستغلة فى ذلك القيد .

وفي المثال الذى نحن بصدده الآن نتذكر اننا قمنا بتحويل المتباينتين الاولى والثانية واللتي كانت اشارتهما (  $\geq$  ) باضافة متغير راكد لكل منهما لتحويلهما الى معادلتين ، فلقد أضفنا الى المتباينة الاولى المتغير الراكد  $s_1$  ، وهو المتغير الذى تضمنته معادلة قسم التصنيع (  $20s_1 + 25s_2 + 30s_3 + 15s_4 + s_5 = 900$  ) .

وكذلك أضفنا الى المتباينة الثانية المتغير الراكد  $s_2$  ، وهو المتغير الذى تضمنته معادلة التجميع (  $20s_1 + 20s_2 + 12s_3 + 10s_4 + s_6 = 900$  ) .

ويمكننا اختبار حساسية الحل الأمثل للتغيرات في طاقات قسم التصنيع ، وقسم التجميع بتحليل وضع المتغير الراكد بكل قيد من القيود الممثلة لتلك الطاقات .

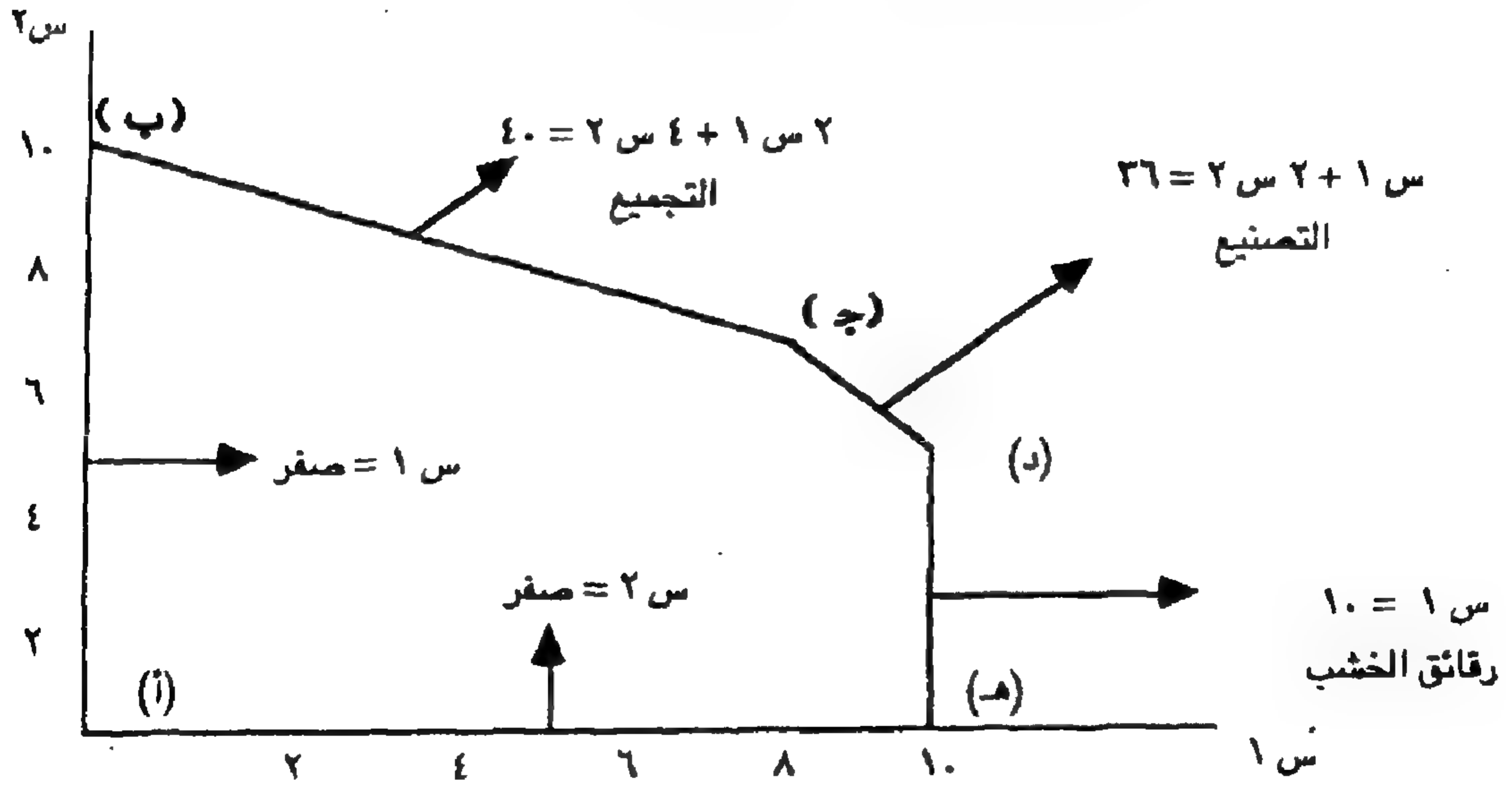
الا انه يتبين من جدول الحل الأمثل السابق أن وضع كل من المتغيرين الراكدين  $s_6$  ،  $s_7$  يختلف عن بعضها البعض ، ففي حين ظهر المتغير الراكد  $s_7$  كمتغير اساسي ، ظهر المتغير  $s_6$  كمتغير غير اساسي . ولهذا ولأغراض التحليل يتعين تناول كل منهما على حدة بسبب الصفة التي يتسم بها كل منهما ، ونتناول أولا حالة المتغير الراكد الاساسي (  $s_7$  ) .

#### أ - المتغيرات الراكدة الاساسية Basic Slack Variables

حيث ان المتغيرات الراكدة بصفة عامة تمثل مقدار الزيادة في الطاقة، او الطاقة غير المستغلة بذلك القيد ، وظهور المتغير الراكد كمتغير اساسي بالحل الأمثل يعنى بالفعل وجود طاقة عاطلة وغير مستغلة في القيد الذي أضيف اليه هذا المتغير الراكد، وحيث أن المتغير الراكد (  $s_7$  ) ظهر كمتغير اساسي بجدول الحل الأمثل وبقيمة مقدارها ١٩٦ ساعة فان ذلك يعنى ان هناك طاقة غير مستغلة في طاقة التجميع التي يمثلها هذا المتغير، اذن المنطق يحتم ان نعرف بحقيقة انه طالما ان طاقة التجميع يوجد بها حاليا طاقة عاطلة غير مستغلة مقدارها ١٩٦ ساعة يمثلها المتغير الراكد الاساسي (  $s_7$  ) ، فان أي اضافة لطاقة قسم التجميع لن تؤدي الى ان يفقد الحل أمثليته، ولكن الأثر الذي ستركه هذه الزيادة هو زيادة مقدار الطاقة العاطلة عما هي عليه حاليا، أي زيادة قيمة المتغير الراكد (  $s_7$  ) بذلك المقدار الاضافي للطاقة، فاذا أضفنا ١٠ ساعات مثلا زيادة الى طاقة قسم التجميع فأصبحت ٩١٠ ساعة بدلا من ٩٠٠ ساعة، فان الحل الأمثل لن يتغير ، ولكننا

سنجد ان قيمة المتغير الراكد الاساسي ( س ٢ ) سترتفع من ١٩٦ ساعة الى ٢٠٦ ساعة ، وهذه الزيادة تمثل الساعات الاضافية التي زيدت بها الطاقة الاصلية لقسم التجميع .

ويمكن ان نقرب هذا المفهوم ونوضحه أكثر اذا ما قمنا بتصوير ذلك الأمر بيانيا . يذكر القارىء عندما تناولنا الاسلوب البياني لحل مشاكل البرمجة الخطية ، وقمنا بحل مثال بسيط يتناسب مع هذا الاسلوب ، وكان يمثل مشكلة شركة القاهرة للصناعات الهندسية ، وكانت تنتج منتجين هما : س ١ ، س ٢ ، ولديها ثلاث قيود على الانتاج هي قيد تصنيع ، قيد تجميع ، قيد رقائيق الخشب ، وكانت صورة المشكلة بعد تمثيلها بيانيا كالاتي :



ووجدنا ان نقطة الحل الأمثل هي النقطة (ج) وفيها يتم انتاج ٨ وحدات من س ١ ، ٦ وحدات من س ٢ ، وتوجد وحدتين فائضتين من رقائيق الخشب ، أي أن هناك زيادة في عدد رقائيق الخشب أكثر مما يتطلبه الانتاج ، أي هناك



طاقة فائضة أو عاطلة . وهذا معناه ان طاقة القيد لم تستنفذ بالكامل ، فماذا يكون عليه الوضع فرضا لو قمنا بشراء المزيد من رقائق الخشب وأصبح لدينا المزيد المتوافر منها ، هل هذا يجعل الحل الأمثل ينتقل من النقطة (ج) الى نقطة طرفية اخرى ، لو قمنا بتخيل ذلك بيانيا وزدنا عدد الوحدات المتاحة من رقائق الخشب الى ١٢ وحدة مثلا ، عندئذ فان الخط المستقيم الممثل لرقائق الخشب سيتحرك يمينا الى مستوى ١٢ وحدة ، سنجد ان نقطة الحل الأمثل لم تتأثر بسبب انها نقطة تقاطع قيد التصنيع وقيد التجميع ومن ثم تتأثر بأي زيادة في أي منهما ولكنها لا تتأثر بزيادة رقائق الخشب . أي انه يمكن ان نصل الى القاعدة التالية :

#### قاعدة :

" اذا كانت طاقة القيد المتاحة لم تستنفذ بكاملها في الحل الأمثل فإن أي زيادة في طاقة ذلك القيد لن تؤثر على امثلية الحل . "

وحيث ان المتغير الراكد الاساسي ( س<sub>٦</sub> ) يمثل وجود طاقة غير مستغلة في مثالنا هذا مقدارها ١٩٦ ساعة في قسم التجميع فان هذا يعنى ان طاقة قسم التجميع لم تستنفذ بكاملها وبناء على القاعدة السابقة فان أي زيادة في طاقة ذلك القيد لن تؤثر على امثلية الحل .

هذا بالنسبة لحدود الزيادة ، أما مايتعلق بحدود التخفيض في طاقة القسم الذى يوجد به فائض في الطاقة هل يمكن ايضا ان تنخفض بلا حدود دون أن يتغير الحل الأمثل ؟ للإجابة على ذلك فلنلق نظرة على الرسم البياني السابق ، ولنرى ماهو أثر تخفيض وحدات رقائق الخشب عما هي عليه ( ١٠ وحدات حاليا ) ، ان تخفيض عدد وحدات رقائق الخشب بمثابة انتقال خط رقائق الخشب في اتجاه نقطة الحل الأمثل ، اذ يمكن تخفيضه ليعمل الى ٩ وحدات

دون تأشير ، والى ٨ وحدات . وفى هذه الحالة سيمر بنقطة الحل الأمثل ، ولكن ماذا لو زدنا التخفيض عن وحدتين . فمثلا أصبحت عدد وحدات رقائق الخشب سبعة فقط ، ان ذلك معناه خروج النقطة ج من منطقة الحلول الممكنة أي انها فقدت أمثليتها وستظهر نقطة حل أمثل أخرى . وهذا يعنى ان الحد الاقصى للانخفاض فى طاقة رقائق الخشب هو عدد ٢ وحدة فقط ، أما اذا انخفضت بما يزيد عن ذلك فان الحل الأمثل سيتغير حتما ، وهذا يدعونا أن نضع القاعدة التالية :

#### قاعدة :

" اذا لم تستنفذ طاقة القيد بكاملها فى الحل الأمثل ، فان عدد الوحدات التى لم تستغل تمثل الحد الاقصى الذي يمكن ان تنخفض به طاقة ذلك القيد دون أن يفقد الحل أمثليته . "

وبالانتقال الى جدول السبلكس الاخير الحالي فان التساؤل هو : ماهو ذلك القدر الذى يمكن ان تنخفض به طاقة التجميع دون أن يتغير الحل الأمثل ؟ للإجابة على ذلك نقول انه قد اتضح ان طاقة هذا القسم لم تستنفذ بالكامل فى الحل الأمثل ، ولهذا ظهر المتغير الراكد المتعلق بهذا القيد ( س ٧ ) كمتغير أساسي بقيمته مقدارها ١٩٦ ساعة ، أي أن الطاقة العاطلة غير المستغلة بقسم التجميع ١٩٦ ساعة ، وعليه يمكن تخفيض طاقة هذا القسم بهذا العدد من الساعات دون ان يتغير الحل الأمثل ولن نتمكن من اجراء تخفيض أكثر من ذلك ، لأنه لو حدث سيجعل المتغير س ٧ وهو متغير أساسي يأخذ قيمة سالبة ، وهذا بطبيعة الحال وضع غير ممكن لأن المتغيرات الراكدة السالبة القيمة تمثل استخدام قدر يزيد عن طاقة المورد المتاح ، وهذه حالة تخيلية وغير ممكنة واقعيا . وتلخيصاً لما تقدم يمكن وضع القاعدة التالية :

" إذا كان المتغير الراكد متغيرا أساسيا في جدول الحل الأخير ، فإن طاقة القيد الذى يتضمن هذا المتغير يمكن ان تزيد بأي مقدار ، أو تنخفض بمقدار يعادل قيمته في جدول الحل الأخير دون ان تتغير أمثلية الحل بذلك الجدول." .

وتطبيقا لتلك القاعدة على حالة المتغير الراكد الاساسي ( س ٦ ) ، يمكن القول بأن الحل الذى يمثلـه الجدول الاخير يظل أمثلا مهما زادت طاقة التجميع المتاحة ، أو انخفضت بحيث لاتقل عن ٧٠٤ ساعة ، وهى تعادل الطاقة المتاحة حاليا بهذا القسم وهى ٩٠٠ ساعة مخصوما منها الحد الاقصى للتخفيض وقدره ١٩٦ ساعة ( ٩٠٠ - ١٩٦ = ٧٠٤ ساعة ) .

#### ب ( المتغيرات الراكدة غير الاساسية

##### Non Basic Slack Variables

يظهر من جدول السمبلكس الاخير السابق ان المتغير الراكد ( س ٥ ) وهو المتغير المتمم لقيد طاقة التصنيع انه متغير راكد غير اساسي ، حيث أنه لم يظهر تحت عمود المتغيرات الاساسية ، وعليه فانه غير اساسي ذات قيمة صفرية ، وهذا يعنى ان كامل طاقة التصنيع قد استغلت فى انتاج المتغيرات القرارية الاساسية ( س ١ ، س ٢ ، س ٣ ) ، ولاتوجد طاقة عاطلة فى هذا القسم ، وبناء على ذلك فان أي زيادة أو انخفاض في طاقة التصنيع سوف تؤدي الى تغيير قيم تلك المتغيرات الاساسية وهذا معناه ان الحل بالجدول الاخير سيفقد امثليته ويحتاج الى الدخول فى جولة تالية للحل بفرض الوصول مرة أخرى الى حل أمثل جديد .

وقبل الدخول فى تفاصيل التحليل من واقع جدول السمبلكس ، فقد يكون من المفيد أن نلقى نظرة سريعة

على مغزى مقدمة هذا الجزءء بالتطبيق على الشكل البياني السابق لنقف فعلا على هذه الحقيقة التى أظهرتها السطور السابقة .

اذ بمراجعة الرسم البياني السابق والذى اتضح منه قبل ذلك انه يمكن لخط قيد رقائق الخشب أن يتحرك يمينا ( فتزاد قيمته ) بلا تأثير ، وان تنخفض قيمته أي يتحرك الى اليسار ولكن يحد اقصى وحدتين، والسؤال الآن وماهو الوضع بالنسبة لقيد التصنيع أو قيد التجميع؟ لقد تبين ان الحل الامثل فى النقطة (ج) وهي نقطة تقاطع خطي التصنيع والتجميع وطاقتهما عند هذه النقطة مستغلة بكاملها ، فاذا حدث ان زادت أو انخفضت طاقة التصنيع بأي مقدار فان نقطة التقاطع ستتغير اي أن الحل الأمثل سيتغير ، كذلك الامر بالنسبة لطاقة التجميع فأي زيادة أو أي انخفاض سيترتب عليه وعلى الفور أن يفقد الحل الحالى امثليته . وهذا بلاشك واضح تماما من الرسم البياني ويؤكد ماقلناه في بداية هذا الجزء .

وعودة مرة اخرى الى جدول السمبلكس الأخير لنواصل تحليلنا ، اذ انه من المفيد بعد أن تيقنا بأن أي زيادة أو انخفاض فى طاقة قسم التصنيع (المستغلة بكاملها ) سيترتب عليها ان يفقد الحل الحالى امثليته ، ان يمتد بنا التحليل لنحدد الحد الاقصى والحد الأدنى لزيادة أو انخفاض تلك الطاقة والتى لن تؤثر على المزيج الانتاجى ( بصرف النظر عن كمية كل منها فى هذا المزيج ) ، وبمعنى آخر فاننا نتساءل بأي مقدار يمكن ان تتغير طاقة التصنيع ( معودا أو هبوطا ) قبل أن يحل أحد المتغيرات غير الاساسية ، محل بعض المتغيرات الاساسية الحالية ؟

ان الاجابة على هذا التساؤل الهام والضروري لمتخذ القرار ، تتطلب أولا تمهيدا لتوضيح وتفسير معنى



معاملات القيد في عمود المتغير الراكد غير الأساسي (س هـ) ، وعلاقتها بقيم الحل للمتغيرات الأساسية المقابلة لكل منها . فمن الجدول الأخير للحل يمكن نقل الأعمدة الثلاثة التالية بفرض هذا التوضيح .

المتغيرات الأساسية	القيم	س هـ
س ٢	$28 \frac{2}{5}$	$\frac{1}{25}$
س ٦	١٩٦	$-\frac{4}{5}$
س ١	٥	صفر
س ٣	٣	صفر

ان كل معامل في عمود (س هـ) يمثل مقدار ما سيتم التخلي عنه من المتغير الأساسي المقابل لهذا المعامل وذلك مقابل زيادة مقدارها وحدة واحدة للمتغير الراكد غير الأساسي (س هـ) ، مع ملاحظة ان العامل الموجب يشير الى مقدار التخفيض الذي يحدث في المتغير الأساسي اذا ما تم زيادة المتغير غير الأساسي (س هـ) ، بمقدار وحدة واحدة ، أما العامل السالب فانه يمثل العكس ، ولتوضيح ذلك بصورة أبسط ، نقول ان زيادة المتغير س هـ بمقدار وحدة واحدة معناه زيادة الطاقة العاطلة للقسم الذي يمثله ذلك المتغير ، وزيادة الساعات العاطلة بمقدار وحدة واحدة ، نجد أنه يتسبب في تخفيض كمية انتاج المتغير القراري الأساسي (س ٣) بمقدار  $\frac{1}{25}$  وحدة ، كما يؤدي الى زيادة الطاقة العاطلة والتي يمثّلها المتغير الأساسي (س ٦) بمقدار  $\frac{4}{5}$  وحدة ، اذن الإشارة الموجبة تعني تخفيض المتغير الأساسي ، والإشارة السالبة تعني الزيادة للمتغير الأساسي .



وعلى ذلك يمكن ان ننظر الى التغيرات في طاقة التصنيع كزيادة او نقص في قيمة المتغير الراكد (س<sub>٥</sub>) ، فمثلا ماذا يحدث لو انخفضت طاقة التصنيع الى ٨٠٠ ساعة بدلا من ٩٠٠ كما هي الآن ؟ ان ذلك معناه ان المتغير الاساسي (س<sub>٦</sub>) سينخفض بمقدار ٤ وحدات عما هو عليه في الجدول الأخير (  $100 \times \frac{1}{20} = 5$  وحدة ) أي تصبح س<sub>٦</sub>  $24 \frac{2}{5}$  وحدة (  $28 \frac{2}{5} - 4 = 24 \frac{2}{5}$  ) ، وبالمثل اذا زادت طاقة التصنيع بمقدار ١٠٠ ساعة عما هي عليه ، أي كانت ١٠٠٠ ساعة ، فان القيمة الاخيرة للمتغير الاساسي س<sub>٦</sub> ستخفض بمقدار ٨٠ وحدة (  $100 \times \frac{4}{5} = 80$  وحدة ) أي تصبح ١١٦ بدلا من ١٩٦ .

استطعنا الآن بعد التوضيح السابق ان نقف على الأثر الذي يتسبب عن زيادة أو تخفيض المتغير الراكد غير الاساسي بوحدة واحدة على المتغيرات الاساسية وكيف يكن حساب هذا الأثر ، ولذلك واستنادا الى هذا الفهم سنمضي في التحليل الذي نريد ان نقف منه على الحد الاقصى للتغيرات في طاقة التصنيع ، والتي لن تؤدي الى تغير وضع المتغيرات الاساسية ، وان كانت ستتغير قيمة كل منها نتيجة هذا التغير ، ولكن نريد الا يهل هذا التغير الى الحد الذي تتغير فيه صفة هذه المتغيرات الاساسية ، بل ان ينقلب احدها مثلا ليصبح غير اساسي هذا طبعا اذا وصلت قيمته الى الصفر .

كما رأينا قبل ذلك فان تخفيض طاقة التصنيع بساعة واحدة سيتسبب في تخفيض المتغير الاساسي (س<sub>٦</sub>) بمقدار  $\frac{1}{20}$  وحدة ، ويمكن تخفيض طاقة التصنيع الى الحد الذي لا تصبح معه قيمة (س<sub>٦</sub>) سالبة حتى لا يتغير المزيج الانتاجي من المتغيرات القرارية الاساسية الحالية ، وعلى ذلك يمكن حساب الحد الاقصى الممكن ان يتم به تخفيض ساعات التصنيع ، عن طريق تحديد الحجم الذي يمكن أن تنخفض به طاقة التصنيع والتي تجعل قيمة المتغير س<sub>٦</sub> صفرية ، ومن ثم فان اي تخفيض زيادة عن ذلك الحد

سيدفع بقيمة س<sub>٢</sub> ان تأخذ قيمة سالبة .

فاذا افترضنا ان ( ب ) تمثل الحد الاقصى للتغير في طاقة التصنيع الاصلية ، اذن يمكننا ان نحصل على قيمة ( ب ) طبقا للمعادلة التالية :

$$٧١٠ - = \frac{٢٥}{١} \times \frac{١٤٢}{٥} - = \frac{٢٨ \frac{٢}{٥}}{١} - = ب$$

ويلاحظ انه من الضروري وضع الاشارة السالبة في المعادلة حتى يمكن ان تشير القيمة النهائية الناتجة من تطبيق المعادلة الى الاتجاه الصحيح للتغير الممكن، ولذلك فانه وفقا للنتيجة السابقة ، فان طاقة التصنيع لايمكن ان تنخفض أكثر من ٧١٠ ساعة حتى تظل المتغيرات الاساسية مثالية .

وحيث اننا مازلنا لدينا اربعة متغيرات اساسية (س<sub>١</sub>، س<sub>٢</sub>، س<sub>٣</sub>) ، ولقد سبق حساب اثر التغير في الطاقة على المتغير الاساسي ( س<sub>٢</sub> ) ، فيتبقى اذن ثلاثة منها، الا أننا نلاحظ ان اثنتين منها لها قيم صفرية بعمود ( س<sub>٥</sub> ) وهذا يشير الى انهما لايتأثران اطلاقا بطاقة التصنيع ارتفاعا أو انخفاضاً ولهذا فلاداعي لاجراء اي عمليات حسابية لهما ، لذلك يستلزم الامر حساب هذا التغير للمتغير الاساسي ( س<sub>٢</sub> ) وفقا للمعادلة التالية :

$$= \frac{\text{قيمة الحل الاخير للمتغير الاساسي}}{\text{معامل قيد ذلك المتغير الاساسي بعمود التغير غير الاساسي}}$$

$$٢٤٥ = \frac{٥}{٤} - \times ١٩٦ - = \left( \frac{١٩٦}{\frac{٤}{٥}} - \right) =$$

ومعنى ذلك ان الحد الاقصى للزيادة في طاقة قسم التصنيع ( لاحظ الاشارة الموجبة ) هي ٢٤٥ ساعة دون ان يتغير وضع المتغيرات الاساسية .

خلاصة ماتقدم ان النتائج التى تم التوصل اليها تبين بوضوح انه يمكن ان تنخفض طاقة التصنيع الى ١٩٠ ساعة (٩٠٠ - ٧١٠) ، أو تزيد الى ١١٤٥ ساعة (٩٠٠ + ٢٤٥) دون ان يتغير وضع المتغيرات الاساسية بالجدول الأخير وان كانت قيمها ستتغير .

ولكن ماهو الموقف اذا وجدنا اكثر من قيمة للمعامل ( ب ) باشارة سالبة ، واكثر قيمة لها باشارة موجبة، أي اكثر من حد سالب و / أو اكثر من حد موجب في طاقة التصنيع ؟ اذا واجهنا هذا الموقف وكنا نريد أن نحدد حدا أقصى للزيادة وكذلك للانخفاض ، فانه ينبغي ان نختار أصغر تغير موجب وأصغر تغير باشارة سالبة واعتبارهما كقيود على تغيرات الطاقة وذلك باعتبارهما قيودا اكثر تحديدا ، فمثلا اذا وجدنا ان قيم ( ب ) للمتغيرات الاساسية كالآتي :

$$- ٧١٠ ، + ٢٤٥ ، - ١٤٠ ، + ٥٠$$

عندئذ يمكن القول ان طاقة التصنيع يمكن ان تزيد بما لايتجاوز ٥٠ ساعة ، أو تنخفض بما لايزيد عن ١٤٠ ساعة ، وذلك اذا كان المطلوب هو ان تبقى الاوضاع النهائية للمتغيرات الاساسية كما هي فى الجدول الأخير ولا تتغير بأن تصبح غير أساسية .

من ناحية أخرى ، نود أن نؤكد هنا مرة أخرى ، ان الحدود السابقة وان كانت تبقى الاوضاع النهائية للمتغيرات الاساسية كما هي مثلى ( نفس نوعية المزيج الانتاجي ) ، إلا أن ذلك لايعنى ان تظل قيمة الهدف على ما هي عليه فى الجدول الأخير ، لأنه سبق القول أن أي تغير بالزيادة أو الانخفاض سوف يؤدي الى تغيير قيم تلك المتغيرات الاساسية والحدود التي ذكرناها تبقى فقط على نوعية المزيج الانتاجي الأخير ولكن لا تبقى على قيم المتغيرات القرارية المثلى لذلك المزيج ، لذلك فان قيمة دالة

الهدف لابد وان تتغير .

مثال تطبيقي :

بفرض ان طاقة التصنيع قد زادت الى ١١٤٥ ساعة بدلا من ٩٠٠ ساعة وذلك عن طريق تشغيل قسم التصنيع وقتا اضافيا ، فما هي القيم المثلثى الأخيرة التي ستأخذها المتغيرات الأساسية ؟ وما هو الحد الاقصى الذي تقبل أن تدفعه المنشأة نظير ذلك الوقت الاضافي . ؟

الحل :

حيث ان طاقة التصنيع ستزداد من ٩٠٠ ساعة الى ١١٤٥ ساعة ، اذن مقدار الزيادة في الطاقة = ١١٤٥ - ٩٠٠ = ٢٤٥ ساعة .

ولايجاد قيم المتغيرات الأساسية بعد هذه الزيادة يتم ضرب مقدار هذه الزيادة في كل معامل من معاملات المتغيرات الأساسية بعمود ( س<sub>٥</sub> ) وهو المتغير الراكذ المتمم لقيد التصنيع ، ويضاف حاصل الضرب الى قيمة المتغير الأساسي الحالية .

$$\begin{aligned} \bullet \bullet \bullet \text{ قيمة س}_٢ \text{ بعد هذا التعديل} &= ٢٨ \frac{٢}{٥} + \left( \frac{١}{٢٥} \times ٢٤٥ \right) = ٣٨ \frac{١}{٥} \\ \text{وبالمثل فان قيمة س}_١ \text{ بعد هذا التعديل} &= ١٩٦ + \left( \frac{٤}{٥} \times ٢٤٥ \right) = \\ &= \text{مفر} \end{aligned}$$

أما قيمة س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> فلا تتغير لأن معاملها بعمود ( س ) = مفر ومن ثم فان قيمة دالة الهدف ايضا ستصبح بعد هذا التعديل:

$$= ١٦٤٠٠٠ + ٢٤٥ \left( \frac{١}{٥} \times ١٠٠٠ \right) = ٢١٣٠٠٠ \text{ جنيه}$$

ومعنى ذلك ان زيادة طاقة التصنيع بما مقداره ٢٤٥ ساعة سيؤدي الى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار ٤٩٠٠٠ جنيه ( ٢١٣٠٠٠ - ١٦٤٠٠٠ ) ، وبناء على ذلك فان الحد الاقصى الذي تقبل الشركة دفعه مقابل وقت اضافي مقداره ٢٤٥ ساعة هو ٤٩٠٠٠ جنيه أي ٢٠٠ جنيه للساعة الواحدة (  $\frac{٤٩٠٠٠}{٢٤٥} = ٢٠٠$  جنيه ) .



## (٢) المتغيرات المضافة Surplus Variables

بعد ان استعرضنا في السطور السابقة المتغيرات الراكدة ، سنتناول فيما يلي المتغيرات المضافة، ونود أن نؤكد من البداية ان طريقة معالجة المتغيرات المضافة لا تختلف عن الطريقة التي عالجنا بها المتغيرات الراكدة، وكل الاختلاف هو تفسير تلك التغيرات ، اذ يتم اضافة المتغير المضاف الى كل قيد أكبر من أو يساوي (  $\leq$  ) ، وذلك ليمثل الحد الأدنى للزيادة عن المطلوب ( طاقة القيد ) وحيث أننا نتناول اختبار حساسية طاقة القيود ، لذلك لابد من تناول تحديد تأثيرات التغيرات في تلك الحدود الدنيا ، من ناحية اخرى فقد يظهر من الجدول الأخير أن المتغير المضاف قد اخذ صفة المتغير الاساسي، أو صفة المتغير غير الاساسي ، لذلك يختلف التحليل باختلاف صفة التي اكتسبها المتغير المضاف ، وفيما يلي نتناول كلا النوعين من المتغيرات المضافة .

١ ( المتغيرات المضافة الأساسية

## Basic Surplus Variables

اذا تبين ان المتغير المضاف قد ظهر في جدول الحل الأخير كمتغير اساسي ، فان هذا يعنى ان القيمة التي اخذها ذلك المتغير في جدول الحل الأخير تعادل الزيادة أو الفائض الناتج من ذلك الحل عن الحد الأدنى للاحتياجات المطلوبة ، لذلك فان اي تخفيض في مستوى هذا الحد الأدنى للاحتياجات لن يؤثر على الحل الأخير، وسيظهر أثر التخفيض في طاقة القيد على قيمة المتغير المضاف الاساسي القابل لهذا القيد وبمقدار ذلك التخفيض .

فمثلا اذا كان هناك قيد بأن يكون حجم انتاج المنتج ( س ) لا يقل عن ٥ وحدات ، ثم تبين ان الحل الأمثل قد تخطى هذا الحجم بانتاج ٧ وحدات ، عندئذ سنجد أن المتغير المضاف المقابل لهذا القيد ستكون قيمته ٢ وحدة ، بمعنى ان هناك زيادة أو فائض عن الحد الأدنى المطلوب ،



في هذه الحالة نقول ان أي تخفيض في طاقة القيد الممثل لهذا الحد الأدنى لن يؤثر على الحل الأخير، لأن هـذا التخفيض لن يعمل الا على زيادة المتغير المضاف الاساسي عما هو عليه وهذا لن يؤثر على امثلة الحل .

ومن ناحية اخرى فان زيادة الحد الأدنى للاحتياجات ( طاقة القيد ) ، ستؤدي بلا شك الى انخفاض في قيمة المتغير المضاف الاساسي ، ومن ثم فان الحد الاقصى لزيادة طاقة هذا القيد ( الحد الأدنى للاحتياجات ) لا يتعين أن تزيد عن قيمة المتغير المضاف في الجدول الأخير، اذ انها لو زادت بأكثر من ذلك ، أي بأكثر من قيمة المتغير المضاف الاساسي فان هذا يؤدي الى ان تصبح قيمة المتغير المضاف الاساسي بالسالب لأن مقدار الانخفاض كان أكبر من قيمته الحالية ، وهذا غير جائز .

وتأسيسا على ماتقدم يمكن وضع القاعدة التالية :

قاعدة :

" يمكن تخفيض مستوى الحد الأدنى للاحتياجات بأحد القيود ( طاقة القيد ) بأي مقدار، او زيادته بحد أقصى بمقدار قيمة المتغير المضاف الاساسي المقابل لهذا القيد بجدول الحل الأخير ، دون أن يؤثر ذلك على أمثلة هذا الحل " .

وبالنظر الى الجدول الأخير يتبين انه لم يظهر به اي متغير مضاف اساسي، ولهذا سنكتفى بالتحليل والقاعدة السابقة في التعامل مع هذه النوعية من المتغيرات حينما تظهر في جدول السمبلكس الأخير ، ومن ثم ننتقل فـي تحليلنا التالي الى المتغيرات المضافة غير الاساسية .

#### ب ) المتغيرات المضافة غير الاساسية

Nonbasic Surplus Variables

تشابه طريقة تحليل المتغيرات المضافة غير الاساسية مع الطريقة التي سبق ان اتبعناها في تحليل المتغيرات

الراكدة غير الأساسية . إذ أن المتغير عندما يكون متغيراً غير أساسياً في جدول الحل الأمثل فإن ذلك يعني أن قيمته صفر ، وهذا يعني بطبيعة الحال أن الحد الأدنى المطلوب للقيد الذي يوجد به هذا المتغير المضاف قد تم تحقيقه تماماً دون زيادة أو نقصان ، ونتيجة لذلك فإن أي زيادة أو أي انخفاض للحد الأدنى المطلوب لهذا القيد حتماً سيؤدي إلى حدوث تغييرات في الحل الأخير . وسيكون اهتمامنا فيما يلي منصب على تحديد حدود التغيرات التي بعدها يترتب عليه تغير وضع المتغيرات الأساسية ، أو بمعنى آخر .... ماهي حدود التخفيض مثلاً في الحد الأدنى للقيد دون أن يصبح أيًا من المتغيرات غير الأساسية متغيرات أساسية؟ وماهي حدود الزيادة كذلك التي تتسبب في ظهور هذه الحالة؟

للإجابة على هذا التساؤل وبغرض تحديد الحد الأقصى للتغيرات ( زيادة أو انخفاضا ) المسموح بها للحد الأدنى ( لطاقة القيد ) المقابل لكل متغير مضاف غير أساسي ، نحتاج لاختبار تأثير مثل تلك التغيرات في قيمة المتغيرات الأساسية .

على سبيل المثال ، المتغير المضاف غير الأساسي ( س ٧ ) ، والمقابل لقيد تحديد أقل مستوى إنتاج مسن المتغير القراري ( س ١ ) بعدد ٥ وحدات ، سنجد أن معاملات القيد الخاصة به ، وكذلك القيم الحالية للمتغيرات الأساسية والمستخرجة من الجدول الأخير هي كالآتي :

المتغيرات الأساسية	القيم	س ٧
س ٢	$28 \frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
س ٦	١٩٦	٤
س ١	٥	١-
س ٣	٣	صفر

ويتبين من هذه المعلومات وجود علاقة بين المتغيرات

الاساسية س ٢ ، س ٦ ، س ١ مع المتغير المضاف غير الاساسي ( س ٧ ) ، ولا توجد علاقة بين س ٣ ، س ٧ ، لذلك ستركز تحليلنا على اقصى تغيير يمكن أن يحدث في الطاقة الاصلية للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س ٧ ) على وضع المتغيرات الاساسية جميعها فيما عدا س ٣ لعدم وجود علاقة بينهما .

كما سبق القول عند تحليل المتغيرات الراكدة غير الاساسية ، انه يتم حساب قيمة ( ع ) والتي سنجعلها هنا ترمز للحد الاقصى للتغير في الحد الادنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س ٧ ) ، ويتم حسابها بنفس الطريقة التي اتبعت من قبل مع اختلاف بسيط هو عدم وضع الاشارة السالبة في المعادلة وذلك لأن المتغيرات المضافة تمثل المقدار الذي يزيد به القيد بعكس الحال في المتغيرات الراكدة التي كانت تمثل المقدار غير المحقق للقيد او الطاقة العاطلة او غير المستفلة .

وباستخدام نفس المعادلة التي نستخرج بها قيم ( ع ) عند كل متغير اساسي سنقوم فيما يلي بحساب قيمة ( ع ) عند كل متغير اساسي وذلك لاستخلاص حدود التغير للمتغير المضاف غير الاساسي ( س ٧ ) .

$$ع \text{ عند س } ٢ = \frac{٢٨ \frac{٥}{٤}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{١٤٢}{٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{١}{٢} \times ٣٥$$

$$ع \text{ عند س } ٦ = \frac{١٩٦}{٤} = ٤٩$$

$$ع \text{ عند س } ١ = \frac{٥}{١} = ٥ -$$

ومن هذه النتائج نستخلص مايلي :

— ان حدود الزيادة في الحد الادنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س ٧ ) هي  $\frac{١}{٢}$  (أصغر قيمة موجبة) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الأمثل للمتغيرات الاساسية .

- ان حدود التخفيض في الحد الأدنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س ٧ ) وهي ٥ (الرقم الوحيد السالب) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية .

خلاصة ماتقدم انه طالما ان احتياجات القيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س ٧ ) ليست أقل من مفسر ( ٥ - ٥ ) ، وليست اكبر من  $\frac{1}{4} ٤٠$  (  $\frac{1}{4} ٣٥ + ٥$  ) وحدة من س ١ مطلوب انتاجها ، فان الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية سيظل على ما هو عليه دون تغير ، أما المتغيرات التي تتعدى نطاق تلك الحدود فانها ستكون وبالقسط سببا في تغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية .

وبنفس الاسلوب يمكن حساب حدود المتغيرات فسي متطلبات القيد الذي يتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س ٨ ) ، استنادا على المعلومات التالية والمستخرجة من جدول السمبلكس الأخير .

المتغيرات الاساسية	القيم	س ٨
س ٢	$\frac{2}{5} ٢٨$	$\frac{6}{5}$
س ٦	١٩٦	- ١٢
س ١	٥	مفر
س ٣	٣	- ١

وبذلك تكون قيمة ( ع ) عند كل متغير اساسي كالآتي :

$$ع \text{ عند س } ٢ = \frac{\frac{2}{5} ٢٨}{\frac{6}{5}} = \frac{١٤٢}{٥} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٢٣}{٣}$$

$$ع \text{ عند س } ٦ = \frac{١٩٦}{-١٢} = -\frac{١٦}{٣}$$

$$ع \text{ عند س } ٣ = \frac{٣}{-١} = -٣$$

ومن هذه النتائج نستخلص مايلي :

- ان حدود الزيادة في الحد الأدنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س<sub>٨</sub> ) هي  $\frac{2}{3} ٢٣$  ( الرقم الوحيد الموجب ) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية .

- ان حدود التخفيض في الحد الأدنى للقيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س<sub>٨</sub> ) هي -٣ ( أقل رقم باشارة سالبة ) ، وبعد هذا الحد يتغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية .

خلاصة ماتقدم انه طالما ان احتياجات القيد المتضمن المتغير المضاف غير الاساسي ( س<sub>٨</sub> ) ليست أقل من صفر ( ٣ - ٣ ) ، وليست اكبر من  $\frac{2}{3} ٢٦$  (  $\frac{2}{3} ٢٣ + ٣$  ) وحدة من س<sub>٣</sub> مطلوب انتاجها ، فان الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية سيظل على ما هو عليه دون تغير، أما المتغيرات التي تتعدى نطاق تلك الحدود فانها ستكون وبالقسط سببا في تغيير الوضع الامثل للمتغيرات الأساسية .

وفيما يلي جدولا يلخص ويوضح جميع النتائج التي تم التوصل اليها من تحليل حساسية كل من معاملات دالة الهدف ، وطاقة القيود .



اطصار التفتيهر				القيمة الاصلية	معاملات دالة الهدف وقيود النموذج
الحد الاقصى للمعنصر	الحد الادنى للمعنصر	اقصى زيادة ممكنة	اقصى تخفيض ممكنا		
٤٠٠٠	بلا حدود	٢٠٠٠	بلا حدود	٢٠٠٠	س ١
بلا حدود	$\frac{١٠٠٠٠}{٣}$	بلا حدود	$\frac{٥٠٠٠}{٣}$	٥٠٠٠	س ٢
٦٠٠٠	بلا حدود	٢٠٠٠	بلا حدود	٤٠٠٠	س ٣
٣٠٠٠	بلا حدود	١٠٠٠	بلا حدود	٢٠٠٠	س ٤
١١٤٥	١٩٠	٢٤٥	٧١٠	٩٠٠	طاقنة القيوذ :
بلا حدود	٧٠٤	بلا حدود	١٩٦	٩٠٠	قيذ التمهنيغ
$\frac{٤٠}{٣}$	مفر	$\frac{١}{٣٥}$	٥	٥	قيذ الحد الادنى للمتغير س ١
$\frac{٢٦}{٣}$	مفر	$\frac{٢}{٢٣}$	٣	٣	قيذ الحد الادنى للمتغير س ٣

أما مايتعلق باستكمال تحليل حساسية باقى عناصر نموذج البرمجة الخطية ، فإنه سيتم تأجيلها قليلاً ، انتظاراً لما يسفر عنه موضوع الثنائية في البرمجة الخطية ، والذي سيكون موضوع الجزء التالي ، ويرجع السبب فى ذلك ان لتحليل ولنتائج المشكلة الثنائية دوراً هاماً وأساسياً فى تفهم تحليل حساسية باقى العناصر التى لم يشملها التحليل السابق .



التنائية فى البرامج الخطية





## الثنائية في البرامج الخطية

### The Dual in Linear Programming

تتعدد المسميات التي تطلق على مضمون هذا الموضوع  
فقد أمكن حصر هذه المسميات في الآتي :

- الثنائية في البرامج الخطية
- الازدواج في البرامج الخطية
- المقابل في البرامج الخطية
- المبدول في البرامج الخطية

وهذا التعدد في المسميات لا يعكس اختلافا في  
المضمون ، ولكنه اجتهاد من الكتاب في محاولة الوصول  
الى تسمية تمثل ترجمة للمصطلح الاجنبي Dual وتعكس  
في ذات الوقت مفهوم ومضمون المقصود بهذا المصطلح .

وأيا كانت التسمية التي يستخدمها الكتاب في  
مجال بحوث العمليات ، فان مفهوم الثنائية ، أو الازدواجية  
أو المقابل ، أو المبدول ، تشير جميعها الى أنه يمكن  
معالجة اية مشكلة تدرج تحت البرمجة الخطية بطريقتان ،  
الاولى هي النموذج الاصلى للبرمجة الخطية ، والثانية هي  
تحويل ذلك النموذج الاصلى الى نموذج آخر ثنائي أو  
مقابل ، أو مبدول ، وبمعنى آخر فان كل مشكلة يمكن أن  
تأخذ الشكل النمطي لنماذج البرامج الخطية ، تقترن بها  
مشكلة اخرى مرتبطة بها تماما ، يطلق على المشكلة  
الاصلية اصطلاح المشكلة الاولية Primal Problem ،  
أما المشكلة المقترنة بها فيطلق عليها المشكلة الثنائية  
Dual Problem . وكلا المشكلتين يعتبران مشكلتين  
ثنائية او مقابلة لبعضهما البعض . ويرجع السبب في ذلك  
لأنهما يتضمنان نفس البيانات ، ويعتبران مرآة عاكسة  
لبعضهما البعض .

ففي البرمجة الخطية عندما تكون المشكلة الاصلية  
أو الاولية مشكلة تعظيم أي مشكلة الوصول الى اقصى قيمة  
لدالة الهدف Maximization ، فان المشكلة الثنائية

لها والمناظرة تماما تكون مشكلة تخفيض ، اي الوصول الى ادنى قيمة Minimization ، وبالعكس كل مشكلة تخفيض لها ازدواج مناظر ينطوى على مشكلة تعظيم ، ويلاحظ أنه اذا كان هناك حلا امثلا ممكنا للمشكلة الأصلية ، فانه يحل المشكلة الثنائية سوف نعمل الى نفس الحل الممكن الأمثل .

وهنا قد يتبادر الى ذهن القارئ سؤال منطقي وهو لماذا نحتاج الى التعامل مع المشكلة الثنائية ، طالما ان فى الامكان التوصل الى حل المشكلة التبي تواجهنا باستخدام الصياغة الاولى او الأصلية للمشكلة ؟ أو بمعنى آخر انه فى الامكان حل المشكلة الأولية فما الذى يدعو الى التعامل مع وجهها الآخر كمشكلة مقابلة ؟ . الحقيقة ان الثنائية فى البرمجة الخطية تعتبر مدخلا اقتصاديا هاما ، وبواسطته تستطيع الادارة أن تحصل على حلول للمشاكل متعددة الحلول البديلة . اضافة الى المزايا الهامة التالية :

١- انه يمكن الحصول على معلومات غاية فى الأهمية من خلال نتائج حل المشكلة الثنائية ، خاصة مايمكن ان نطلق عليها معلومات أسعار الظل التى تبني عليها عملية تحليل الحساسية .

٢- فى كثير من الاحيان يكون من الاسهل حل المشكلة الثنائية بدلا من التعامل مع صياغتها الأصلية ، فاذا كانت المشكلة الأصلية بها عدد قليل من المتغيرات ولكنها تحتوى على الكثير من القيود ، فان حل المشكلة الثنائية يقلل كثيرا جدا من العمليات الحسابية المطلوبة حتى الوصول الى الحل الأمثل .

وقد يستطيع القارئ ان يقف على مغزى المشكلة الثنائية ، اذا فسرنا الامور بشكل مبسط وان كان يحتوى على الكثير من الفروض ، فالهدف هو توضيح الفكرة دون

الدخول فى تفصيلاتها . فاذا كانت مثلاً شركة أو مؤسسة تعمل فى مجال النقل الجوى الدولى على بعض خطوط الشبكة الجوية العالمية فان هناك تساوى فى اسعار تذاكر السفر بين تلك الشركات على نفس الخط الجوى ، وهذه الاسعار محددة ومعلنة من قبل الاتحاد الدولى للنقل الجوى وهى ملزمة لكل الشركات المنضمة لهذا الاتحاد ، وعلى ذلك فان المنافسة السعرية بمفهومها المجرى تكاد تكون مختفية ، ان مثل هذه الشركات يمكنها ان تضخم أرباحها ( بفرض ثبات عدد من العوامل ) عن طريق تخفيض تكاليف تشغيل رحلاتها الجوية ، أي أن الهدف هو تعظيم الأرباح ، ولكنه سيتم عن طريق تخفيض التكاليف .

من ناحية أخرى فان الصياغة الثنائية تنظر الى المشكلة من منظور مختلف عن الصياغة الأولية أو الأصلية ، فاذا كانت المشكلة الأصلية تتضمن تحقيق أعلى أرباح ممكنة من مزيج الإنتاج الذى يتكون من مجموعة من المنتجات ، في حدود مجموعة من الكميات المحدودة من موارد الإنتاج ( طاقات القيود ) ، فان المشكلة الثنائية تحاول أن توجد القيم الدنيا لتلك الموارد والتي تجعل المنتج فى حالة تعادل ، أي فى الحالة التى يشعر فيها أنه سيان لديه ان يبيع تلك الموارد عند تلك الاسعار ، أو أن يستخدمها فى إنتاج مزيج الإنتاج الأمثل .

### صياغة وحل المشكلة الثنائية :

وحتى يمكن فهم الطريقتين الأولية والثنائية وفهم العلاقة بينهما ، فاننا سنعود الى المثال الذى سبق استخدامه لشرح وتفسير طريقة الرسم البياني فى البرمجة الخطية والخاص بشركة القاهرة للصناعات الهندسية ، ولغرض التسهيل فاننا سنستبعد من هذه المشكلة القيود الخاص بترقيات الخشب ، وهذا الاستبعاد لن يؤثر على الحل الأمثل لأنه قيد غير محدد فى الحل الأمثل ، كما تبين ذلك

عند تحليل حساسية التغير في طاقة القيود. وعلى ذلك  
فان الصياغة الاولى لتلك المشكلة بعد هذا الاستبعاد  
ستأخذ الصورة التالية :

دالة الهدف = تعظيم  $7س_1 + 10س_2$  — اقصى ارباح  
بشرط أن :

$$3س_1 + 2س_2 \geq 36 \quad (\text{ قيد التصنيع })$$

$$2س_1 + 4س_2 \geq 40 \quad (\text{ قيد التجميع })$$

$$س_1, س_2 \leq \text{مفر}$$

وعموما فان صياغة المشكلة الاولى (أو الاصلية)  
يمكن أن تأخذ أحد اشكال التعظيم ( كما في هذا المثال)  
مثل تعظيم الربح ، أو المساهمة في السوق ، أو تعظيم  
الحجم ، أو تعظيم الكفاءة أو الفاعلية ، أو قد تأخذ أحد  
نواحي التخفيض مثل تخفيض التكاليف ، تخفيض التغيب عن  
العمل ، تخفيض المسافات ، تخفيض الزمن ، تخفيض الاسراف  
وعند صياغة المشكلة المقابله فاننا سنستخدم متغيرات  
جديدة ترتبط بقيود المشكلة الاصلية ، وتكون دالة الهدف  
ففي الصياغة الثنائية هي تخفيض اذا كانت المشكلة  
الأولية احدى صور التعظيم ، والعكس بالعكس .

وتحويل صورة الهدف من تعظيم الى تخفيض أو  
العكس مهم جدا ، بسبب المنظور الذي تأخذ به المشكلة  
الثنائية ، فمثلا اذا كانت المشكلة الاولى تتمثل في  
التوصل الى المزيج الانتاجي الأمثل الذي يعمل بالارباح  
الى حدها الاقصى تحت مجموعة من القيود أو الشروط التي  
تمثل مجموعة الموارد المتاحة ، فان المشكلة المقابله  
أو الثنائية تحاول ان تدنى أو تخفض قيمة الموارد  
المتاحة ولكن أيضا بشروط تتمثل في أن تكون قيم تلك  
الموارد المستخدمة هي على الاقل تعادل مساهمة الوحدة  
من كل منتج ، وهذا ما سبق ذكره في ان المنتج سيرى انه  
سيان لديه ان يبيع تلك الموارد عند تلك الاسعار ، أو أن



يستخدمها في هذا المزيج الانتاجي .

وبناء على ماتقدم فان خطوات تحويل المشكلة الأولية الى صياغة تمثل النموذج الثنائي هي على الوجه التالي :

١- اذا كانت المشكلة الاصلية أو الأولية هي من النوع الذى يراد جعل دالة الهدف فيها اكبر مايمكن (أي مشاكل تعظيم) ، فان المشكلة الثنائية المقابلة لها تكون من النوع العكس أي الذى يراد جعل دالة الهدف فيها ادنى مايمكن ( أي مشاكل التخفض ) . وتطبيقا لهذه الخطوة على المثال المطروح ذات هدف التعظيم فان الصياغة الثنائية ستكون ذات دالة هدف عكسية بمعنى هدف تخفيض ولكن ستتغير المتغيرات المستخدمة فى المشكلة الثنائية وكذلك معاملاتها وهذا سيتضح مع المرور بالخطوات التالية .

٢- عدد المتغيرات فى دالة الهدف فى المشكلة الثنائية يساوى عدد القيود ( بعرف النظر عن قيود عدم السلبية ) فى المشكلة الأولية أو الاصلية . وهذا يعنى ان اتجاه دالة الهدف سيتغير من تخفيض الى تعظيم أو العكس ، كذلك لن تكون عدد متغيرات الدالة هو نفس عددها فى المشكلة الاصلية ولكن عددها سيكون بعدد القيود المفروضة بالمشكلة الاصلية . وحيث انه يوجد بالمثال قيدان ، أحدهما يمثل قسم التصنيع ، والآخر يمثل قسم التجميع ، لذلك ستكون عدد المتغيرات بدالة الهدف للمشكلة الثنائية اثنين فقط ، ( لاحظ انه قد تم استبعاد قيد رقائق الخشب واذا لم يتم استبعاده ، ستكون دالة الهدف مكونة من ثلاثة متغيرات ) . أحدهما يمثل القيد الأول ، والثاني يمثل القيد الثاني . حتى هذه الخطوة نكون قد وقفنا على اتجاه دالة



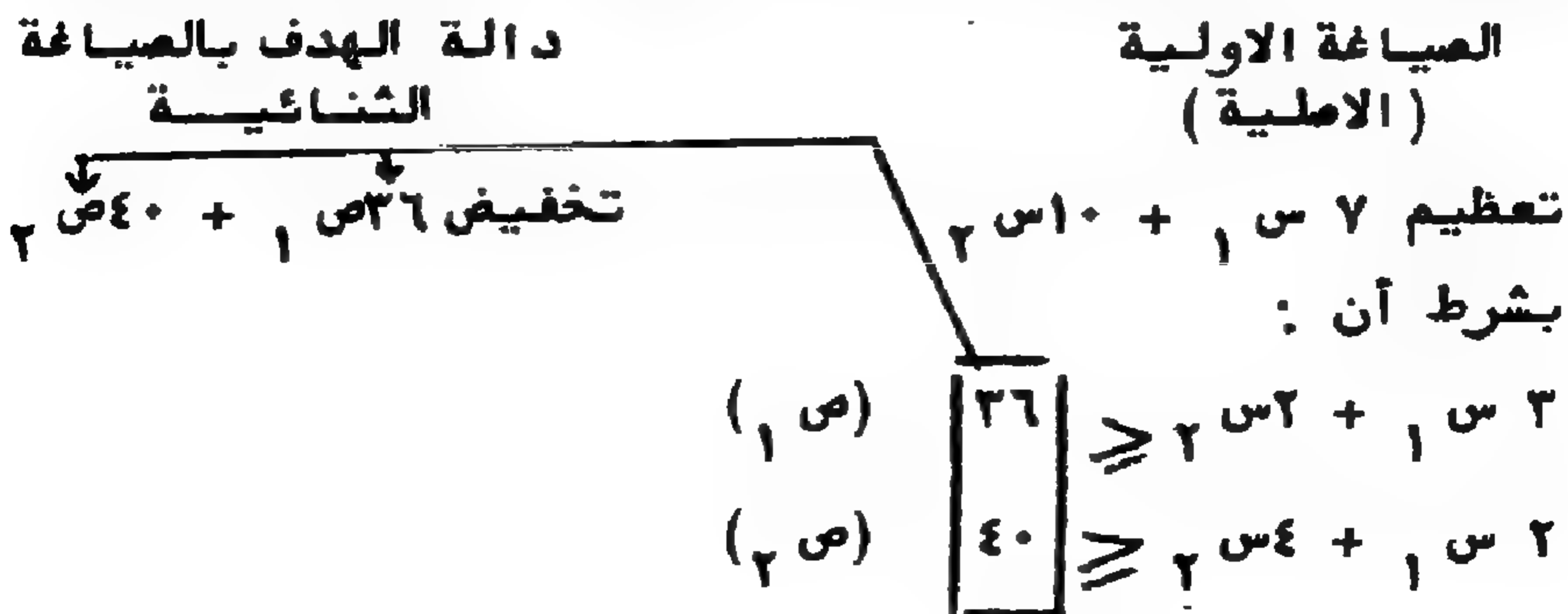
الهدف ( تعظيم أو تخفيض ) ، وكذلك عدد متغيراتها ولكننا لم نحدد بعد رموز تلك المتغيرات ولا معاملاتها بدالة الهدف وهذا ماسيرد ذكره على التوالي .

٣- يتم وضع متغير يمثل كل قيد، فإذا فرض ان ( ص ١ ) تمثل المتغير المقابل لقيمة طاقة التصنيع ، وان ص ٢ تمثل المتغير المقابل لقيمة طاقة التجميع ، اذن يكون من المنطقي ان معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمشكلة الثنائية ( ص ١ ، ص ٢ ) هي الثوابت الموجودة بالطرف الأيسر للقيود بالمشكلة الاصلية ، أي ان معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية في مثالنا هذا تمثل عدد الساعات المتاحة بكل قسم انتاجي ، فمثلا ( ص ١ ) معاملته يمثل ساعات التصنيع ( ٣٦ ساعة ) ، و ( ص ٢ ) معاملته يمثل ساعات التجميع ( ٤٠ ساعة ) . وعلى ذلك يكون مفهوم ضمنها ان المتغيرات الواردة بدالة الهدف تكلفة الساعة الواحدة في القسم الانتاجي المعين .

واستنادا الى الخطوات الثلاثة السابقة تكونون دالة الهدف للنموذج الثنائي للمثال الذى نتعامل معه على الصورة التالية :

$$\text{دالة الهدف} = \text{تخفيض } ٣٦ \text{ ص } ١ + ٤٠ \text{ ص } ٢$$

والشكل التالي يوضح كيف تم التوصل اليها وصياغتها :



وقبل أن نترك هذا الاجراء يتعين ان نوضح معناه  
ان دالة الهدف بالصياغة الثنائية بعد هذا  
الاجراء أصبحت تعمل على تخفيض قيمة طاقة التصنيع  
وكذلك تخفيض طاقة التجميع ووفقا لهذا المعنى  
يمكن كتابة دالة الهدف الثنائية بطريقة وصفية  
كالآتي :

مطلوب الوصول بحاصل الجمع الآتي الى أدنى حد ممكن =  
(قيمة كل ساعة تصنيع)  $\times$  (عدد ساعات التصنيع المتاحة)  
+ (قيمة كل ساعة تجميع)  $\times$  (عدد ساعات التجميع  
المتاحة) .

٤- بعد الانتهاء من صياغة دالة الهدف، ننتقل الى  
قيود المشكلة ، تتطلب المشكلة الثنائية أن يكون  
هناك قيد واحد مقابل لكل متغير قراري فـ في  
المشكلة الأولية (بصرف النظر عن المتغيرات الراكدة  
أو المتغيرات الاصطناعية) ، وحيث انه يوجد بهذا  
المثال متغيرات ، هما النموذج الاول ( س ١ ) ،  
والنموذج الثاني ( س ٢ ) ، اذن ستضمن المشكلة  
الثنائية قيدين فقط، كل واحد منهما يقابل  
متغيرا قراريا بالمشكلة الأصلية، ومعاملات قيود  
المشكلة الثنائية يتم اخذها من معاملات قيود  
المشكلة الأصلية . وسيكون الجانب الأيسر للقيدين  
الجديدين معادلين لمعاملات دالة الهدف للمتغيرات  
القرارية الأصلية ، بمعنى أن القيد الأول في  
الصياغة الثنائية سيكون هو القيد المقابل  
للمتغير القراري س ١ في المشكلة الأولية ، اذن  
ثابت هذا القيد أو جانبه الأيسر سيكون هو  
معامل ذلك المتغير القراري ( س ١ ) في دالة  
الهدف الأصلية أي (٧) . وبالمثل فان القيد الثاني  
في الصياغة الثنائية سيكون هو القيد المقابل  
للمتغير القراري ( س ٢ ) في المشكلة الأصلية ،  
ولذلك سيكون ثابت هذا القيد أو جانبه الأيسر،

هو معامل ذلك المتغير القراري في دالة الهدف  
الاولية أي (١٠) . أما اشارة القيد فستكون عكس  
اشارة القيد في الصياغة الاولى .

أي انه يلاحظ ان كل قيد فى الصياغة الثنائية يماثل المتغير القرارى فى الصياغة الأولية ، فمعاملات القيد فى الصياغة الثنائية تطابق معدلات الاستخدام لذلك المتغير فى الصياغة الأولية كذلك فان طاقة القيد أو جانبه الأيسر يمثل معامل ذلك المتغير بدالة الهدف .

وتطبيقاً لهذه الخطوة على قيود الموارد في  
الصياغة الثنائية بشكل يمكن من فهم محتوى هذه  
الخطوة سنقوم بأعداد الشكل التالي الذي يهدف  
إلى كيفية أعداد قيود المشكلة الثنائية استخلاصاً  
من الصياغة الأولية :

## القيود الشائعة

## المباعدة الاولى

تعظیم بشرط  
 ۷ س ۱ + ۱ س ۲  
 ان : ۳ س ۱ + ۲ س ۲  
 ۲ س ۴ + ۱ س ۲  
 ۴۰

وبشكل آخر، إذا كانت المصفوفة (أ) التالية هي مصفوفة معاملات قيود المشكلة الأصلية، فإن المصفوفة (أ) هي مصفوفة معاملات قيود المشكلة الثنائية :

[illegible]

فمن الواضح ان العمود الاول من المصفوفة (أ) ،  
سيصبح الصف الاول للمصفوفة (أ) ، كما أن العمود

الثاني من المصفوفة أ، سيصبح الصف الثاني من آ، أما الثوابت الموجودة بالطرف الأيسر من قيود المشكلة الثنائية تؤخذ من دالة الهدف للمشكلة الاصلية. ويلاحظ ان معاملات العمود الأول من المصفوفة أ خاصة بالمتغير س<sub>١</sub>، وان معامل الربح للمتغير س<sub>١</sub> في المشكلة الاصلية هو ٧. كما أن معاملات العمود الثاني من المصفوفة (أ) خاصة بالمتغير (س<sub>٢</sub>)، ومعامل ربح (س<sub>٢</sub>) في المشكلة الاصلية هو ١٠، اذن ثوابت قيود المشكلة الثنائية هما على الترتيب ٧، ١٠.

ولكن مامعنى أو مغزى القيود الثنائية؟ لو أمعنا النظر فى صياغة القيود الثنائية سنجد أنها تكفل أو تضمن ان قيمة الموارد المستهلكة والمستخدمه فى تصنيع كل منتج تكون مساوية على الاقل لعائد المساهمة. ولمزيد من التوضيح، فالقيود الثنائي الاول والخاص بالمتغير القرارى (س<sub>١</sub>)، بالمشكلة الاولى يمكن اثباته بالصورة الوصفية التالية :

$$\begin{aligned} & (\text{ساعات تصنيع الوحدة من س}_1) \times (\text{قيمة ساعة التصنيع}) \\ & + (\text{ساعات تجميع الوحدة من س}_2) \times (\text{قيمة ساعة التجميع}) \\ & \leq (\text{العائد المتولد من كل وحدة من س}_1) \end{aligned}$$

م بعد الانتهاء من اجراءات الخطوات الأربعة السالفة، وبعد اضافة شرط عدم السلبية، ستكون الصياغة الكاملة الاولى والثنائية كالآتي :

الصياغة الاولى ( الاصلية )	الصياغة الثنائية ( القابلة )
تعظيم بشرط س <sub>١</sub> + ١٠ س <sub>٢</sub>	تعظيم بشرط ٣٦ س <sub>١</sub> + ٤٠ س <sub>٢</sub>
ان :	ان :
٣٦ ≥ س <sub>١</sub> + ٢ س <sub>٢</sub>	٣٦ ≥ س <sub>١</sub> + ٢ س <sub>٢</sub>
٤٠ ≥ س <sub>١</sub> + ٤ س <sub>٢</sub>	٤٠ ≥ س <sub>١</sub> + ٤ س <sub>٢</sub>
س <sub>١</sub> ، س <sub>٢</sub> ≤ صفر	س <sub>١</sub> ، س <sub>٢</sub> ≤ صفر



وبدراسة الصياغة الثنائية على الصورة السابقة يتضح جليا ان المتغيرات ص<sub>١</sub>، ص<sub>٢</sub> تشير الى قيمة وسعر الساعة في قسمي التصنيع والتجميع على الترتيب، أو ما يطلق عليه سعر الظل، وان القيد الأول مثلا يتضمن في جانبه الايمن مقدار ماتحتاجه وحدة المنتج الأول من ساعات في قسمي التصنيع والتجميع، وفي جانبه الأيسر مقدار هامش ربح الوحدة من ذلك المنتج، ولذلك فإن تفسير هذا القيد يوضح ان مقدار الموارد اللازمة لانتاج وحدة واحدة من المنتج الأول مقومة بأسعار ظل تلك الموارد يجب ان تزيد أو على الأقل تكون مساوية لهامش ربح الوحدة من هذا المنتج. أي أن الشركة المنتجة تكون في حالة تعادل أو سريان لديها أن تستخدم الموارد في المزيج الانتاجي أو بيع تلك الموارد بهذا السعر، وهذا ماسبق ذكره في موضع سابق.

والجدول التالي يقدم تلخيصا كاملا للعلاقة بين عناصر صياغة المشكلة الأولية وعناصر صياغة المشكلة الثنائية والتي وردت في تحليلاتنا السابقة.

عناصر صياغة المشكلة الأولية	عناصر صياغة المشكلة الثنائية
دالة الهدف تعظيم القيود أقل من أو تساوي معاملات دالة الهدف ثوابت القيود المتغيرات القرارية القيود معاملات القيد	القيود اكبر من أو يساوي دالة الهدف تخفيض ثوابت القيود معاملات دالة الهدف القيود المتغيرات القرارية معاملات المتغير القابل لذلك القيد.

مثال :

المطلوب ايجاد الصياغة الثنائية لمشكلة شركة القاهرة للمنتجات الغذائية والتي كانت تأخذ الصياغة



الاولية ( الاصلية ) التالية :

دالة الهدف : تخفيض  $٠٠٠٨ ر١ + ٠٠١٢ ر٢$

بشرط أن:

$$١ \leq ٢ ر١ + ٥ ر٢$$

$$١ \leq ٢ ر١ + ٢ ر٢$$

$$\text{الحل :} \quad ر١ , ر٢ \leq \text{صفر}$$

ستأخذ الصياغة الثنائية للمشكلة السابقة الصورة

التالية :

دالة الهدف = تعظيم  $١ ص + ٢ ص$

بشرط أن =

$$٠٠٠٨ \geq ٢ ص + ٤ ر٢$$

$$٠٠١٢ \geq ٢ ص + ٢ ر٢$$

$$١ ص , ٢ ص \leq \text{صفر}$$

ويلاحظ اننا لو قمنا بحل تلك المشكلة الثنائية باستخدام طريقة السمبلكس فسنلمس وبسرعة احد مزايا المشكلة الثنائية في انها اسهل في حلها من المشكلة الاولى، فحيث ان المشكلة الاولى لهذا المثال هي مشكلة تخفيض مع قيود اكبر من أو يساوي (  $\leq$  ) ، لهذا نحتاج لحل هذه المشكلة ان نضيف الى القيود متغيرات راكدة سالبة ومتغيرات اصطناعية، أما عندما نقوم بحلها في صورتها الثنائية كمسكلة تعظيم ذات قيود أقل من أو يساوي (  $\geq$  ) فليست هناك حاجة الى تلك المتغيرات الاصطناعية ومن ثم ستكون أسهل في حلها ، ويمكن للقارىء ان يقوم بتجربة ذلك .

العلاقة بين حل المشكلة الاولى والمشكلة الثنائية :

لعله من المفيد ان نقوم بحل المشكلة الثنائية

ثم نقارن بين النتائج التي يسفر عنها جدول الحسـل  
الأمثل الناتج من المشكلة الاولى، للوقوف على العلاقة  
بينهما ولاستخدام نتائج الحل الأمثل للمشكلة الثنائية  
في استمرارية تحليل الحساسية الذي بدأناه في الجزء  
الاول من هذا الفصل .

وفيما يلي خطوات الحل المعتادة للبرمجة الخطية  
بالتطبيق على مثال شركة القاهرة للصناعات الهندسية  
في صياغتها الثنائية التي تم التوصل اليها في نهاية  
الخطوات السابقة دون استبعاد قيد رقائق الخشب .

( يلاحظ اننا سنضيف المتغيرات الراكدة ص<sub>٤</sub>، ص<sub>٥</sub>  
والمتغيرات الاصطناعية ل<sub>١</sub>، ل<sub>٢</sub>، وستكون معاملات  
ل<sub>١</sub>، ل<sub>٢</sub> قيمة كبيرة جدا مقدارها م ) .

الجدول المبدئي

معاملات الهدف	التغيرات الاساسية	الأرباح الداخلية	٢٦	٤٠	١٠	صفر	صفر	م	م
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٥	ل ١	ل ٢	
م	ل ١	٧	٣	٢	١	١-	صفر	١	صفر
		ل ٢	١٠	٢	٤	صفر	صفر	١-	صفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية	٢٥	٢٦	م	م -	م -	م	م
	١٧م	صافي التغير	٣٦-٢٥	٤٠-٢٦	١٠-م	م	م	صفر	صفر

المتغير الداخل

الجدول الثاني (بعد استبعاد عمود ل ٢)

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	مفر	مفر	م
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥	ل ١
م	ل ١	٢	٢	مفر	١	١-	$\frac{1}{2}$	١
٤٠	ص ٢	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	١	مفر	مفر	$-\frac{1}{4}$	مفر
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢٠+٢٠م	٤٠	م	م-	$-\frac{1}{2}م + ١٠$	م
	١٠٠+م	صافي التغير	١٦-٢م	مفر	١٠-م	م	$١٠ - \frac{1}{2}م$	مفر

↑  
المتغير الداخل

الجدول الثالث (بعد استبعاد عمود ل ١)

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	مفر	مفر	مفر
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥	
٣٦	ص ١	١	١	مفر	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
٤٠	ص ٢	٢	مفر	١	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{8}$	
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٣٦	٤٠	٨	٨-	٦-	
	١١٦	صافي التغير	مفر	مفر	٢	٨	٦	

وبمقارنة ذلك الجدول الامثل بما سبق التوصل اليه من الحل الامثل باستخدام الصياغة الأولية والذي قد ظهر على الشكل التالي . يمكن ان نلاحظ العديد من النتائج .

## جدول الحل الامثل للمشكلة الاولى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٧	١٠	صفر	صفر	صفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
٧	س ١	٨	١	صفر	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	صفر
١٠	س ٢	٦	صفر	١	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	صفر
صفر	س ٥	٢	صفر	صفر	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٧	١٠	١	٢	صفر	صفر
١١٦	صافي التغير	صفر	صفر	١-	٢-	صفر	صفر

في البداية يتعين ان نوضح اولا مغزى النتائج التي يقدمها جدول الحل الامثل للمشكلة الثنائية، فحيث ان ص ١ تمثل سعر ظل الساعة من قسم التصنيع ، و ص ٢ تمثل سعر ظل الساعة من قسم التجميع ، اذن يمكن ان نقول ان المنتج سيري انه سيان لديه ان يقوم بانتاج المزيـج الانتاجي من س ١ ، س ٢ ، أو أن يبيع تلك الموارد (ساعات التصنيع ، وساعات التجميع) وذلك عند مستوى سعر ١ جنيه للساعة من قسم التصنيع ، و ٢ جنيه للساعة من قسم التجميع وسنعود الى تحليل كامل لهذا الموضوع عند تحليل حساسية القيمة الحدية للموارد الاضافية .

ونعود مرة أخرى لنقول انه بمقارنة نتائج الحل للنموذج الاول ونتائج الحل بالنموذج الثنائي يتضح أن هناك عددا من نقاط الاتفاق بين نتائجها كالآتي :

- ١- نقطة الاتفاق الاولى اننا يمكن ان نحصل على الحل الامثل للمشكلة الثنائية من جدول الحل الامثل للمشكلة الاولى ، ومن ناحية أخرى ، فحيث ان العلاقة عكسية بين المشكلة الثنائية والمشكلة الاولى ، لذلك

ايضا لايمكن ان نحصل على الحل الامثل للمشكلة  
الاولية من تحليل جدول السمبل كس الاخير لحصل  
المشكلة المقابل له او الثنائية، ولذلك فاننا  
سنقارن فيما يلي عناصر الجدولين السابقين  
لتوضيح العلاقة الوثيقة بين الحل الاولي أو الأصلي  
والحل المقابل او الثنائي .

لقد سبق القول ، ان لكل متغير قراري في  
المشكلة الاولى قيد يقابله في المشكلة الثنائية ،  
كذلك تتضمن المشكلة الثنائية متغير قراري لكل  
قيد في المشكلة الاولى ، لذلك سنلاحظ ان قيم الحل  
الامثل للمشكلة الاولى تتطابق مع صافي التغير  
للمتغيرات المضافة بالمشكلة الثنائية وهي  
( ص ٤ ، ص ٥ ) ، كذلك تتعادل قيم الحل للمتغيرات  
الراكدة بالمشكلة الاولى مع قيم صافي التغير  
للمتغيرات القرارية المقابلة بالمشكلة الثنائية ،  
ويتضح ذلك من المقارنة التالية المستخرجة من  
الجدولين السابقين :

المتغيرات الاولية	قيم الحل	المتغيرات الثنائية	صافي التغير
س ١	٨	ص ٤	٨
س ٢	٦	ص ٥	٦
س ٣	صفر	ص ١	صفر
س ٤	صفر	ص ٢	صفر
س ٥	٢	ص ٣	٢

كذلك سنجد علاقة مشابهة بين قيم الحل للمتغيرات  
الثنائية وقيم صافي التغير للمتغيرات الاولى مع  
تغير الاشارة كما يلي :



المتغيرات الثنائية	قيم الحل	المتغيرات الاولية	صافي التغير
ص ١	١	س ٣	١ -
ص ٢	٢	س ٤	٢ -
ص ٣	صفر	س ٥	صفر
ص ٤	صفر	س ١	صفر
ص ٥	صفر	س ٢	صفر

وتأسيسا على هذه العلاقات فإنه يمكن ان نستخرج الحل الأمثل للمشكلة الثنائية من قيم صافي التغير المرتبطة بها من جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية . كذلك اذا كان متاح لدينا جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية، فإنه يمكن أيضا ان نحول على القيم المثلي لمتغيرات المشكلة الأولية من صف صافي التغير بجدول الحل الاخير للمشكلة الثنائية .

٢- كذلك اذا ما قارنا الجدولين السابقين لحل كل من المشكلة الأولية ، والمشكلة الثنائية، سنجد أن هناك نقطة اتفاق أخرى وهي قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل، اذ سنجد أنها تبلغ ١١٦ جنيه في كلا الجدولين - ولكن معناها ومغزاها مختلف ، فقيمة دالة الهدف بالنسبة للمشكلة الأولية تعني اجمالي المساهمة في الارباح المحققة بانتاج المزيــــــــج الانتاجي الأمثل لكل من المنتجين س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ( ٨x٧ + ٦x١٠ = ١١٦ جنيه ) ، ولكن هذه القيمة نفسها بالنسبة للمشكلة الثنائية فهي تمثل القيمة المثلى من الموارد المتاحة لانتاج س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، ولذلك اذا ما قمنا بحساب قيمة اجمالي الموارد المستغلة في حجم الانتاج الأمثل سنجدها ١١٦ جنيه (٣٦ ساعة تصنيع x ١ جنيه + ٤٠ ساعة تجميع x ٢ جنيه = ١١٦) ، لذلك

نجد ان القيمة الاجمالية للموارد تعادل تماما اجمالى المساهمة التى يمكن توليدها عن طريق توجيهها لانتاج المزيج الانتاجي الامثل من المتغيرات القرارية  $s_1, s_2, s_3$ .

٣- ونقطة مشتركة اخرى تتعلق بمعاملات القيود، فحيث ان المتغير  $s_1$  والوارد بالمشكلة الثنائية هو المتغير المناظر للمتغير  $s_3$  بالمشكلة الاولى، لذلك نجد ان معاملات القيد للمتغير  $s_1$  عند المتغيرات غير الاساسية بجدول الحل الاخير للنموذج الثنائي، متطابقة (بعد تغيير الاشارات) مع معاملات القيد للمتغير  $s_3$  عند المتغيرات الاساسية بجدول الحل الاخير للمشكلة الاولى، كما هو مبين من المقارنة التالية :

المتغيرات غير الاساسية بالمشكلة الثنائية	المتغيرات الاساسية بالمشكلة الاولية	المتغيرات غير الاساسية بالمشكلة الثنائية	المتغيرات الاساسية بالمشكلة الاولية
معاملات القيود المرتبط بـ $s_1$	معاملات القيود المرتبط بـ $s_3$	معاملات القيود المرتبط بـ $s_1$	معاملات القيود المرتبط بـ $s_3$
٣ ص	٥ ص	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
٤ ص	١ ص	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
٥ ص	٢ ص	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

#### كيفية التعامل مع المشاكل ذات المتباينات المختلطة :

من المهم جدا ان نتعرض هنا لكيفية التصرف والتعامل مع مشاكل البرمجة الخطية ذات القيود مختلفة الإشارة، فقبل ان نستمر في تحليلنا لكيفية استخدام معلومات المشكلة الثنائية في استكمال تحليل الحساسية لباقي عناصر نموذج البرمجة الخطية، لابد أن نوضح كيفية التصرف في مثل هذا الموقف أولا، ففى مناقشتنا السابقة

للمشكلة الثنائية كانت الامثلة التي آوردناها على قيود المشكلة الاولى كلها من نفس النوع أي كانت كلها أقل من أو يساوي ( $\geq$ ) بالنسبة لمشاكل التعظيم، أو كلها كانت أكبر من أو يساوي ( $\leq$ ) بالنسبة لمشاكل التخفيض، ولكن هذه الافتراضات عملية مجردة وبعيدة عن الواقع العملي، إذ ليس من الضروري أن نجد دائماً أن كافة قيود المشكلة الاولى للتعظيم كلها أقل من أو يساوي، وكذلك الحال بالنسبة لمشاكل التخفيض، إذ ليس من الضروري أن تكون كلها أكبر من أو يساوي.

ولذلك إذا لم تكن جميع القيود المفروضة على المشكلة متحدة الاتجاه الذي تتفق مع طبيعة اتجاه دالة الهدف، فيستلزم الأمر إجراء تدخل بسيط وهام جداً قبل صياغة المشكلة الثنائية. ولكن ما الداعي لهذا الإجراء أساساً؟

للإجابة على هذا التساؤل نقول أنه عندما تكون كل القيود الموجودة بمشكلة التعظيم هي أقل أو يساوي أو عندما تكون كل القيود الموجودة بمشكلة التخفيض هي أكبر من أو يساوي، فإنه يصبح من السهل جداً صياغة المشكلة الثنائية متبعين نفس الخطوات التي ذكرناها في أعداد هذه الصياغة، أما إذا اتضح أن هناك بعض القيود تأخذ اتجاهها مغايراً ومخالطاً بالنسبة لنوعية المشكلة التي تعبر عنها دالة الهدف من حيث التعظيم أو التخفيض، فيتعين إجراء التعديل على قيود المشكلة الاولى، حتى يكون من السهل اتباع الخطوات العامة لصياغة المشكلة الثنائية.

وتأسيساً على ما تقدم سنوضح فيما يلي كيف يمكن إجراء التعديل المطلوب على متباينات القيود لتصبح جميعها متحدة الاتجاه حسب طبيعة هدف المشكلة.

فإذا كانت المشكلة الاولى أو الاصلية هي إحدى صور مشاكل تعظيم دالة الهدف، وتحتوي على قيود من

بينها قيد اكبر من أو يساوى (  $\leq$  ) ، فإنه يتم ضرب طرفي ذلك القيد في القيمة (١-) ، حيث ان هذا الاجراء يعمل على تحويل اتجاه المتباينة ليصبح قيد أقل من أو يساوى (  $\geq$  ) . ونفس هذا الاجراء يكون من الضروري اجراؤه اذا كانت المشكلة الاولية أو الاصلية هي احدى صور مشاكل تخفيض دالة الهدف وتحتوى على قيود من بينها قيد اقل من أو يساوى (  $\geq$  ) .

ولتوضيح كيف ان هذا الاجراء يعمل على تغيير اتجاه القيد من الحالة التى هو عليها الى الحالة العكسية ، نفرض مثلا انه توجد لدينا المتباينة التالية :

$$2س٢ \geq 10$$

فاذا كانت قيمة س٢ = ٤ فان هذا القيد يتحقق (  $2 \times 4 > 10$  ) ، ولكن اذا كانت قيمة س٢ = ٦ ، فان القيد لن يتحقق (  $2 \times 6 \leq 10$  ) ، اما اذا تم ضرب طرفى القيد في (١-) فاننا بذلك نغير اتجاه المتباين، أي سيكون القيد بعد عملية الضرب على الصورة التالية :

$$2س٢ - 10 \leq 0$$

وبالتعويض بقيم س٢ = ٤ ، س٢ = ٦ ، سوف نجد أن القيد يتحقق عندما تكون س٢ = ٤ ، ولا يتحقق عند س٢ = ٦ ، وهذا يؤكد ان ضرب طرفى القيد في القيمة (١-) يغير اتجاه التباين .

مثال :

فيما يلى الصياغة الرياضية التى تمثل مشكلة

احدى الشركات الانتاجية :

دالة الهدف = تعظيم ٢٠٠٠ س١ + ٥٠٠٠ س٢ + ٤٠٠٠ س٣ + ٤٠٠٠ س٤

القيود : بشرط أن :

$$20س١ + 25س٢ + 30س٣ + 15س٤ \geq 900$$

$$20s_1 + 20s_2 + 12s_3 + 10s_4 \geq 900$$

$$s_1 \leq 5$$

$$s_3 \leq 3$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \leq \text{مفر}$$

والمطلوب : اعداد الصياغة الثنائية الممثلة والمقابلـة لتلك الصياغة الاولى .

الحل :

يتضح من الصياغة الاولى الواردة بالمشان السابق ان المتباينات الواردة بها مختلفة الاتجاه، فهناك قيود متماشية مع الاتجاه ومتفقة مع اتجاه دالة الهدف، وهما القيدين الاول والثاني، أما القيدين الثالث والرابع فهما عكس الاتجاه الصحيح، ويتطلب الامر قبل اعداد الصياغة الثنائية ان نضرب طرفي كل قيد منهما في القيمة ( -١ )، وبعد اجراء هذا التعديل ستظهر الصياغة الاولى على الوجه التالي :

$$\text{دالة الهدف : تعظيم } 2000s_1 + 5000s_2 + 4000s_3 + 2000s_4$$

القيود : بشرط أن :

$$20s_1 + 25s_2 + 30s_3 + 15s_4 \geq 900$$

$$20s_1 + 20s_2 + 12s_3 + 10s_4 \geq 900$$

$$-s_1 \geq -5$$

$$-s_3 \geq -3$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \leq \text{مفر}$$

وعلى ذلك يمكن صياغة النموذج الثنائي على الوجه الصحيح التالي :



دالة الهدف : تخفيض ٩٠٠ ص ١ + ٩٠٠ ص ٢ - ٥٥ ص ٣ - ٣ ص ٤

القيود : بشرط أن :

$$٢٠ ص ١ + ٢٠ ص ٢ - ٣ ص ٣ \leq ٢٠٠٠$$

$$٢٥ ص ١ + ٢٠ ص ٢ \leq ٤٠٠٠$$

$$٣٠ ص ١ + ١٢ ص ٢ - ٤ ص ٤ \leq ٤٠٠٠$$

$$١٥ ص ١ + ١٠ ص ٢ \leq ٢٠٠٠$$

$$١ ص ١ ، ٢ ص ٢ ، ٣ ص ٣ ، ٤ ص ٤ \leq \text{مقرر}$$

تبين مما سبق الاجراء الذى يتم عمله لتعديل اتجاه القيد ليصبح في اتجاه دالة الهدف ، ولكن ماهو الوضع اذا كان القيد يمثل معادلة ، أي أنه قيد متساوى الجانبين ؟ ان القيود المتساوية الجانبين ( معادلة ) تتطلب تعديلا معقدا بعض الشيء وذلك قبل اعداد صياغة المشكلة الثنائية ، فالقيد المتعادل في المشكلة الاولى يجب أولا ان يحل محله متباينين احدهما اكبر من أو يساوى (  $\leq$  ) ، والاخرى اقل من أو يساوى (  $\geq$  ) وعلى سبيل المثال اذا كانت الصياغة الاولى بها القيد المتساوى الآتي :

$$١٠٠ = ٣ ص ١ + ٤ ص ٢ + ٢ ص ٣$$

فانه يتم الغاء هذا القيد واحلال قيدين آخرين محله في صورة متباينين اولهما اكبر من أو يساوى والاخر اقل من أو يساوى كالآتي :

$$١٠٠ \leq ٣ ص ١ + ٤ ص ٢ + ٢ ص ٣$$

$$١٠٠ \geq ٣ ص ١ + ٤ ص ٢ + ٢ ص ٣$$

وبعد اجراء هذا التعديل نجد أن احد القيدين يأخذ الاتجاه غير الصحيح ، اذ انها مشكلة تعظيم ، ويتطلب الامر ان تكون القيود اقل من أو يساوى ، لذلك يتعين تعديل

هذا القيد مرة أخرى عن طريق ضرب طرفي ذلك القيد في القيمة ( ١- ) ، ومن ثم فإن المتباينتين اللتين ستحلان محل القيد المتساوي السابق هما :

$$100 \geq 3s^2 + 2s^4 + s^3$$

$$100 - \geq 3s^2 - 2s^4 - s^3 -$$

مثال :

بفرض ان الصياغة التالية تمثل مشكلة اولية من مشاكل البرمجة الخطية ، والمطلوب اعداد الصياغة الثنائية لها .

دالة الهدف : تعظيم  $12s_1 + 16s_2 + 8s_3$   
القيود : بشرط أن :

$$400 = 4s_1 + 4s_2 + 4s_3$$

$$1400 \geq 8s_1 + 12s_2 + 8s_3$$

$$1200 \leq 12s_1 + 8s_2 + 4s_3$$

$$\leq \text{صفر} \quad s_1, s_2, s_3$$

الحل :

حيث ان هذه المشكلة ذات هدف تعظيم ، اذن ينبغي أن تكون القيود التي تتضمنها الصياغة الرياضية فسي اتجاهها الصحيح بالنسبة لهذا النوع من المشاكل ، أي أن تكون جميعها متباينات اقل من أو يساوي (  $\geq$  ) وذلك قبل اعداد الصياغة الثنائية لها حتى يكون من السهل واليسير اتباع الخطوات المعتادة والعامّة لصياغة المشكلة الثنائية .

ومن خلال تفحص اتجاه المتباينات السابقة سنجد أنها متباينات مختلطة وتحتوى على الانواع الثلاثة من المتباينات ( = ) ، (  $\geq$  ) ، (  $\leq$  ) . لذلك يتطلب الامر جعلها جميعا في الاتجاه الصحيح أي تكون جميعها (  $\geq$  ) وهذا يتطلب

تعديل المتباينيتين المغايرتين للاتجاه الصحيح (الاولى،  
والثالثة ) .

تعديل المتباينة الاولى :

المتباينة الاولى كانت على الصورة التالية :

$$400 = 1s_4 + 2s_4 + 3s_4$$

وهذا كما هو واضح قيد متعادل الجانبين ( أي  
معادلة ) ، وكما سبق القول فانه لكى يمكن جعله في  
الاتجاه الصحيح بالنسبة لطبيعة مشكلة التعظيم (  $\geq$  )  
ينبغى أن يحل محله متباينتين ، احدهما اكبر من أو  
يساوى ، والاخرى اقل من أو يساوى كالآتي :

$$400 \geq 1s_4 + 2s_4 + 3s_4$$

$$400 \leq 1s_4 + 2s_4 + 3s_4$$

وبعد اجراء هذا التعديل سنجد أن المعادلة الثانية  
أصبحت في عكس الاتجاه الصحيح لأنها (  $\leq$  ) ، وهذا  
لايتفق مع مشكلة التعظيم ، لذلك ينبغى تعديلها لتأخذ  
الاتجاه الصحيح وذلك بضرب طرفيها في القيمة ( -١ ) ومن  
ثم تصبح المتباينة كالآتي :

$$-400 \leq -1s_4 - 2s_4 - 3s_4$$

وباجراء هذا التعديل يصبح لدينا قيدين سيحلان محل  
القيد المتساوى الاول وهما :

$$400 \geq 1s_4 + 2s_4 + 3s_4$$

$$-400 \leq -1s_4 - 2s_4 - 3s_4$$

من ناحية اخرى سنجد ان القيد الثالث في الصياغة  
الاولية (  $12s_1 + 8s_2 + 4s_3 \leq 1200$  ) في غير  
الاتجاه الصحيح لأنه (  $\leq$  ) وهذا لايتفق مع مشكلة

التعظيم ، والاجراء التعديلي المطلوب هو ضرب طرفي هذا القيد في القيمة (١-) ليأخذ الاتجاه الصحيح، ويكون هذا القيد بعد هذا الاجراء كالآتي :

$$- ١٢٠٠ \leq - ٣٨٨ - ٣٤٣ - ١٢٠٠$$

وبعد اجراء التعديلات السابقة سنعيد فيما يلي الصياغة الاولى الاصلية :

$$\text{دالة الهدف} = \text{تعظيم } ١٢٠٠ + ٣٨٨ + ٣٤٣$$

القيود : بشرط أن :

$$٤٠٠ \geq ٣٤٣ + ٣٨٨ + ١٢٠٠$$

$$- ٤٠٠ \geq - ٣٤٣ - ٣٨٨ - ١٢٠٠$$

$$١٤٠٠ \geq ٣٨٨ + ٣٤٣ + ١٢٠٠$$

$$- ١٢٠٠ \geq - ٣٨٨ - ٣٤٣ - ١٢٠٠$$

$$٣ \leq ٣٨٨ ، ٣٤٣ ، ١٢٠٠$$

وحيث ان المطلوب هو ايجاد الصياغة الثنائية لهذه الصياغة الاولى ، لذلك سيتم السير في خطوات تحويل المشكلة من صياغتها الاولى الى صياغتها الثنائية وهذه الخطوات هي :

١- بموجب قواعد ايجاد الصياغة الثنائية ، يتم تخصيص متغير ثنائي لكل قيد من قيود المشكلة الأولية ، وحيث ان عدد القيود السابقة عددها أربعة ، لذلك سيتم تخصيص المتغيرات التالية كمتغيرات ثنائية تقابل تلك القيود على الترتيب ( ٣ ، ٢ ، ١ ، ٤ ) .

٢- يتم تخصيص قيد في الصياغة الثنائية لكل متغير قرارى موجود بالصياغة الاولى ، وحيث ان المتغيرات القرارية في الصياغة الاولى هي ( ٣ ، ٢ ، ١ ) لذلك ستضمن الصياغة الثنائية عدد ثلاثة قيود فقط :

٣- تتحول ثوابت القيود بالنموذج الاولى (الأولي) الى معاملات للمتغيرات الثنائية في دالة هدف النموذج الثنائي . وبذلك تكون دالة هدف النموذج الثنائي كالآتي :

$$\text{تخفيض } ٤٠٠ \text{ ص } ١ - ٤٠٠ \text{ ص } ٢ + ١٤٠٠ \text{ ص } ٣ - ١٢٠٠ \text{ ص } ٤$$

٤- تتحول معاملات المتغيرات القرارية في دالة هدف النموذج الاولى الى ثوابت لقيود النموذج الثنائي . وبذلك تكون الصياغة الثنائية كالآتي :

$$\text{دالة الهدف : تخفيض } ٤٠٠ \text{ ص } ١ - ٤٠٠ \text{ ص } ٢ + ١٤٠٠ \text{ ص } ٣ - ١٢٠٠ \text{ ص } ٤$$

القيود : بشرط أن :

$$٤ \text{ ص } ١ - ٤ \text{ ص } ٢ + ٨ \text{ ص } ٣ - ١٢ \text{ ص } ٤ \leq ١٢$$

$$٤ \text{ ص } ١ - ٤ \text{ ص } ٢ + ١٢ \text{ ص } ٣ - ٨ \text{ ص } ٤ \leq ١٦$$

$$٤ \text{ ص } ١ - ٤ \text{ ص } ٢ + ٨ \text{ ص } ٣ - ٤ \text{ ص } ٤ \leq ٨$$

$$\text{ص } ١ , \text{ ص } ٢ , \text{ ص } ٣ , \text{ ص } ٤ \leq \text{صفر}$$

وبذلك تكون الصياغة الاولى والثنائية كالآتي :

الصياغة الثنائية

$$\text{تخفيض } ٤٠٠ \text{ ص } ١ - ٤٠٠ \text{ ص } ٢ + ١٤٠٠ \text{ ص } ٣ - ١٢٠٠ \text{ ص } ٤$$

بشرط أن =

$$٤ \text{ ص } ١ - ٤ \text{ ص } ٢ + ٨ \text{ ص } ٣ - ١٢ \text{ ص } ٤ \leq ١٢$$

$$٤ \text{ ص } ١ - ٤ \text{ ص } ٢ + ١٢ \text{ ص } ٣ - ٨ \text{ ص } ٤ \leq ١٦$$

$$٤ \text{ ص } ١ - ٤ \text{ ص } ٢ + ٨ \text{ ص } ٣ - ٤ \text{ ص } ٤ \leq ٨$$

$$\text{ص } ١ , \text{ ص } ٢ , \text{ ص } ٣ , \text{ ص } ٤ \leq \text{صفر}$$

الصياغة الاولى

$$\text{تعظيم } ١٢ \text{ ص } ١ + ١٦ \text{ ص } ٢ + ٨ \text{ ص } ٣$$

بشرط أن :

$$٤٠٠ \geq ٤ \text{ ص } ١ + ٤ \text{ ص } ٢ + ٤ \text{ ص } ٣$$

$$٤٠٠ - \geq ٤ \text{ ص } ١ - ٤ \text{ ص } ٢ - ٤ \text{ ص } ٣$$

$$١٤٠٠ \geq ٨ \text{ ص } ١ + ١٢ \text{ ص } ٢ + ٨ \text{ ص } ٣$$

$$- ١٢٠٠ \geq - ١٢ \text{ ص } ١ - ٨ \text{ ص } ٢ - ٤ \text{ ص } ٣$$

$$\text{ص } ١ , \text{ ص } ٢ , \text{ ص } ٣ \leq \text{صفر}$$



## استخدام نتائج النموذج الثنائي في استكمال تحليل حساسية باقي العناصر :

كما يلاحظ القارئ اننا بدأنا هذا الفصل بتناول تحليل عناصر نموذج البرمجة الخطية ، الا اننا لم نتناول الا تحليل حساسية عنصرين فقط من تلك العناصر ، وهمما التغير في معاملات دالة الهدف ، وكذلك حساسية الحل الأمثل للتغيرات في ثوابت القيود ، أما العناصر الثلاثة الاخرى المكملة لعناصر نموذج البرمجة الخطية ، فقد أجلناها بعض الشيء الى حين الانتهاء من استعراض مفهوم ومغزى ونتائج النموذج الثنائي ، وذلك للسبب الذي ذكرناه في حينه ، وهو ان لتحليل نتائج النموذج الثنائي دور هام وأساسي في تحليل حساسية باقي العناصر .

وبعد أن انتهينا من توضيح وتفسير النموذج الثنائي سنرى كيف أن المعلومات الخاصة بالعلاقة بين النموذج الاولي (الاصلي) ، والنموذج الثنائي تمكننا من الاجابة على عديد من اسئلة تحليل الحساسية والتي تعتبر على درجة عالية من الأهمية للتطبيق الاداري ولتخذ القرار ، وتتضمن هذه الاسئلة مايلي :

- ١- ماهي القيمة الحدية لاضافة وحدة واحدة من الموارد المتاحة ؟
- ٢- ماهو التأثير الذي ينتج عن اضافة متغيرات قرارية جديدة ؟ .
- ٣- ماهو تأثير التغيرات في معاملات استخدام المورد المتاح ؟

وفيما يلي نتناول الاجابة على هذه التساؤلات على التتابع .

### اولا: تحديد القيم الحدية للمورد (المتاح) :

Determining Marginal Resource Values

يمكن الحصول من جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية

على معلومات هامة جدا من وجهة نظر تحليل الحساسية، ومن بينها مايعنينا في هذا الجزء، وهي المعلومات التي تفيد في تحديد القيم الحدية للموارد، فنحن نعلم ان كل قيد بالمشكلة الاولى يقابله متغير بالمشكلة الثنائية، أي أنه يمكن القول ان قيم المتغيرات الاساسية بجدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية والتي تقابل قيود أقل من أو يساوي بالمشكلة الاولى، تمثل القيمة الحدية للمورد النادر والذي يتعمل بقيد النموذج الاصلى، هذه القيمة الحدية تعادل مقدار الزيادة في دالة الهدف نتيجة زيادة وحدة واحدة من المورد المتاح. وفي حالة القيود أكبر من أو يساوي فان القيمة المثلى لمتغير النموذج الثنائي تعتبر التكلفة الحدية المرتبطة بذلك الحد الأدنى، ولذلك فان التكلفة الحدية تشير الى الزيادة في دالة الهدف ( والتي نسعى الى تحقيقها ) والناشئة عن زيادة وحدة واحدة في ذلك الحد الأدنى.

ولتوضيح ذلك، سنعيد تصوير جدول الحل الأمثل وفقا للمياغة الثنائية لشركة القاهرة للمصناعات الهندسية، حتى نستطيع ان نوضح ماذا نقصده بتحديد القيم الحدية للمورد وكيف يمكن التوصل اليها من الجدول الأمثل للمشكلة الثنائية.

جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الأرباح الداخلة	٢٦	٤٠	١٠	صفر	صفر
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥
٢٦	ص ١	١	١	صفر	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} -$	$\frac{1}{4}$
٤٠	ص ٢	٢	صفر	١	$\frac{1}{4} -$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8} -$
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢٦	٤٠	٨	٨ -	٦ -
١١٦	صافي التغير		صفر	صفر	٢	٨	٦

وحيث ان ص<sub>١</sub> ، ص<sub>٢</sub> ، ص<sub>٣</sub> تمثل القيسود  
 بالمشكلة الاولى ، وفقا لترتيبها وهي وقت التصنيع ،  
 وقت التجميع ، رقائق الخشب ، وحيث ان قيم الحل الأمثل  
 بذلك الجدول هي : ص<sub>١</sub> = ١ ، ص<sub>٢</sub> = ٢ ، ص<sub>٣</sub> = ٣ = صفر  
 فان هذه القيم تمثل على الترتيب القيمة الحدية لاضافة  
 وحدة واحدة من وقت التصنيع ، ووقت التجميع ، ورقائق  
 الخشب .

وبمعنى أكثر تحديدا فان نتائج الحل في الجدول  
 السابق تشير الى أنه اذا أضيفت الى طاقة قسم التصنيع  
 المتاحة حاليا (٣٦ ساعة) ساعة واحدة اضافية ، فان ذلك  
 سيترب عليه ان دالة الهدف ، أو اجمالي المساهمة في  
 الارباح ستزداد بمقدار جنيه واحد . واذا اضيفت الى  
 طاقة قسم التجميع المتاحة حاليا (٤٠ ساعة) ساعة واحدة  
 اضافية ، فان دالة الهدف ستزداد بمقدار ٢ جنيه ، أما  
 اذا زادت طاقة رقائق الخشب المتاحة (١٠ وحدات) بمقدار  
 وحدة واحدة فان دالة الهدف لن تزيد بشئ حيث ان القيمة  
 الحدية لهذه الوحدة حسب نتائج الحل = صفر .

ولعل هذه التفسيرات قد تثير تساؤلات متعددة وهي  
 من أين تأتي هذه الزيادة في دالة الهدف ؟ أو بمعنى  
 آخر ، من أين يأتي ذلك الجنيه الذى تزداد به قيمة دالة  
 الهدف اذا ماتم زيادة طاقة قسم التصنيع بمقدار ساعة  
 واحدة ؟ ولماذا تزداد قيمة دالة الهدف بمقدار ٢ جنيه  
 اذا زادت طاقة قسم التجميع بساعة اضافية واحدة ؟ ولماذا  
 لا تزداد دالة الهدف بأي مقدار نتيجة زيادة رقائق الخشب  
 بوحدة واحدة ؟ . كلها تساؤلات تستحق التوضيح والاثبات .  
 ومن أجل ايجاد اجابة واضحة على كافة هذه التساؤلات  
 نرجع الى بيانات الجدول الذى يمثل الحل الأمثل للمشكلة  
 الاولى والذى كان على الصورة التالية :

## جدول الحل الامثل للمشكلة الاولى

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	٧	١٠	مفر	مفر	مفر
		القيم	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س
٧	١ س	٨	١	مفر	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	مفر
١٠	٢ س	٦	مفر	١	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	مفر
مفر	٥ س	٢	مفر	مفر	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	١
	دالة الهدف	التكاليف الداخلية	٧	١٠	١	٢	مفر
	١١٦	صافي التغير	مفر	مفر	١ -	٢ -	مفر

من هذا الجدول وتحت عمود المتغير س<sub>٣</sub> وهو المتغير الممثل لقيد ساعات التصنيع ، حيث انه المتغير الراكد الذي اضيف الى قيد التصنيع لتحويله الى معادلة ، سنجد ان المعاملات الواردة تحت هذا المتغير والتي تمثل مقدار التضحية من كل متغير اساسي والتي يتعين التضحية بها مقابل زيادة المتغير الراكد ( س<sub>٣</sub> ) بمقدار وحدة واحدة . وحيث اننا كنا ننظر الى التكاليف الداخلية للمتغير الراكد باعتبارها تضحية ناشئة عن انخفاض في وقت التصنيع بساعة واحدة ( حيث ان زيادة الطاقة العاطلة بمقدار ساعة هو بمثابة تخفيض وقت التصنيع بهذه الساعة ) ، لذلك يمكن ان نعتبر ذلك ارباح داخلية للمتغير الراكد عندما يزيد زمن التصنيع المتاح بساعة واحدة ، وهذا هو الذي يجعلنا نقول ان قيمة صافي التغير س<sub>٣</sub> = ١ - ، يعتبر قيمة حدية مقدارها جنيه لكل وحدة تزيد في وقت التصنيع ، وهي نفس النتيجة التي اظهرها جدول الحل الامثل للمشكلة الشئانية ( ص<sub>١</sub> = ١ ) .



وبينفس المنطق ، فان القيمة الحديدية لاضافة ساعة من وقت التجميع هو ٢ جنيه ، وهنا يتبادر الى الذهن تساؤل ، وهو لماذا نجد أن المتغير الثالث ( ص ٣ ) للنموذج الثنائي والمقابل لقيد رقائيق الخشب له قيمة مقدارها صفر ؟ يمكن توضيح الاجابة على ذلك التساؤل من خلال ملاحظة انه قد ظهر المتغير الراكد ( س ٥ ) في جدول الحل للمشكلة الاولى كمتغير اساسي وبقيمة مقدارها ( ٢ ) ، ان ذلك يعنى ان هناك عدد وحدتين من رقائيق الخشب لم يستخدم في المزيج الانتاجي الأمثل . وحيث انه يوجد فائض في رقائيق الخشب ، أي ان هذا المورد غير نادر ، لذا فان أي زيادة في عدد وحدات رقائيق الخشب لن تضيف شيئاً الى اجمالي مساهمة الحل الأمثل . لذلك وجدنا ان القيمة الحديدية لاضافة أي وحدة من رقائيق الخشب هي صفر .

الا انه يتعين ان نقف على حقيقة معينة حتى لاتختلط المعاني في هذا المجال ، اذ ينبغي الا يفسر معنى القيمة الحديدية للمورد بتكلفته ، فهناك فرق بين المعنيين ، فالأولى يطلق عليها سعر ظل المورد ، أما الثانية فتعنى تكلفة الحصول على المورد ، فعلى سبيل التوضيح فقد حددنا القيمة صفر لرقائيق الخشب ، ان ذلك لايعنى اننا نحمل على هذه الرقائيق مجانا وبدون مقابل ان هذا التفسير غير صحيح ، فهذه الرقائيق لها تكلفة لابد من دفعها لتحمل عليها الشركة . ولكن معنى القيم الحديدية للمورد ( سعر ظل المورد ) انها تشير الى تأثير التغيرات في كمية الموارد المتاحة ، وحيث ان الحل الأمثل سيترك وحدتين من رقائيق الخشب غير مستغلة ، ولذلك فان وحدة اضافية أو وحدة أقل من المتاح لن تؤثر على الحل الأمثل او على قيمة دالة الهدف . اذن يمكن القول ان القيمة الحديدية لوحدة من رقائيق الخشب هي صفر على الرغم ان تكلفتها الحديدية غير صفرية .



ويمكن توضيح ذلك بطريقة اخرى ، وهى ان رقائيق الخشب ، قد فقدت قدرتها النسبية مما يعنى ان سعرها ينبغي أن ينخفض الى الصفر بموجب قوانين العرض والطلب .

وبناء على ماتقدم فانه يمكن اعتبار قيم المتغيرات الاساسية بجدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية هى اسعار التوازن للمورد او ما يطلق عليه اسعار ظل المورد **Shadow Prices** ، وعلى ذلك يمكن تفسير النموذج الثنائي على انه يحاول تخفيض دالة الهدف ( اذا كانت المشكلة الاولى تعظيم ) عن طريق ايجاد الحد الادنى لتكلفة الفرصة البديلة للموارد المستخدمة في العمليات مقومة بأسعار الظل .

ويمكن ان نخلص من العرض السابق الى مجموعة الحقائق التالية :

١- تمثل قيم المتغيرات الاساسية بجدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية ما يطلق عليه القيمة الحدية للمورد او ما يسمى بأسعار ظل المورد ، وهو السعر الذى يرى معه المنتج انه سياتى لديه ان يبيع وحدات المورد عند تلك الاسعار أو ان يستخدمها في انتاج مزيج الانتاج الأمثل ، وهو الذى يجعل الارباح القصوى تتعادل مع الموارد المتاحة مقومة بأسعار ظلها .

٢- يعادل سعر ظل المورد المعين مقدار الزيادة في دالة الهدف نتيجة اضافة وحدة اضافية واحدة من ذلك المورد .

٣- يأخذ سعر ظل الوحدة من أي مورد نادر قيمة موجبة .

٤- سعر ظل الوحدة من أي مورد توجد منه طاقة غير مستغلة تعادل صفر .

## استخدام أسعار الظل فى ترشيد القرارات الادارية :

تعتبر القيم الحدية لكل مورد من الموارد المستخدمة فى انتاج المزيج الانتاجي لاي مؤسسة مفيدة ومهمة جسداً من وجهة النظر الادارية ، وسبق القول أن القيم الحدية للمورد Marginal Resource Values هي نفسها سعر ظل المورد Shadow Price ، ووقوف الادارة على أسعار ظل الموارد المختلفة التى تستخدمها من المعلومات المهمة جدا فى ترشيد اتخاذ القرارات الادارية ، لانه يمكن من خلالها ان تتعرف ادارة المشروع عما اذا كان من المفيد زيادة وحدة اضافية من الموارد المتاحة أم لا ؟ بمعنى ان الادارة من خلال وقوفها على أسعار الظل تستطيع ان تتعرف على تلك الموارد التى تؤدى زيادتها الى زيادة الربحية ، وتلك التى لاتؤثر على قيمة دالة الهدف ، فاذا كان فى الامكان تشغيل كل من قسم التصنيع وقسم التجميع وقتاً اضافياً ، أي زيادة الطاقة المتاحة لهذه الاقسام ، فانه اذا لم تكن التكلفة الحدية للوقت الاضافي اقل من جنيه لكل ساعة تصنيع ( سعر ظل ساعة التصنيع ) ، او ٢ جنيه لكل ساعة تجميع ( سعر ظل ساعة التجميع ) . فان مثل هذا الوقت الاضافي لن يكون مربحاً .

وبمعنى آخر ، فحيث انه قد تبين مما سبق أن سعر الظل يمثل العائد الحدى الذى تساهم به وحدة اضافية من مورد معين فى تغطية التكاليف الثابتة والربح . لذلك فانه يمكن للادارة ان تتعرف على الموارد الأكثر توليداً للارباح ومن ثم زيادة قيمة دالة الهدف . وبمعرفة الادارة لهذه المعلومات يمكن ان تركز عندئذ على زيادة كميات ذلك المورد الذى له سعر ظل كبير نسبياً ، هذا مع العمل فى الوقت نفسه على حسن استخدام ما هو متاح منه .

ومن ناحية أخرى اذا كان سعر ظل مورد معين صفر ( مثل رقائق الخشب ) فان ذلك معناه ان طاقة هذا المورد

أي المتاح منه لم يستنفذ بالكامل ولكن مازالت به وحدات أو ساعات غير مستغلة ، وهذا يلفت نظر الإدارة الى ضرورة العمل على الاستفادة من الطاقة غير المستغلة لهذا المورد وتوجيهها الى استخدامات أخرى ، وكذلك عدم الشراء بكميات كبيرة تفوق الاحتياجات الحقيقية المطلوبة .

ان تلك المزايا السابقة ما هي الا بعض الأمثلة لدور أسعار الظل في ترشيد القرارات الادارية .

لقد تبين من التحليل السابق ان زيادة وحدة واحدة من طاقة قسم التصنيع ( ساعة تصنيع اضافية ) ستعمل على زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار ١ جنيه ، وزيادة ساعة واحدة بقسم التجميع ستعمل على زيادتها بمقدار ٢ جنيه وهنا قد يثار تساؤل هل تلك القيم الحدية قابلة للتطبيق على طول المدى ؟ بمعنى هل أي زيادة مهما كان مقدارها في تلك الاقسام تحقق نفس مقدار الزيادة في دالة الهدف ؟ فهل مثلاً يمكن ان تزيد ساعات التشغيل بقسم التصنيع بأي عدد ممكن من الساعات وتستمر الاستفادة بالقيمة الحدية ومقدارها جنيه لكل ساعة يتم اضافتها ؟ .

للإجابة على هذا التساؤل نقول ان مدى الزيادة ليس مطلق ، فالقيمة الحدية قابلة للتطبيق حتى مدى أو نطاق التغير في طاقات الموارد دون أن يتغير الوضع الأمثل للمتغيرات الأساسية ، فهذه الحدود هي فقط المدى الذي يمكن ان تطبق فيه القيمة الحدية للمورد ( سعر الظل ) .

### ثانياً : اضافة متغيرات قرارية جديدة :

سنعود في هذا الجزء مرة أخرى الى متابعة موضوع تحليل الحساسية لباقي عناصر نموذج البرمجة الخطية والتي تعتمد على نتائج النموذج الثنائي ، ولهذا سنتناول فيما يلي التأثير الذي ينتج عن اضافة متغيرات قرارية جديدة .

ولقد تم تأجيل مناقشة هذا الموضوع حتى يتم استكمال شرح وتفسير النموذج الثنائي ونتائجه وذلك لان من الفوائد والمزايا الاخرى التي يمكن الحصول عليها من صياغة المشكلة الثنائية هي امكانية تقييم تأثير اضافة متغيرات قرارية جديدة .

فعلى سبيل المثال اذا فرض ان الشركة الصناعية التي وردت بالمثال السابق في مقدمة هذا الفصل والتي كانت تنتج أربعة منتجات هي س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، س<sub>٣</sub> ، س<sub>٤</sub> ، تفكر في تقديم منتج جديد ( س<sub>٥</sub> ) ، وبفرض انه عند اعداد الصياغة الاولى للمشكلة ، لم يدخل متغير أو أكثر من المتغيرات القرارية المحتملة وذلك بسبب عدم التقدير الصحيح لربحيته النسبية ، أو لأن المتغير المستبعد والذي كان من الواجب اعتباره كمنتج جديد ، لم تكن تتوافر عنه كافة المعلومات الخاصة به وقت اعداد الصياغة وحل المشكلة .

في الحقيقة ان هذا الوضع لا يمثل مشكلة تعوق الادارة في معرفة الاثر المحتمل لذلك ، حيث يوجد اختبار بسيط ويسير لتحديد عما اذا كان اضافة المتغير المستبعد ( المنتج المستبعد ) سيكون سببا في تغيير الحل الامثل ( اذا ماتم تمثيله في الصياغة الرياضية ) أم لا ؟ وذلك دون الحاجة الى اعادة الصياغة واعادة حل المشكلة من جديد مرة أخرى .

وللتمهيد لهذا الاختبار ، نقول انه سبق وأن ذكرنا عند اعداد صياغة المشكلة الثنائية ، انه يوجد في صياغة المشكلة الثنائية قيد يقابل كل متغير قرارى فى المشكلة الاولى أو الاصلية . وعلى ذلك فان اضافة متغير قرارى جديد للمشكلة الاصلية هو بمثابة اضافة قيد جديد للمشكلة الثنائية .



واستنادا على هذا التوضيح يمكن القول انه بصفة عامة اذا كانت قيم المتغيرات الثنائية بجدول الحل الامثل للمشكلة الثنائية تستوفي اضافة هذا القيد في النموذج الثنائي ، فان الحل الحالي يظل كما هو امثل اما اذا لم يتم استيفاءه فسيطلب الامر تحسين الحل وهذا يعنى ان يفقد الجدول الاخير امثليته .

مثال :

بفرض ان شركة القاهرة للصناعات الهندسية والتي سبق معالجة مشكلتها ، تفكر في اضافة نوعية جديدة من المنتجات ( س<sub>٣</sub> ) ، وقد تم تقدير هامش ربحها بمبلغ ١٢ جنيه للوحدة ، كذلك قدرت احتياجاتها من الاقسام الانتاجية كالآتي :

٣ ساعات تصنيع ، ٥ ساعات تجميع ، رقائق حشب من نوع خاص متوافرة ولا تمثل قيد فهل سيترتب على اضافة هذا المنتج الجديد ( س<sub>٣</sub> ) ان يفقد الحل الامثل بالجدول الاخير امثليته ؟

الحل :

١- يفيد تصوير جدول الحل الامثل وفقا للمياغة

الثنائية والذي سبق وان ظهر على الشكل التالي :

جدول الحل الامثل لمشكلة شركة القاهرة (النموذج الثنائي )

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الارباح الداخلة	٣٦	٤٠	١٠	مفر	مفر
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥
٣٦	ص ١	١	١	مفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} -$	$\frac{1}{4}$
٤٠	ص ٢	٢	مفر	١	$\frac{1}{4} -$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	٣٦	٤٠	٨	٨ -	٦ -
١١٦		هامش التغير	مفر	مفر	٢	٨	٦



٢- اعداد الصياغة الرياضية للقيد الثنائي الجديد والذي يمثل المتغير القراري الجديد ( س ٣ ) .

$$٣ص١ + ٥ص٢ + ٤ص٣ \leq ١٢$$

٣- نختبر عما اذا كانت قيم المتغيرات الثنائية بالجدول السابق تستوفي هذا القيد أم لا ؟ .

من الجدول يتضح ان قيم المتغيرات الثنائية هي =

$$١ص١ = ١ ، ٢ص١ = ٢ ، ٣ص١ = ٣$$

٠ . بالتعويض بتلك القيم في القيد الثنائي الذي

يمثل المتغير القراري الجديد ( س ٣ ) تكون النتيجة كالآتي :

$$٣ \times ١ + ٥ \times ٢ + ٤ \times ٣ \leq ١٢$$

$$١٢ \leq ١٣$$

ومعنى هذه النتيجة ان قيد الثنائية الجديد يفي بالقيم الحالية للمتغيرات الثنائية ، ولذلك فان الحل الثنائي يبقى حلا ممكنا ويكون الحل الاصلى أمثلا ومعنى ذلك ان قرار الانتاج الأمثل هو الذي ظهر بالجدول الاخير وانه لن يتم انتاج السلعة الجديدة ( س ٣ ) .

ولمزيد من التوضيح وباستخدام اسعار الظل يمكن ان نفسر النتائج السابقة بشكل اكثر تبسيطا ، وهذا التوضيح يبدأ بسؤال ، لماذا لم يتم انتاج السلعة س ٣ ، الاجابة ببساطة هي ان مساهمة السلعة الجديدة ( س ٣ ) لاتغطي اجمالى قيمة الموارد بسعر الظل . وهذا هو سبب اختلاف الجانب الايمن عن الجانب الايسر للمتباينة ( ١٢ ≤ ١٣ ) . ولهذا سنقوم فيما يلي بمقارنة عائد المساهمة للوحدة من س ٣ ، بتكلفة الموارد اللازمة لانتاج وحدة من س ٣ مقومة بأسعار الظل .

الموارد اللازمة لانتاج وحدة من س<sub>٣</sub> مقومة بأسعار الظل: جنيه جنيه

عدد ٣ ساعات تصنيع x ١ جنيه سعر الظل = ٣

عدد ٥ ساعات تصنيع x ٢ جنيه سعر الظل = ١٠

رقائق خشب x صفر جنيه سعر الظل = صفر

مجموع قيمة الموارد مقومة بأسعار الظل ١٣

عائد المساهمة للوحدة من س<sub>٣</sub> ١٢

الفرق بين الموارد بسعر الظل وعائد المساهمة ١-

وعلى ذلك ، وبناءً على نتيجة المقارنة السابقة يمكن ان نستنتج ان مساهمة السلعة الجديدة (س<sub>٣</sub>) لا بد ان تكون أكبر من ١٣ جنيه للوحدة حتى يكون انتاجها مربح. أو العمل على تخفيض احتياجاتها من الموارد بحيث تنخفض مجموع قيمة الموارد مقومة بأسعار الظل لتصبح اقل من ١٢ جنيه. فمثلاً اذا تم ضغط احتياجات تلك السلعة من قسم التجميع من ٥ ساعات الى اربعة ساعات فقط ، ستكون هذه السلعة مربحة في انتاجها وسيتغير الحل الوارد بالجدول الاخير وسيفقد فعاليته ويحتاج الامر الدخول في جولة تالية لتحسين الحل واختيار س<sub>٣</sub> كمغير داخل .

### ثالثاً : التغيرات في معدلات استخدام المورد:

#### Changes in Resource Utilization Rates

يهدف هذا الجزء الى شرح وتوضيح كيف ان البرامج الخطية وجدول الحل الامثل لها ، تعطى الادارة القدرة على تعديل مزيجها الانتاجي الامثل وفقاً للتغيرات الانتاجية - القرارات التكنولوجية - وسيكون محسور الاهتمام الرئيسي في هذا الجزء هو الاجابة على سؤال اساسي يشغل جزءاً كبيراً من اهتمام الادارة عند اتخاذ قراراتها ، وعند الاختيار ما بين البدائل المتاحة امامها وهو : ماذا يحدث للمزيج الانتاجي الامثل الحالي

للمنشأة ، اذا كانت احدى الآلات - مثلاً - والمشاركة في العملية الانتاجية ، قد تم تعديلها وتطويرها وأصبحت تتمكن من الانتهاء من دورها في انتاج السلعة في وقت أقل مما كانت عليه ؟

قبل الاجابة على هذا السؤال ، نقول ان عالم اليوم ومايشهده من تطور فنى وتقنى متلاحق وبصفة خاصة فى الآلات والمعدات المستخدمة في انتاج السلع ، سينعكس بلاشك على تخفيض معدل استخدام المنتج المعين للآلة بمدلول الوقت اللازم للانتهاء من اتمام العملية المعينة عليها ، وهذا الامر قد يترتب عليه ان يفقد الحل الامثل امثليته ، ولذلك يتطلب الامر حساب التغيرات فى المعاملات الفنية والتي يستمر الحل الامثل في ظلها دون تغيير . وهذا الحساب يتطلب بالتبعية توضيح الكيفية التي يمكن بها الحصول على تلك النتائج سواء من الحل الامثل للصياغة الاولى ، أو من جدول الحل الامثل للصياغة الثنائية .

ان التغيرات فى المعاملات الفنية قد تحدث للمتغيرات غير الاساسية او للمتغيرات الاساسية ، وتختلف طريقة حساب حدود المتغير فى تلك المعاملات باختلاف عما اذا كان المعامل لمتغير اساسي أو غير اساسي . ولهذا فاننا سنتناول فيما يلى حدود هذه التغيرات لكل نوع من تلك المتغيرات .

#### (١) التغير فى المعاملات الفنية للمتغيرات غير الاساسية :

المتغيرات غير الاساسية هى تلك المتغيرات ذات القيم الصغيرة ، وحتى يمكن تحليل أثر التغير فى المعاملات الفنية للمتغيرات غير الاساسية على أمثلية الحـسـل بالجدول الاخير نسوق المثال التالي :

مثال :

بفرض ان الصياغة التالية تمثل الصياغة الرياضية الاصلية لمشكلة احدى الشركات :

دالة الهدف = تعظيم  $١س٦ + ٢س٢٤$

القيود : بشرط أن :

$$١س٢ + ٢س٣ \geq ١٥ \quad (\text{ قيد الآلة أ } )$$

$$١س٢ + ٢س٣ \geq ٨ \quad (\text{ قيد الآلة ب } )$$

$$١س, ٢س \leq \text{صفر}$$

وبالسير في خطوات حل تلك المشكلة باستخدام أسلوب السمبلكس ، تم التوصل الى جدول الحل الأمثل التالي :

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٦	٢٤	صفر	صفر
		القيم	١س	٢س	٣س	٤س
٢٤	٢س	٤	$\frac{٢}{٣}$	١	$\frac{١}{٣}$	صفر
صفر	٤س	٤	$\frac{٤}{٣}$	صفر	$\frac{١}{٣} -$	١
دالة الهدف		التكاليف الداخلة	١٦	٢٤	٨	صفر
٩٦		صافي التغير	$١٠ -$	صفر	$٨ -$	صفر

وبفرض انه حدث تطور تكنولوجي للآلة (أ) مما أدى الى ان السلعة ( ١س ) وهي متغير غير اساسي في الجدول الامثل السابق ، اصبحت تتطلب لتصنيعها وقتا أقل من تلك الآلة ، وبفرض انه قد تم تحديد مقدار الانخفاض في متطلبات التصنيع للسلعة ١س على الآلة (أ) بمقدار معين وليكن ( ت ) ، أي أن معامل التطور التكنولوجي للمتغير ١س في معادلة قيد الآلة (أ) اصبحت ( ٢ - ت ) ، ان هذا التغير سيجعل الصياغة الاولى للمشكلة تصبح كالآتي :

$$\text{تعظيم } ١س٦ + ٢س٢٤$$

بشرط أن :

$$(٢-٢) \text{ س} + \text{س}^٢ \geq ١٥ \quad (\text{ قيد الآلة أ المطورة})$$

$$\text{س}^٢ + \text{س} \geq ٨ \quad (\text{ قيد الآلة ب})$$

$$\text{س} , \text{س}^٢ \leq \text{صفر}$$

يتضح من تلك الصياغة ان المتغير الوحيد الذي اضيف الى الصياغة الاولى هو تعديل معامل (س) فسي القيد الاول ، فبعد أن كان (٢) أصبح بعد التطوير التكنولوجي للآلة (أ) هو (٢-٢) ، واذا قمنا بحل المشكلة بعد هذا التعديل فسنصل الى جدول الحل الامثل التالي :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلة	٦	٢٤	صفر	صفر
		القيم	س	س	س	س
٢٤	س	٤	$\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣} \text{ ت}$	١	$\frac{١}{٣}$	صفر
صفر	س	٤	$\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٣} \text{ ت}$	صفر	$-\frac{١}{٣}$	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٦ + ٨ ت	٢٤	٨	صفر	صفر
٩٦	صافي التغير	- ١٠ - ٨ ت	صفر	- ٨	صفر	صفر

يمكن من ملاحظة عمود (س) والمعاملات الواردة به بالجدول الامثل بعد التعديل ، بمعاملاته بالعمود قبل التعديل ، وكذلك بمعاملات عمود س بالجدول بعد التعديل (س) هو المتغير المتعم لغير الآلة أ) ، يمكننا ان نستنتج الآتي :

اذا تم ضرب معاملات عمود (س) بجدول الحل الاصلي في قيمة التخفيض (ت) وجمع الناتج على المعاملات



المقابلة لها في عمود ( س<sub>١</sub> ) بجدول الحل الاصل فيكون  
الناتج متطابقا تماما لمعاملات ( س<sub>١</sub> ) في جدول الحل  
الجديد . أي أن :

عمود س <sub>١</sub> الجديد
$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} ت$
$\frac{4}{3} - \frac{1}{3} ت$
$16 + 8 ت$
$- 10 - 8 ت$

 $=$ 

عمود س <sub>١</sub> الاصل
$\frac{2}{3}$
$\frac{4}{3}$
$16$
$- 10$

 $+$ 

عمود س <sub>٣</sub> الاصل x ت
$\frac{1}{3} ت$
$-\frac{1}{3} ت$
$8$
$- 8 ت$

وهذه العلاقة مهمة جدا ، اذ انها تغنيانا عن محاولة  
اعادة الحل مرة أخرى ، اذ يكفي ان نحل الى الحل الامثل  
الاصلي ثم عن طريق العلاقة السابقة ، يتم التوصل الى  
العمود الجديد للمتغير غير الاساسي المطلوب دون حاجة  
الى الحل ثانية .

ويلاحظ ان قيمة صافي التغير بالجدول الجديد  
للمتغير س<sub>١</sub> ( بعد التعديل ) مازال معامل سالب أي أن  
الحل لم يفقد امثليته بنتيجة هذا التعديل . وان هذا  
التعديل لن يفقد الحل امثليته الا اذا كان صافي التغير  
للمتغير س<sub>١</sub> معامله موجب ، وطالما كان المعامل سالبا  
فيستمر الحل أمثل كما هو . وعلى ذلك لن تنقلب قيمة  
صافي التغير للمتغير غير الاساسي ( س<sub>١</sub> ) الى قيمة موجبة  
ويفقد الحل امثليته الا اذا تحقق الشرط التالي :

$$(- 10 - 8 ت) \leq \text{صفر}$$

ولا يمكن ان يتحقق هذا الشرط الا اذا كانت قيمة  
( ت ) اكبر من ( - 125 ) وهي مستخلصة من  $(\frac{1}{8} = 125)$  .  
فاذا كانت قيمة ( ت ) فرضا ( - 12 ) فان قيمة  
صافي التغير ستصبح موجبة كالاتي :

$$-10 - 8(13-1) = -10 + 10 = 0$$

ومعنى ذلك انه اذا كانت قيمة ( ت ) اكبر من ١٢٥ ( باشارة سالبة ) فان صافى التغير للمتغير غير الاساسي ( س ) سيصبح قيمة موجبة ، ووفقا لمنهج السمبلكس سيفقد الحل امثليته ، لانه في هذه الحالة سيتم اختياره كمتغير داخل وتنقلب صفته ليصبح متغيرا اساسيا ومن ثم يتغير الحل .

اذن بصفة عامة يمكن ان نقول انه اذا كان التطور التكنولوجي للآلة ( أ ) سيؤدى الى اختصار الزمن اللازم لتشغيل السلعة ( س ) على الآلة ( أ ) . فان الحل الاساسي يستمر أمثلا طالما كان هذا التخفيض في الزمن لايزيد عن ١٢٥ ساعة ، وحيث ان السلعة ( س ) كانت في الامثل تتطلب ساعتين من الآلة قبل تطويرها . فان الحل الاساسي يستمر أمثلا حتى يكون معامل س ١ مامقداره ٧٥ ساعة ، أما اذا انخفض اكثر من ذلك فان الحل الأمثل لابد وأن يتغير .

من ناحية اخرى فانه جدير بالذكر بأن نحدد هنا ان زيادة وقت تصنيع السلعة ( س ) على الآلة ( أ ) (مثلا نتيجة قدم الآلة واستهلاكها وبطئها وكثرة اعطالها) لن يغير من الحل الامثل مهما كانت هذه الزيادة ، والسبب في ذلك ان س ١ حاليا غير منتجة ، أي متغير غير اساسي فما بالنسبة لو زادت مانتاجه من ساعات تشغيل انها ستكون اقل ربحية عما هي عليه ومن ثم يظل الحل أمثل في الحدود التالية :

$$(-) \quad 125 \geq T \geq \text{مالانهاية}$$

أي ان الحل الامثل الحالي يظل كما هو دون تعديل في حالة تراوح معامل س ١ (المتغير غير الاساسي) في القيد الاول بين ٧٥ ساعة ، ومالانهاية .

الا اننا نرى ان استخدام النتائج التي يمكن التوصل اليها من النموذج الثنائي ايسر وأسرع وأسهل في تحليل حساسية التغير في المعاملات الفنية . وحيث انه قد سبق لنا حل المشكلة الاولى ، اذن يمكننا ان نستنتج قيم الحل الثنائي من خلال جدول الحل الاخير للمشكلة الاعلى بدلا من اعادة الحل بالثنائية . ويمكن استخراجها من صف صافي التغير . لذلك سنجد ان قيمة  $ص_1 = ٨$  ،  $ص_٢ = ٢$  صفر

وفيما يلي نوضح كيف يمكن استخدام مدخل الثنائية في ايجاد حدود التغير في المعاملات الفنية للمتغيرات غير الاساسية ( س ١ ) .

ووفقا لمنهج الثنائية ، فكل قيد في المشكلة الثنائية يقابل متغير قراري بالمشكلة الاولى ، وحيث اننا نقوم بتحليل المتغير غير الاساسي ( س ١ ) ، فان تعاملنا بالتالى سيكون مع القيد الثنائي الاول الذي يقابل ( س ١ ) وهو :

$$ص_١ + ٢ ص_٢ \leq ٦ \quad ( \text{قيد المتغير القراري س} )$$

فاذا فرضنا ان هناك تخفيضا في المعامل الفني مقداره ( ت ) اذن سنجد ان صورة ذلك القيد ستصبح :

$$(٢ - ت) ص_١ + ٢ ص_٢ \leq ٦ \quad ( \text{قيد المتغير القراري س بعد التعديل} )$$

وبالتعويض بقيم  $ص_١$  ،  $ص_٢$  في معادلة هذا القيد =

$$(٢ - ت) \times ٨ + ٢ \times صفر \leq ٦$$

$$١٦ - ٨ ت \leq ٦$$

ت  $\geq ٢.٥$  را ( مع وضع الاشارة السالبة لتحديد الاتجاه )

وهي نفس النتيجة التي وصلنا اليها عند التعامل مع المشكلة الاولى ، الا انه يلاحظ ان هذه الطريقة اسرع وأقل في عملياتها الحسابية .

بل في رأينا انه يمكن تبسيط العمليات الحسابية السابقة ايضا بمفهوم اسعار ظل الموارد وفكرة التعادل بين عائد المساهمة (٦) وبين قيمة الموارد المستخدمة مقومة بأسعار الظل . فالتعادل يتحقق عندما يكون :

قيمة الموارد المستخدمة في انتاج س<sub>١</sub> = عائد المساهمة

وحيث ان اسعار الظل كانت ص<sub>١</sub> = ٨ ، ص<sub>٢</sub> = ٢ = صفر

• . سيكون التساؤل ماهي قيمة معامل ص<sub>١</sub> التي تجعل هناك تعادل بين جانبي قيد المعادلة السابقة ، ولنرمز بذلك المعامل بالرمز ( ف ) .

$$\bullet \bullet \bullet \quad ٦ = \text{ص} ١ + ٢ \text{ ص} ٢$$

$$٦ = \text{ف} \times ٨ + ٢ \times \text{صفر}$$

$$٦ = ٨ \text{ ف}$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad \text{ف} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} = ٧٥\%$$

أي ان ادنى معامل للمتغير غير الاساسي ( س<sub>١</sub> ) دون أن يتغير الحل الامثل هو ٧٥ ر ساعة ، أما اذا حدث انخفاض أكثر من ذلك سنجد أن عائد المساهمة لهذا المتغير أصبح يفوق قيمة الموارد المستخدمة مقومة بأسعار الظل فيكون من الافضل ان يدخل هذا المتغير الحل كمتغير أساسي ومن ثم يفقد الحل أمثليته .

### (٢) التغير في المعاملات الفنية للمتغيرات الأساسية :

يمكن القول هنا بصفة عامة أن أي تغير زيادة كان أو نقصا في المعاملات الفنية للمتغيرات الأساسية ستؤدي الى تغير امثلية الحل ، فاذا ارتفع المعامل بأي مقدار سيكون هناك حالة عدم تعادل بين قيمة الموارد المستخدمة مقومة بأسعار الظل وبين عائد المساهمة ومن ثم يفقد هذا المتغير ميزته الربحية التي كان عليها ، والعكس سيصبح مربحا أكثر وأكثر مما كان عليه مما يترتب

عليه توجيه المزيد من الطاقة الانتاجية .

فمثلا المتغير القرارى الاساسي في الجدول الاخير  
للمثال السابق هو ( س ٢ ) كان معاملته في قيد الآلة ( أ )  
٣ ساعات ، فماذا يحدث لو حدثت زيادة في هذا المعامل .

القيد الثنائي المقابل للمتغير س ٢ :  $3ص_1 + 2ص_2 \leq 24$   
وبالتعويض بقيم  $ص_1 = ٠$  ،  $ص_2 = صفر$

$$24 \leq 3 \times ٨ + 1 \times صفر$$

$$24 \leq 24$$

أي أن هناك حالة تعادل . ولكن بفرض أن عدد  
الساعات المطلوبة ارتفعت من ٣ الى ٣٥ ساعة . بالتعويض :

$$24 \leq 3 \times ٨ + 1 \times صفر$$

$$24 \leq 2٨$$

وهذا يعنى ان قيمة الموارد المستخدمة مقومة  
بأسعار الظل زادت عن عائد المساهمة ومن ثم أصبحت  
السلعة غير مربحة في انتاجها .

خلاصة القول أن أقصى نقص وأقصى زيادة للمعاملات  
الفنية للمتغيرات الأساسية هي صفر حتى لا يتغير جدول  
الحل الأمثل ويفقد أمثليته .



## أسئلة وتطبيقات :

- (١) ماهو المقصود بأسلوب تحليل الحساسية فى البرامج الخطية ؟ ، وماهى التغيرات التى يمكن أن تحدث فى حالة مشاكل البرامج الخطية والتى يعالجها أسلوب تحليل الحساسية ؟ .
- (٢) ماهى أهمية تحليل حساسية الحل الأمثل فى ترشيده القرارات الادارية ؟ .
- (٣) علل لما يأتى :
  - أ - ان النقص أو الانخفاض فى معامل دالة الهدف لأي متغير قرارى غير اساسى لن يؤدي إلى تغير الحل الأمثل ، وأن الأثر الوحيد الذى سينتج عن هذا الانخفاض انه سيجعل هذا المتغير غير مربح عما كان عليه .
  - ب - الحد الاقصى للزيادة فى معادلة دالة الهدف للمتغير غير الاساسى والتى لا تؤدي الى تغيير أمثلية الحل لابد أن تكون زيادة كافية تماما وبالضبط لجعل قيمة صافي التغير لهـذا المتغير مساوية للصفر .
  - ج - ان أي زيادة فى معامل دالة الهدف للمتغير القرارى غير الاساسى فى حالة مشاكل التخفيض لن تؤثر على امثلية الحل .
  - د - طالما ان قيم صافي التغير للمتغيرات غير الاساسية تظل سالبة أو مساوية للصفر ( فى مشاكل التعظيم ) ، فان الحل الوارد بجـداول السمبلـكس الأخير يظل هو الحل الأمثل .
  - هـ - اذا كانت طاقبة القيد المتاحة ( ثابت القيد ) ، لم تستنفذ بكاملها فى الحل الأمثل ، فان أي زيادة فى طاقة ذلك القيد لن تؤثر

### على أمثلية الحل .

و - اذا لم تستنفذ طاقة القيد بالكامل في الحل الأمثل ، فان عدد الوحدات التي لم تستغل تمثل الحد الاقصى الذى يمكن ان تنخفض به طاقة ذلك القيد دون أن يتأثر الحل الأمثل .

ز - ان العياغة المقابلة أو الثنائية تنظر الى المشكلة من منظور مختلف عن العياغة الأولية أو الاصلية ولكنهما يحققان نفس قيمة دالة الهدف .

ح - ان المشكلة الثنائية تحاول ان تدنى أو تخفض قيمة الموارد المتاحة ، ولكن أيضا بضمن أن تكون قيم الموارد المستخدمة هي على الأقل تعادل مساهمة الوحدة من كل منتج .

ط - ان الحل الممكن المبدئي للمشكلة الأولية غير ممكن بالنسبة للمشكلة الثنائية .

(٤) وضح العلاقة بين حل المشكلة الأولية والمشكلة الثنائية؟

(٥) كيف يمكن استخدام نتائج حل النموذج الثنائي في تحديد القيمة الحدية للموارد الاضافية ؟ .

(٦) فيما يلى العياغة الرياضية الأولية لاحدى مشاكل البرمجة الخطية ، والمطلوب اعداد العياغة الثنائية لها .

دالة الهدف : تعظيم  $s_3 + 2s_2 + 7s_1$   
القيود : بشرط أن :

$$s_1 + s_2 + s_3 \geq 50$$

$$2s_1 + 5s_2 + 2s_3 \geq 200$$

$$s_1 , s_2 , s_3 \leq \text{مفر}$$

(٧) تقوم شركة الامل الصناعية بانتاج حاسبات الكترونية للجيب ، تم تصميمها وبرمجتها لتقوم بأداء مجموعة من الالعاب الرياضية للتسلية ، ويتركز انتاج الشركة حاليا في انتاج لعبة كرة القدم، ولعبة كرة السلة . والجدول التالي يقدم ملخصا للمراحل الانتاجية وهامش ربح الوحدة من كل تلك الالعاب .

البيان	احتياجات الوحدة		الطاقة في الساعة
	كرة القدم	كرة السلة	
طبع اللوحات	٢ دقيقة	٣ دقيقة	٦٠ دقيقة
لصق الاجزاء	٢	١	٥٠
التجميع	١	١	٤٠
هامش الربح	٣ جنيه	$\frac{1}{4}$ جنيه	

#### والمطلوب :

- أ - صياغة المشكلة السابقة من مشاكل البرمجة الخطية .
- ب - ايجاد المزيج الامثل من كل من العاب كرة القدم وكرة السلة لتعظيم الارباح .
- ج - ماهو معدل الربح في الساعة للانتاج الذي تتم تعيينه في ( ب ) .
- د - كم يبلغ التغير الذي يمكن أن يحدث في ربح لعبة كرة السلة ، دون أن يتغير الحل الأمثل الذي تم التوصل اليه في ( ب ) .
- هـ - كم يبلغ التغير الذي يمكن أن يحدث في ربح الوحدة من لعبة كرة القدم دون أن يتغير الحل الأمثل الذي تم التوصل اليه في ( ب ) .
- و - كم يبلغ التغير الذي يمكن ان يحدث في قيد طاقة قسم التجميع دون أن يغير من المزيج الأمثل للمنتجات أو من كميات الحل الأمثل .

ز - ماهو مقدار الربح الاضافي الذي يمكن ان يتولد اذا امكن زيادة ساعات طاقة قسم لصق الاجزاء .

- (٨) قدمت اليك احدى الشركات البيانات التالية :
- يمكن للشركة انتاج ثلاثة أنواع من المنتجات يرمز اليها بالرموز الآتية : (أ) ، (ب) ، (ج) .
  - تحتاج الوحدة من المنتج (أ) الى ٥ كيلوجرامات من المادة الخام (ك) ، و ٤ كيلوجرامات من المادة الخام (ن) ، و ٣ ساعات عمل من مركز الانتاج (١ ص) .
  - تحتاج الوحدة من المنتج (ب) الى ٣ كيلوجرام من الخام (ك) ، و ٢ كيلوجرام من المادة الخام (ن) ، وساعتين عمل في مركز الانتاج (١ ص) .
  - تحتاج الوحدة من المنتج (ج) الى ٧ كيلوجرامات من المادة الخام (ك) ، و ٥ كيلوجرام من المادة الخام (ن) ، و ٤ ساعات عمل في مركز الانتاج (١ ص) .
  - تبلغ الكميات المتاحة من المادة الخام (ك) ٢١٠٠ كيلوجرام ، ومن المادة (ن) ١٦٠٠ كيلو جرام ، كما تبلغ ساعات العمل المتاحة في مركز الانتاج ١٧٠٠ ساعة .
  - تبلغ تكلفة الكيلوجرام من المادة الخام (ك) اربعة جنيهاً ، ومن المادة الخام (ن) ٣ جنيهاً كما يبلغ معدل أجر الساعة في مركز الانتاج ١ ص جنيهاً واحداً .
  - تبلغ التكاليف المتغيرة الأخرى للوحدة من المنتج (أ) خمسة جنيهاً ، والوحدة من المنتج (ب) ستة جنيهاً ، والوحدة من المنتج (ج) ثلاثة جنيهاً .
  - تقدر التكاليف الثابتة للشركة عن الفترة بمبلغ ٢٥٠٠ جنيهاً .
  - ينتظر أن تكون أسعار بيع المنتجات أ ، ب ، ج

على الترتيب (٥ ، ٢٢ ، ٥٢ جنيهاً .

### والمطلوب :

- أ - تحديد تشكيلة المنتجات التي تحقق أقصى ربح مستخدماً طريقة السمبلكس .
- ب - صياغة المشكلة في صورتها الثنائية وليحل جدول الحل الأمثل .
- ج - تحليل حساسية الحل الأمثل للتغيرات في :
  - معاملات دالة الهدف .
  - المعاملات الفنية للقيود .
  - طاقة الموارد .
  - تحديد اسعار الظل .
- د - بفرض اضافة قيد جديد للمشكلة الاصلية على الصورة التالية (٢س<sub>١</sub> + ٣س<sub>٢</sub> + ٣س<sub>٣</sub> ≥ ٥٠٠) فما هو أثر ذلك على أمثلية الحل بالجدول الأخير .

(٩) فيما يلي الصياغة الأولية للمشكلة التي تواجهه إحدى الشركات لاختيار المزيج الانتاجي لها، والمطلوب ايجاد الصياغة الثنائية لها .

دالة الهدف : تخفيض ٣س<sub>١</sub> + ٣س<sub>٢</sub> + ٤س<sub>٣</sub>

القيود : بشرط أن :

$$٣س_١ - ٢س_٢ \leq ٥٠$$

$$٣س_١ + ٢س_٢ + ٣س_٣ \leq ٣٠$$

$$٢س_١ + ٢س_٢ + ٣س_٣ \leq ٢٠$$

$$٣س_١ ، ٢س_٢ ، ٣س_٣ \leq \text{صفر}$$

(١٠) المطلوب اعادة صياغة المشكلة الاولية الآتية لتكون ممثلة للصياغة الثنائية :



دالة الهدف : تخفيض  $s_4 + 2s_3 + 3s_2 + 4s_1$

القيود : بشرط أن :

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \leq 7$$

$$s_1 + 2s_2 + s_3 + 3s_4 \leq 25$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \leq \text{مفر}$$

(١١) بفرض انه قد تم اعداد الصياغة الرياضية لمشكلة

احدى الشركات على الصورة التالية :

دالة الهدف : تخفيض  $s_1 + 2s_2 + 3s_3$

القيود : بشرط أن :

$$s_1 + s_2 + s_3 \leq 100$$

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 \leq 220$$

$$s_3 \leq 400$$

$$s_1, s_2, s_3 \leq \text{مفر}$$

وقد تم صياغة وحل المشكلة الثنائية للمشكلة

الاولية السابقة وكان جدول الحل الأخير للصياغة

الثنائية كالاتي :

معاملات الهدف	المتغيرات الاساسية	الارباح الداخلية	١٠٠	٢٢٠	٤٠	مفر	مفر	مفر
		القيم	ص ١	ص ٢	ص ٣	ص ٤	ص ٥	ص ٦
٢٢٠	ص ٢	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	١	مفر	$\frac{1}{4}$	مفر	مفر
مفر	ص ٥	$\frac{25}{2}$	$\frac{1}{4}$	مفر	مفر	$\frac{1}{4}$	١	مفر
٤٠	ص ٣	٢٥	$\frac{1}{3}$	مفر	١	$\frac{1}{3}$	مفر	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلية	١٠٠	٢٢٠	٤٠	٦٠	مفر	٤٠	٤٠
١٨٠٠	صافي التغير	مفر	مفر	مفر	٦٠ -	مفر	٤٠ -	٤٠ -

والمطلوب :

- أ - صياغة المشكلة الثنائية رياضياً .  
 ب - ماهو الحل الأمثل للمشكلة الأولية .  
 ج - وضع حدود التغيرات التي يمكن ان تحدث على عناصر نموذج هذه المشكلة دون أن تؤثر على امثلية الحل بالجدول الأخير .

(١٢) بفرض ان الصياغة التالية تمثل مشكلة احدى الشركات:

دالة الهدف : تعظيم  $٣س١ + ٧س٢ + ٥س٣$

القيود : بشرط أن :

$$١٠٠ \geq ٣س١ + ٢س٢ + ٢س٣$$

$$٢٠٠ \geq ٣س١ + ٢س٢ + ٣س٣$$

$$٣س١ \leq ٢س٢ \leq ٣س٣$$

وقد تم حل المشكلة السابقة ، وفيما يلي جدول الحل الأمثل لها :

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٣	٧	٥	مفر	مفر
		القيم	١س	٢س	٣س	٤س	٥س
٥	٣س	٥٠	$\frac{١}{٢}$	مفر	١	$\frac{٣}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$
٧	٢س	٥٠	$\frac{١}{٢}$	١	مفر	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$
دالة الهدف	التكاليف الداخلة		٦	٧	٥	٤	١
٦٠٠	صافي التغير		٣-	مفر	مفر	٤-	١-

والمطلوب :

- أ - ماهو المزيغ الانتاجي الامثل لتلك المشكلة ؟  
 ب - صياغة المشكلة الثنائية ؟

- ح - ماهو الحل الامثل للمشكلة الشنائية ؟  
 د - ماهو مدى التغير فى معاملات الهدف للمتغيرات  
 القرارية ؟  
 ه - ماهي حدود التغير في طاقةالموارد والتي يستمر  
 معها وضع المتغيرات الاساسية كما هو دون  
 تغير ؟  
 و - ماهي القيمة المثلى لدالة الهدف اذا كان ثابت  
 القيد الاول (الطرف الايسر من القيد) ١٢٠ بدلا  
 من ١٠٠ ؟

(١٣) بفرض ان المشكلة التى تواجه شركة انتاج لعسب

الاطفال تم صياغتها كالاتي :

دالة الهدف : تعظيم  $s_1 + 2s_2$

القيود : بشرط أن :

$$60 \geq s_1 + 2s_2 \quad (\text{طاقة الطبع})$$

$$50 \geq s_1 + s_2 \quad (\text{طاقة اللصق})$$

$$40 \geq s_1 + s_2 \quad (\text{طاقة التجميع})$$

$$s_1, s_2 \leq \text{صفر}$$

ولقد تم اعادة صياغة تلك المشكلة فى صورة الصياغة

الشنائية فأصبحت كالاتي :

دالة الهدف : تخفيض  $40s_1 + 50s_2 + 60s_3$

القيود : بشرط أن :

$$3 \leq s_1 + 2s_2 + s_3$$

$$5 \leq s_1 + s_2 + s_3$$

$$s_1, s_2, s_3 \leq \text{صفر}$$

وبعد اضافة المتغيرات الراكدة الى الصياغة الاولى

( الاصلية ) وحل المشكلة الاصلية كان جدول الحل

الأمثل كالاتي :

معاملات الهدف	التغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	٣	٢	مفر	مفر	مفر
		القيم	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥
$\frac{1}{2}$	س ٢	٥	مفر	١	$-\frac{1}{4}$	مفر	مفر
٣	س ١	$\frac{45}{2}$	١	مفر	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	مفر
مفر	س ٥	$\frac{25}{2}$	مفر	مفر	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	١
دالة الهدف	التكاليف الداخلة	٢	$\frac{5}{2}$	١	$\frac{3}{2}$	مفر	مفر
٨٠	صافي التغير	مفر	مفر	١	$-\frac{3}{2}$	مفر	مفر

والمطلوب :

تحويل جدول الحل الامثل للمشكلة الاولى الى جدول  
الحل الامثل للمشكلة الشناعية .

## الفصل الرابع

### برمجة الأهداف

- \* مقدمة .
- \* حالة عدم وجود حل ممكن .
- \* تعدد الأهداف ووضع الأولويات .
- \* صياغة وتمثيل وحل نموذج برمجة الأهداف بيانيا .
- \* صياغة وحل نموذج برمجة الأهداف بطريقة
- السمبلكس .
- \* تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الأهداف .





## الفصل الرابع

### برمجة الأهداف

## Goal programming

مقدمة :

تناولنا في الفصول الثلاثة المتقدمة موضوع البرمجة الخطية ، وقد أوضحنا فيها كيفية التعامل مع تلك المشاكل التي تتصف بأنها ذات هدف واحد ، أو ما يطلق عليه المشاكل وحيدة الهدف ، والتي كان لها على الأقل حل واحد ممكن . ولذلك وجدنا أن الصياغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية كان يتضمن هدفاً واحداً في دالة الهدف ( تخفيض أو تعظيم ) في ضوء التقيد والالتزام بعدد من القيود . ونموذج البرمجة الخطية على الصورة التي تناولناها في معالجة المشاكل وحيدة الهدف يتفق مع النظرية الاقتصادية التي ترى أن أي منشأة تسعى لتحقيق هدف وحيد ومحدد تجند كافة إمكاناتها لتحقيقه وبلوغه ، ولذلك نجد أن نموذج البرمجة الخطية يعتمد على إيجاد الحل الأمثل لمشكلة تم صياغتها على صورة نموذج رياضي يتضمن هدفاً واحداً يعبر عنه بدالة هدف النموذج مع الخضوع لعدد من القيود المتجانسة أو غير المتعارضة .

وظهرت الكثير من الكتابات في السنوات الأخيرة مؤكدة أن هدف تحقيق وتعظيم الربح لا يعتبر بمشابهة الهدف الوحيد الذي تجند له المنشأة كافة إمكاناتها للوصول إليه ، ولكن المنشأة تسعى إلى تحقيق أهداف متعددة Multiple objectives ، فمتطلبات الحياة العملية والظروف والضغوط التي تفرضها وكذلك واقع المنشأة وظروفها الداخلية ، كل ذلك جعل المنشأة تسعى

لتحقيق مجموعة من الاهداف الاقتصادية وغير اقتصادية ،  
وغالبا مايوجد تعارض وتناقض واضح في تلك الاهداف ،  
وسواء كان ظهور تلك الاهداف والأخذ بها والسعى الى  
تحقيقها ، نتيجة فغوط وظروف من خارج المنشأة ، أو نتيجة  
رغبة الادارة ذاتها ، فان ذلك لا يغير من حقيقة أن  
الاهداف غير الاقتصادية قائمة وموجودة وتوجد تعارضا  
وتناقضا مع الاهداف الأخرى .

ونتيجة للاهتمام المتزايد بدراسة مشاكل تعسدد  
الاهداف ، وماقد ينتج عنه من تعارض وتناقض بين تلك  
الاهداف ، ونتيجة لقمور النماذج التقليدية للبرمجة  
الخطية في معالجة هذا النوع من المشاكل ، لذلك فقد  
أشرنا ان نخصص هذا الفصل لتناول واستعراض الطريقة  
التي يمكن أن نعالج بها المشاكل متعددة الاهداف .

وهذه الطريقة والتي تستخدم في معالجة هذه النوعية  
من المشاكل يطلق عليها اصطلاح نموذج برمجة الاهداف  
Goal Programming Model ، وقد اطلق عليها هذا  
الاسم لأنها تحاول ان تفي أو تحقق مجموعة من الاهداف  
المتعددة أو المستويات المحددة للاهداف ، ولذلك  
تتطلب تلك الطريقة أن توضع تلك الاهداف في مسـورة  
Priority order ثم محاولة تخفيض مقدار عدم  
تحقيق أي هدف Underachievement مبتدئين بهدف  
الاولوية الأعلى Higher-Priority Goal ، وحيث أنه  
لايوجد حل يمكننا من تحقيق كافة الاهداف في آن واحد  
( لوجود تعارض وتناقض بينها ) ، فان الحل الأمثل يكون  
عندما يتم تخفيض مقدار عدم التحقق لأي هدف على الا يكون  
ذلك على حساب هدف الاولوية الأعلى .

وتاريخيا فانه يرجع الفضل الى كل من كوبـر  
Cooper وفرجيسون Ferguson في ظهور فكرة  
برمجة الاهداف ، وذلك حينما عهدت اليهم شركة جنرال

اليكتريك في عام ١٩٥٢ باعداد جدول للأجور للعاملين بأحد الاقسام الانتاجية بالشركة ، على أن يراعي في هذه الاجور تحقيق عدد من الاهداف منها أن تتناسب مع مستوى المسئولية الملقاه على شاغل الوظيفة ، وقيمة الخدمة المتوقعة ، ومستوى المعيشة ، والتحفيز ، ونمو المنشأة ، ازدياد الخبرة وغيرها من الاهداف . ولهذا فقد استطاعا ان يتوصلا الى نموذج رياضي يعمل على تخفيض الانحرافات عن مجموعة الأهداف المحددة الى أدنى حد ممكن وتلك كانت البداية لظهور كتاب Management Goals and Accounting for Control للمؤلف ايجيري Ijiri وفيه يقدم نقاشا منطقيا ورياضيا يستعرض فيه فكرة اسلوب برمجة الأهداف . ثم توالى الكتابات ففي هذا الموضوع منذ هذا التاريخ وظهرت العديد من التطبيقات العملية لهذا الاسلوب وشملت معظم الميادين والمجالات الادارية من تخطيط انتاج ، وتخطيط قوى عاملة ، وتخطيط مالى ، وتخصيص الموارد ، ومع ذلك كله فاننا يمكن القول بأن هذا الاسلوب لم يحدث حتى الآن تغطية شاملة لجميع جوانبه ، واننا كل يوم نجد هناك تطورات تضاف اليه ودراسات تركز على اكتشاف نواحي الغموض به . ومن ثم فاننا نرى انه مجال خصص للدراسة والبحث ويتعين على الدارسين والباحثين ان يتناولوا هذا الموضوع فى دراساتهم وبحوثهم فما زال أسلوباً جديداً وبه نواحي كثيرة وزوايا متعددة واستخدمات متباينة تتطلب الفحص والتمحيص حتى يصل الى المستوى الذى يمكن متخذ القرار في الاعتماد عليه فى عالم اليوم الملى بالضغوط والمصالح والاهداف المتعارضة سواء كان ذلك على المستوى الفردى أو على مستوى المنشآت او حتى على المستوى القومي .

وقبل الدخول فى تفصيلات اعداد الصياغة الرياضية لنموذج برمجة الاهداف وخطوات الوصول الى الحل الأمثل للمشكلة ، يهمنى أولا توضيح الأسباب التي يترتب عليها

ظهور حالة عدم وجود حل ممكن للمشكلة المراد ايجاد حل أمثل لها . حيث أن هذا التوضيح يعتبر مقدمة ضرورية لادراك الوضع المترتب على وجود تعدد في الاهداف التي تحمل نوعاً من التعارض أو التناقض فيما بينها، وكيف أنه من الضروري البحث عن أسلوب أو طريقة تلح للتعامل مع المشاكل من هذا النوع .

### حالة عدم وجود حل ممكن No Feasible Solution

ان عدم وجود حل ممكن لمشكلة البرمجة الخطية قد يكون بسبب وجود خطأ في صياغة المشكلة (استخدام اشارة أقل من أو يساوى  $\geq$  في الوقت الذي كان يتعين فيه استخدام اشارة اكبر من أو يساوى  $\leq$ ) ، أو بسبب وجود تعارض وتناقض في القيود المفروضة أو الأهداف المطلوبة ، أي أن الصياغة سليمة وصحيحة ولكن لا يوجد حل يستوفي كافة القيود والأهداف ، ويهمننا في هذا المجال توضيح السبب الثاني حيث انه هو المتعلق مباشرة بموضوع هذا الفصل ، اذ يهمننا توضيح كيف أن وجود تعارض وتناقض في القيود أو في الاهداف يترتب عليه عدم الامكانية Infeasibility أي عدم وجود حل ممكن .

### مثال :

يحاول مدير الانتاج باحدى الشركات الانتاجية وضع جدولة لانتاج الاسبوع القادم من نوعين من منتجات الشركة النوع الاول يمثل جهاز فيديو حجم كبير وتعطى الوحدة منه هامش ربح مقداره مائة جنيه ، والنوع الثاني يمثل جهاز فيديو من الحجم الصغير وتعطى الوحدة منه هامش ربح مقداره ثمانون جنيهاً ، ويهدف مدير الانتاج الى تحديد المزيج الانتاجي الأمثل للأسبوع القادم والذي يحقق أعلى ربحية ممكنة . علماً بأنه قد تبين من المعلومات المتاحة بقسم التسويق أن هناك ارتباطات مع



بعض العملاء يتعين الالتزام بها وتتمثل في تسليمهم عدد ١٠٠ جهاز حجم كبير ، وعدد ٢٠٠ جهاز حجم صغير فـ في نهاية الاسبوع القادم . كذلك فان مدير الانتاج على بينة تامة من أن قوة العمل المتاحة لديه لاتزيد عدد ساعات التشغيل الاسبوعي لها عن ٦٠٠ ساعة عمل ، وتحتاج النوعية الأولى من الاجهزة الى ثلاثة ساعات عمل لتجميعها، وتحتاج النوعية الثانية الى ساعتين عمل فقط .

والمطلوب في ضوء المعلومات السابقة ايـجاد المزيج الانتاجي الأمثل للاسبوع القادم والذي يعمل على تعظيم الربح .

### الحل :

يمكن صياغة تلك المشكلة كمشكلة من مشاكل البرمجة الخطية كالآتي :

بفرض ان :  $s_1$  = عدد أجهزة الفيديو من الحجم الكبير والتي سيتم انتاجها .

$s_2$  = عدد أجهزة الفيديو من الحجم الصغير والتي سيتم انتاجها .

اذن ستكون الصياغة الرياضية على الصورة التالية :

دالة الهدف : تعظيم  $100s_1 + 80s_2$

### القيود :

$s_1 \leq 100$  ( قيد طلبية طلبات العملاء من الفيديو الكبير ) .

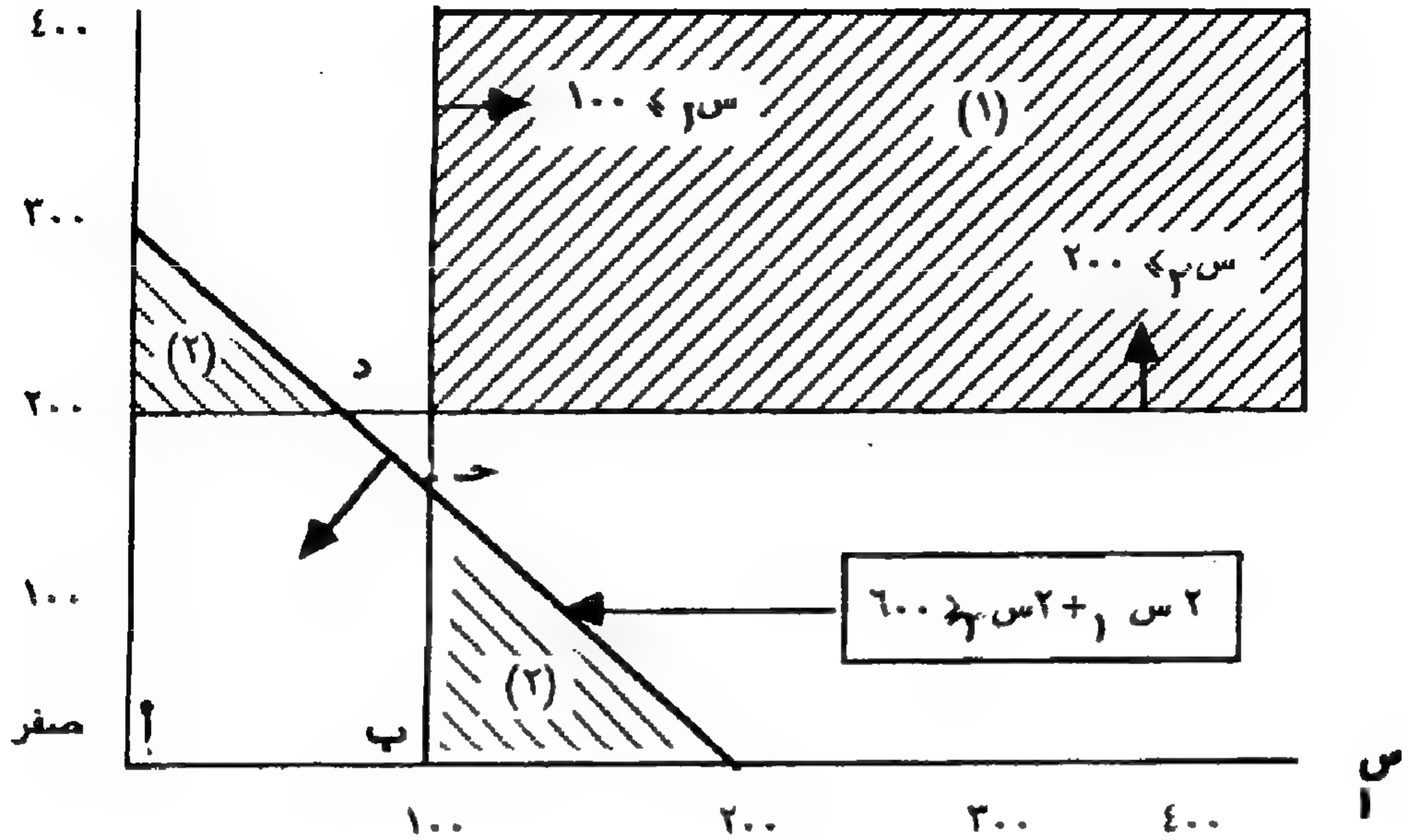
$s_2 \leq 200$  ( قيد طلبية طلبات العملاء من الفيديو الصغير )

$s_1 + 2s_2 \geq 600$  ( قيد القوة العاملة )

$s_1, s_2 \leq \text{مفر}$  ( شرط عدم السلبية )

وبعد السير في خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية ، سنصل الى الشكل التالي والذي يمثل التمثيل البياني لهذه المشكلة .

س ٢



من هذا الشكل يتضح عدم وجود منطقة للحل ———  
 الممكنة تراعي كافة القيود المفروضة على المشكلة ، أي  
 أنه لا يوجد حل ممكن لهذه المشكلة ، إذ يتبين من ملاحظة  
 اتجاه الاسهم المرسومة والتي تحدد اتجاه القيود ———  
 الثلاثة عدم اتفاقها ووجود تعارض بينها .

ومن خلال النظرة الفاحصة للرسم البياني السابق  
 وبصفة خاصة للمناطق المظلمة فإنه يتبين أنه على الرغم  
 من أن كل قيدين معا من قيود المشكلة يشكلان ———  
 بعضهما منطقة ممكنة معينة ، إلا أنه عند إضافة خط  
 القيد الثالث فإنه يطرد كل النقاط الممكنة والتي  
 تستوفي القيدين الآخرين ، فالمناطق المظلمة في الشكل  
 السابق تمثل ثلاثة مواقع أو مناطق ممكنة كل منطقة  
 منها تكونت من خلال التمثيل البياني لزوج من القيود ،  
 فمثلا المنطقة الممكنة رقم (١) تشكلت من خلال التمثيل  
 البياني لقيود العدد الواجب انتاجه من أجهزة الفيديو  
 كبيرة الحجم (  $س_١ \leq ١٠٠$  ) ، وقيود العدد الواجب  
 انتاجه من أجهزة الفيديو صغيرة الحجم (  $س_٢ \leq ٢٠٠$  ) ،

الا انه عند اضافة الخط الممثل لقيد القوة العاملة فإنه وفقا لاتجاه هذا الخط سيطرد كل النقاط الممكنة والموجودة بالمنطقة (١) ، لأن هذه المنطقة بكاملها أصبحت في الجانب غير الممكن لخط القيد الثالث ، ونفس النتيجة تحدث مع باقى المناطق الممكنة التى تكونت كل منها من زوج من القيود الواردة بالصياغة .

وبطبيعة الحال فإنه سيتضح جليا وبمجرد النظر الى الشكل السابق ، ان المشكلة بالغة التعقيد، حيث لايمكن أنتاج الكمية التى تفى بالتعاقدات المبرمة مع العملاء من كل من النموذجين طالما كان قيد طاقة القوة العاملة يمثل قييدا صارما على الصورة التى ورد بها بالصياغة الرياضية للمشكلة ، ولعلنا نتساءل الآن كيف يمكن حل هذه المشكلة . ولعله من نافلة القول أن نذكر هنا على عجالة على ان نترك التفصيلات لموضع آخر أنه يتعين لايجاد حل لتلك المشكلة فإنه ينبغي أن يكون واحدا من تلك القيود أقل صرامة واحكاما وتقييدا الى الحد الذى لايطرد باقى النقاط الممكنة أو المنطقة الممكنة التى تشكلت بباقى القيود .

ومن ناحية اخرى وبغرض أننا حاولنا حل تلك المشكلة باستخدام خطوات منهج طريقة السمبلكس ، فإننا نرغب فى تحديد سمات أو خصائص جدول الحل والذى منه نقف على حقيقة أن حل المشكلة غير ممكن .

وبغرض حل المشكلة السابقة باستخدام طريقة السمبلكس وبعد السير فى خطوات الحل من حيث تعديس الصياغة الرياضية الأصلية للمشكلة باضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية واعداد جدول الحل المبدئي واختبار مثاليته وتحسين الحل فى جداول متتالية ، فان جدول الحل الأخير الذى سنعمل اليه سيظهر على الصورة التالية :

معاملات الهدف	المتغيرات الأساسية	الأرباح الداخلة	١٠٠	٨٠	صفر	صفر	صفر	١٠٠-	١٠٠-
		القيم	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠
٨٠	٢٠٠	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١-	صفر	١
١٠٠	٢٠٠	١	صفر	صفر	١	صفر	٢	صفر	٢
١٠٠ -	١٠٠	صفر	صفر	صفر	١	١	٢	١	٢
	دالة الهدف	التكاليف الداخلة	١٠٠	٨٠	٢٠٠	١٠٠	١٦٠	١٠٠-	١٦٠
	٤٩٠٠٠	صافي التغير	صفر	صفر	٢٠٠	١٠٠	١٦٠	صفر	١٤٠

ويتضح من هذا الجدول ان كل معاملات صف صافي التغير اما صفرية أو سالبة ، وهذا يعنى أن هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل، الا أننا سنجد أن المتغير الاصطناعي ( س ٦ ) ظهر في الحل الأمثل كمتغير أساسى ، ومن المعروف أننا نضيف المتغيرات الاصطناعية لنجعل من النقطة الركنية نقطة ممكنة ونعاملها على هذا الأساس ، ثم ننقل منها الى نقطة أفضل لتحسين دالة الهدف ، ونستمر فى ذلك حتى نصل الى النقطة الطرفية المثلى ، اذن كان ينبغى طالما ان هذا الجدول يمثل الحل الأمثل ان يختفى المتغير الاصطناعي ( س ٦ ) من جدول الحل الأمثل .

وحيث ان وجود المتغير الاصطناعي س ٦ كمتغير اساسي في جدول الحل الأمثل يعتبر مخالفة صريحة وواضحة لوضع المتغيرات الاصطناعية وفق منهج طريقة السمبلكس اذن يمكن القول في حالة هذه المشكلة، انه لا توجد نقطة طرفية يمكن اعتبارها ممكنة مع القيود الثلاثة مجتمعة ، علاوة على ذلك فانه يمكن القول بصفة عامة أنه : إذا



تضمن جدول الحل الأمثل واحد أو أكثر من المتغيرات الاصطناعية في صورة متغير أساسي فان المشكلة على الصورة التي صياغتها عليها ليس لها حل أمثل .

تبين مما سبق عدم امكانية وجود حل أمثل لوجود تعارض أو تناقض في القيود أو في الأهداف ، وهذا أمر يتطلب إعادة صياغة المشكلة بحيث نحاول أن نجد أو نخفض من حدة أحكام وتغيير واحد أو أكثر من القيود، أو اللجوء الى طريقة أخرى مثل برمجة الأهداف لاستخدامها في وضع أولويات أو معاملات تفاضلية للقيود والأهداف ، وهذا المفهوم سيكون محور تركيزنا في الأجزاء التالية .

### تعدد الأهداف - وضع الأولويات

Multiple Objectives - Establishing Priorities  
تعتبر برمجة الأهداف والتي سوف نستخدمها في حل عدم الامكانية الواضحة لمشكلة الشركة التي تقوم بانتاج اجهزة الفيديو، من الاساليب ذات المجالات الفسيحة والرحبة للتطبيق، اذ لها فاعلية ممتازة للتعامل مع المشاكل ذات الأهداف المتعارضة أو المتناقضة ، وذلك عندما يكون من الممكن وضع أولويات لتلك الأهداف . أما اذا اعتبرت الأهداف جميعها تمثل ذات الأهمية تصبح المشكلة مجمدة ولا يوجد لها حل .

فعلى سبيل المثال ، اذا كان متخذ القرار يرغب في تحقيق هدف الربح ، وكذلك تحقيق هدف الوفاء بطلبات العملاء من المنتجات ، وأيضا تحقيق هدف استخدام الطاقة ، فان استخدام برمجة الأهداف تتطلب أولا ان يتم تحديد هذه الأهداف تمثل أولوية أولى، وأيها يمثل أولوية ثانية ... وهكذا ، فاذا كان هدف الربح يمثل أولوية أولى فان متخذ القرار سيعمل على تحقيق هدف الربح ، قبل الأهداف الاخرى ، وأيضا لابد من تحديد



الاولوية الثانية بعد هدف الربح حتى يمكن العمل على تحقيقها قبل الهدف الذى يمثل الاولوية الثالثة. ويلاحظ ان هذه الاهداف او الاغراض ليست مقاسة بنفس وحدات القياس ، ولكن معبر عنها بوحدات مختلفة تماما، فمثلا هدف الربح مقاس بالجنيهات ، أي بالوحدات النقدية ، وهدف الوفاء بطلبات العملاء من المنتجاب مقاس بالوحدات اي وحدات المخرجات ، وهدف استخدام الطاقة مقاس بمدلول ساعات العمل .

فاذا وجد تعدد في الاهداف فانه يلزم أن يكون متخذ القرار قادرا على وضع أولويات تلك الأهداف، وذلك حتى يكون فى استطاعته استخدام طريقة برمجة الاهداف ، حيث أن وجود أولويات للأهداف المتعددة يعتبر من الخصائص الأساسية التى تميز نموذج برمجة الاهداف ، والاسلوب الذى تسير فيه برمجة الأهداف هو تجاهل الاهداف ذات الاولوية الدنيا ، حتى يتم تحقيق أهداف الاولوية العليا ، وبتحقيق هدف الاولوية العليا تحاول برمجة الاهداف مرة اخرى استيفاء أو تحقيق كل أهداف الاولوية الدنيا على الترتيب .

ومعنى ماتقدم ان نموذج برمجة الاهداف يحقق الأهداف بترتيب أولويتها لأنه فى معظم المشاكل ذات الاهداف المتعددة يستحيل استيفاء وتحقيق كافة الاهداف فى وقت واحد ، هذا مع ملاحظة ان درجة استيفاء أو تحقيق هدف معين تقاس بمقدار الانحراف عن ذلك الهدف ، سواء كان ذلك الانحراف بالزيادة أو النقصان ، وسواء كان مغزاه فى مصلحة المنشأة أو ضد مصلحتها، فالعبارة هنا هو فى مقدار الهدف الموضوع ، ومن ثم فان الانحراف عنه يمكن ان يأخذ أحد الاتجاهين، فمثلا يمكن أن يتم تحقيق الهدف ولكن بأقل من المستوى الموضوع (وهو يمثل انحراف عن الهدف) ، أو أن يتحقق الهدف بأكثر من المستوى الموضوع أي هناك مبالغة أو تجاوز فى تحقيقه

( وهو أيضا يمثل انحراف عن الهدف ) • وبرمجة الأهداف تعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوبة ، والتي تقابل في معظم الاحوال مستوى تحقيق الهدف بأقل من المستوى الموضوع •

ولتوضيح ماتقدم نفترض أن احدى الشركات وضعت لنفسها هدفا ذات اولوية اولى وهو تحقيق ربح مقداره ٢٠٠٠٠ جنيه ، في هذه الحالة فاننا أمام ثلاثة احتمالات :

١- امكانية تحقيق هذا الهدف بالضبط لاكثر ولا اقل، وهذا يعنى أنه لا توجد انحرافات عن الهدف الموضوع بالزيادة أو النقصان ، ( مرغوبة أو غير مرغوبة ) •

٢- قد تكون الارباح التي يمكن تحقيقها أكبر من المستوى الموضوع ( ٢٠٠٠٠ جنيه ) ، وفي هذه الحالة فاننا لانكون قلقين ازاءها لأنها تزيد عن مستوى الهدف أي انها انحرافات مرغوبة •

٣- قد تكون الارباح التي يمكن تحقيقها أقل من المستوى الموضوع لها ( ٢٠٠٠٠ جنيه ) ، وهذه تمثل انحرافات غير مرغوب فيها لأنها تعنى تحقيق أرباح أقل من الكفاية ، ومن ثم سنهتم بمحاولة تخفيض تلك الانحرافات غير المرغوبة وهي الأقل من الكفاية •

وخلاصة ماتقدم أن برمجة الاهداف تحاول تحقيق واستيفاء كل هدف ، الا انه في حالة عدم امكانية استيفاء كل الاهداف لوجود تعارض وتناقض فيما بينها ، فانها تعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوبة ، مبتدئة بالهدف الذى يمثل الاولوية الاعلى ، وعندما يتم استيفاء وتحقيق هدف الاولوية الاعلى (أي تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه) ، تبدأ في الاتجاه الى الاهداف ذات الاولوية الاقل وبالترتيب ، وتنتهي

الخطوات عندما تعمل الى النقطة التي لايمكن معها  
اجراء أي تحسين في بعض أهداف المستويات الدنيا  
على حساب زيادة الانحرافات غير المرغوبة فيها لبعض  
أهداف الأولويات الأعلى ، وهنا نكون قد وصلنا الى الحل  
الأمثل .

ولعله يكون من المناسب والمفيد أن نتناول  
 بمثال عملي طريقة وأسلوب برمجة الأهداف ، وذلك حتى  
 يمكن الوقوف على الخطوات التي تناولناها فيما تقدم .  
 ولهذا الغرض سنستمر في حل مشكلة المزيج الانتاجي  
 لشركة انتاج اجهزة الفيديو بطريقة برمجة الأهداف ،  
 والذي اتضح مما سبق انه لا يوجد لها حل ممكن وفقنا  
 للصياغة الأصلية التي كانت عليها . الأمر الذي جعلنا  
 نلجأ الى أسلوب آخر بحثا عن مدخل يمكننا من الوصول  
 الى حل يمثل أفضل ما يمكن التوصل اليه في ظل التعارض  
 والتنافس في الأهداف الموجودة بحالة هذه الشركة .

فبفرض ان متخذ القرار في شركة انتاج اجهزة  
 الفيديو ، قرر اعادة صياغة المشكلة الأصلية بطريقة  
 يمكن معها تطبيق طريقة برمجة الأهداف ، فحدد أن  
 تكون الارباح على الاقل ٢٠٠٠٠ جنيه ، وأنه يجب الوفاء  
 بطلبات العملاء من اجهزة الفيديو بحجمها الكبير  
 والصغير ، وأن يكون الانتاج في حدود طاقة ساعات  
 العمل المتاحة . هذا مع العلم بأن متخذ القرار  
 قد وضع أولويات لتلك الأهداف كالآتي :

- هدف الأولوية الأولى (ه<sub>١</sub>) : الارباح تعادل ٢٠٠٠٠ جنيه على الأقل  
 ، ، ، الثانية (ه<sub>٢</sub>) : انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير  
 على الأقل .  
 ، ، ، الثالثة (ه<sub>٣</sub>) : انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير  
 على الأقل .  
 ، ، ، الرابعة (ه<sub>٤</sub>) : تجنب الوقت الاضافي فالوقت المتاح  
 ٦٠٠ ساعة عمل .

وحيث أن أسلوب برمجة الأهداف يتجاهل أهداف الأولوية الدنيا حتى يتم استيفاء أهداف الأولوية العليا ( تخفيض انحرافات غير المرغوبة ) ، لذلك فإن الحدود الدنيا للانتاج المطلوب من كل من أجهزة الفيديو كبيرة الحجم وصغيرة الحجم ، وكذلك هدف تجنب الوقت الإضافي سيتم إهمالها جميعا الى ان نصل الى الحل الذي يحقق هدف الربح باعتباره هدف الأولوية الأولى ، وعندما نصل الى مجموعة أجهزة الفيديو بنوعيتها التي تحقق هدف الربح ، نبدأ في الأخذ في الاعتبار بعد ذلك هدف الأولوية الثانية ( هـ ) وهو انتاج ١٠٠ وحدة من أجهزة الفيديو كبيرة الحجم على الأقل ، مع ملاحظة أن أي حل جديد نصل اليه محققا هدف الأولوية الثانية لابد أن يكون في ذات الوقت محققا هدف الربح ذات الأولوية الأولى . وإذا لم يكن هناك حل يمكن ان يحقق كلا الهدفين في آن واحد ، فان منهج برمجة الأهداف سوف يعل الى الحل الذي يحقق هدف الأولوية الأولى (الربح) وفي نفس الوقت هدف الأولوية الثانية بأقل انحراف غير مرغوب فيه ، ثم يستمر العمل للأخذ في الاعتبار الأهداف ذات الأولوية الدنيا ( هـ ، هـ ) . ونصل الى الحل الذي يجعل الانحرافات غير المرغوب فيها لأهداف الأولوية الدنيا عند حدها الأدنى والتي يمكن معها تحقيق الأهداف ذات الأولوية الأعلى .

من المناقشة السابقة نكون قد وصلنا الى الصياغة الشفهية أو اللفظية لمثال الشركة المنتجة لأجهزة الفيديو في صورة نموذج برمجة خطية . ومن ثم نكون على مشارف مرحلة حل المشكلة . علما بأنه يمكن ايجاد حل نموذج البرمجة الخطية بيانيا ، وأيضا باستخدام منهج السمبلكس ، وهذا ما سنتناوله في الجزء الثاني :

حل نموذج برمجة الأهداف بيانيا :

يمكن حل مشاكل برمجة الأهداف (ذات متغيرين



قراريين ) بيانيا ، وذلك بتتابع اضافة القيود التي تمثل كل هدف وفقا لأولويته الصحيحة ، والنقاط الطرفية التي تظل باقية بعد اضافة خط كل قيد تمثل الحلول التي تقابل كل الاهداف التي تم تمثيلها ، ولتوضيح هذه المعاني فانه من المناسب ان نقوم بتمثيل كل قيد وفقا لأولويته على الرسم البياني ليتابع معنا القارئ مانقصه وصولا للحل الأمثل .

أولا : التمثيل البياني لهدف الاولوية الاولى ( الربح ) :

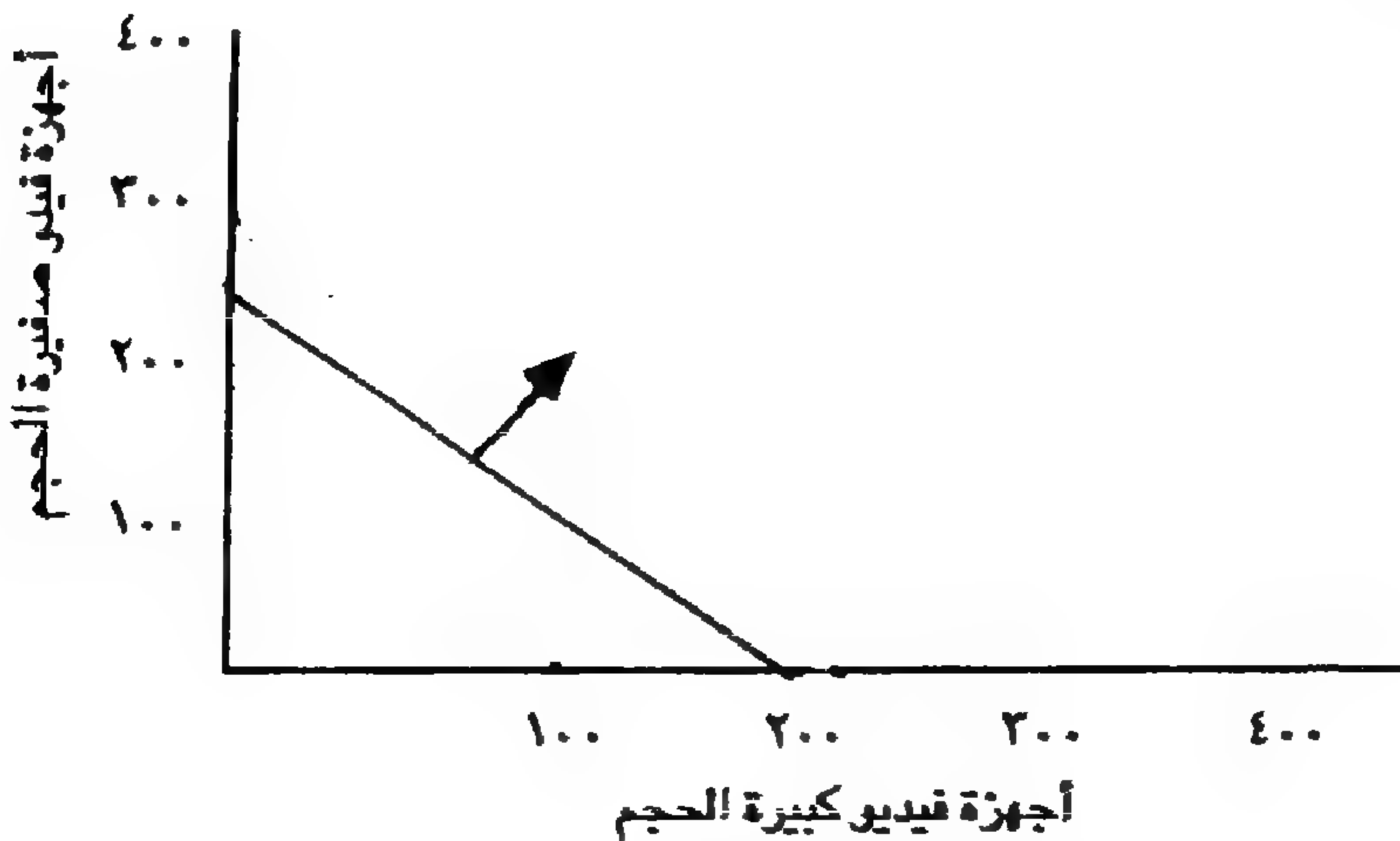
يمثل هدف الاولوية الأولى تحقيق ربحا مقداره على الأقل ٢٠٠٠٠ جنيه ، أي أن القيد الممثل لهذا الهدف هو :

$$١٠٠س١ + ٨٠س٢ \leq ٢٠٠٠٠ \quad (١هـ)$$

وبتحويله الى معادلة بالاهمال السؤقت للإشارة ( < ) كما هو معتاد في طريقة الرسم البياني ، تصبح معادلة هذا القيد :

$$١٠٠س١ + ٨٠س٢ = ٢٠٠٠٠$$

وبتحديد احداثيات هذه المعادلة نجدها : ( صفر ، ٢٥٠ ) ، ( ٢٠٠ ، صفر ) والشكل التالي يمثل التمثيل البياني لهدف الاولوية الاولى (الربح) كما ان السهم المرسوم يمثل اتجاه الهدف أو الانحراف المرغوب فيه ، والرقم (١) يشير الى ترتيب الاولوية .





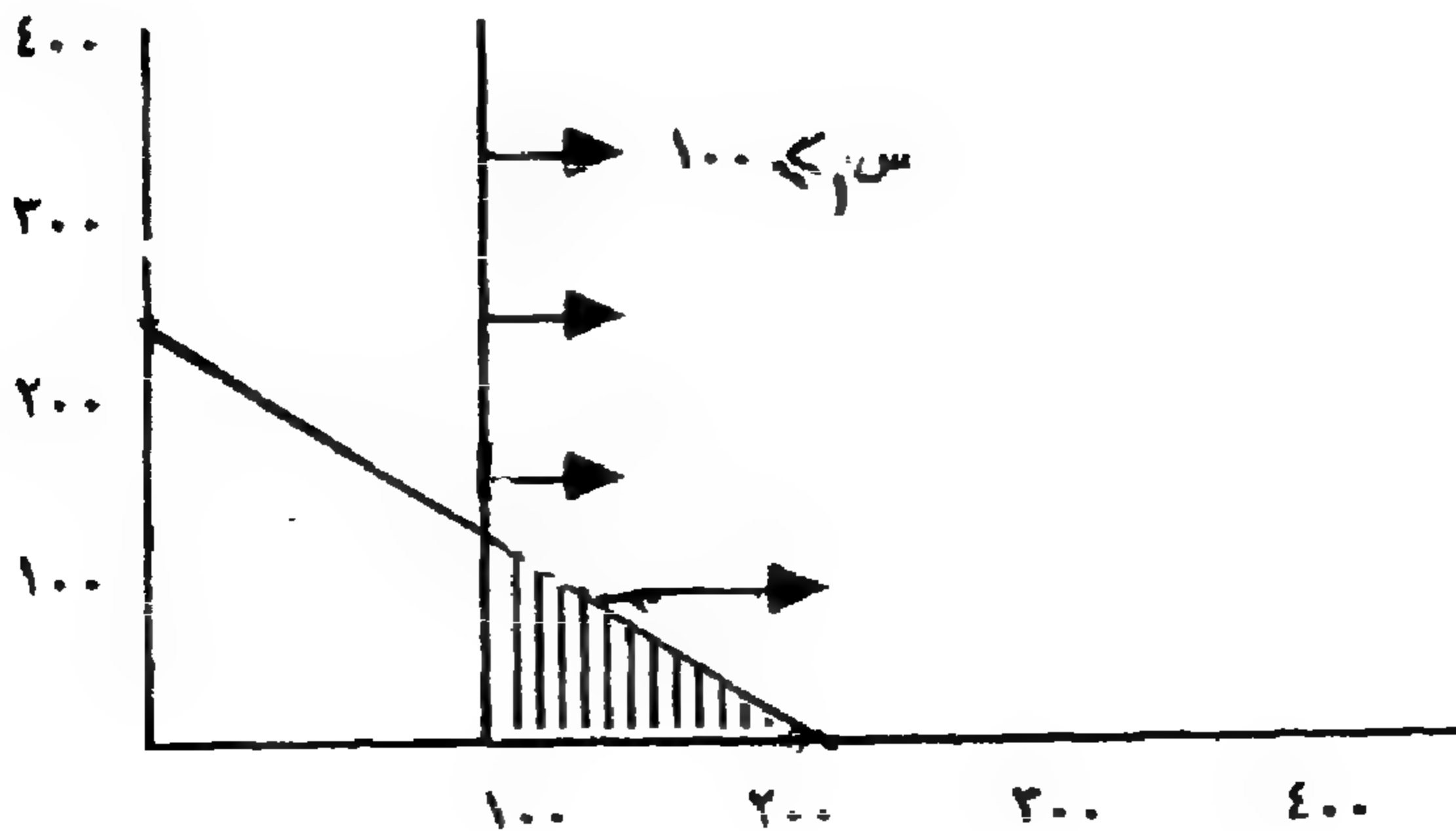
ومن هذا الشكل يتضح ان منطقة الحلول الممكنة مفتوحة ولانهائية وهذا يعنى عند هذا الحد انه لا توجد مشكلة اذ يمكن زيادة الارباح بزيادة الانتاج ولكن هذا الوضع لن يستمر طويلا اذ ستأتى أهداف اخرى تحد من لانهائية منطقة الحلول الممكنة .

ثانيا : التمثيل البياني لهدف الأولوية الثانية (هـ) :

يأتى بعد التمثيل البياني لهدف الأولوية الاولى (الربح) ، ان نقوم بالتمثيل البياني لهدف الأولوية الثانية (هـ) وهو الهدف الخاص بانتاج عدد ١٠٠ جهاز فيديو كبير على الاقل للوفاء بالارتباطات مع العملاء . والقيد الممثل لهذا الهدف هو :

$$x_1 \leq 100 \quad (هـ)$$

وبتحويله الى معادلة وتمثيله بيانيا ، سينتج الشكل التالي والذي يبين هدف الأولوية الأولى وهدف الأولوية الثانية معا علما بأنه قد رمز لهدف الأولوية الأولى برقم (١) وهدف الأولوية الثانية برقم (٢) وان السهم يشير الى الانحرافات المرغوبة .



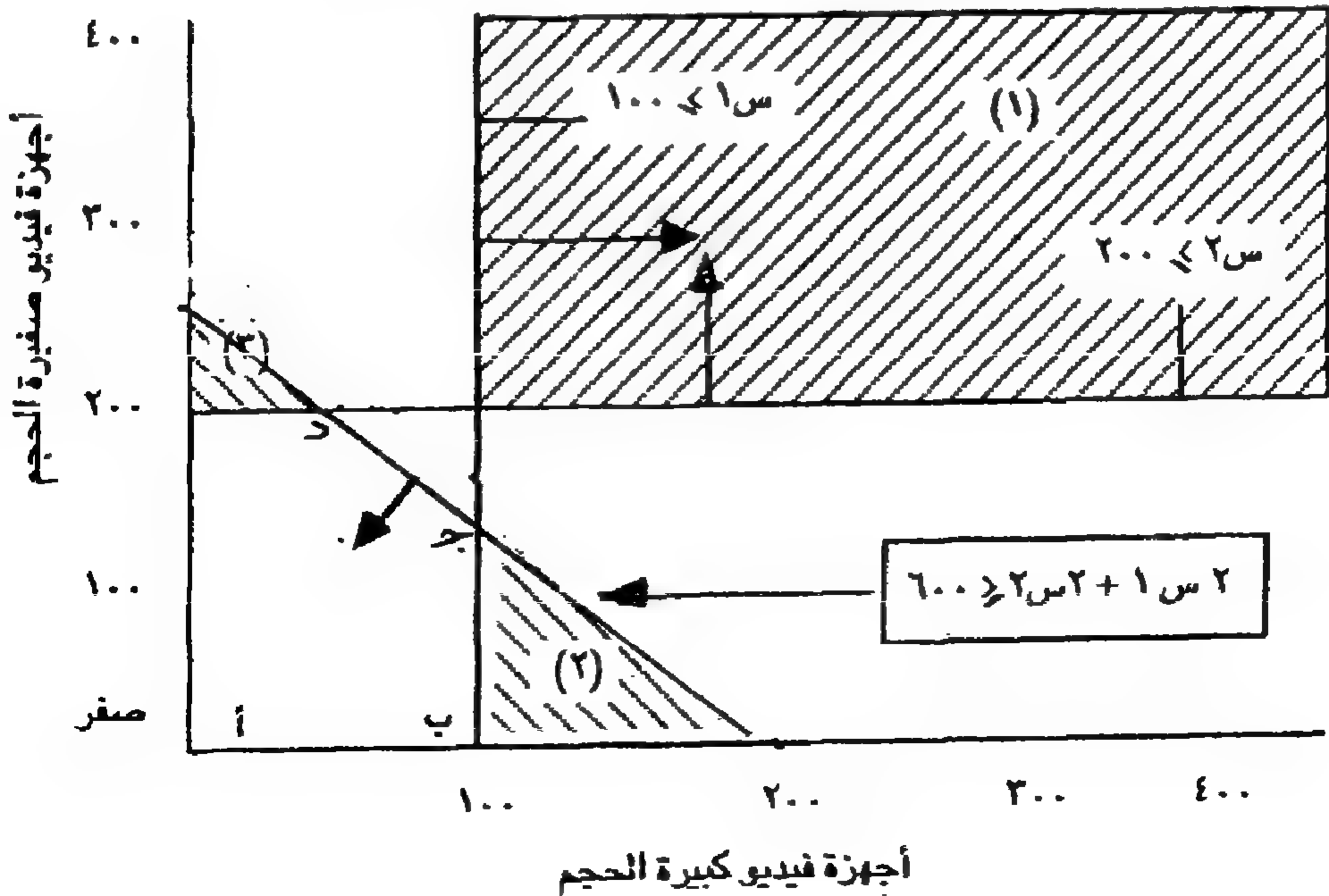
من هذا الشكل يتبين انه برغم اضافة هدف الاولوية الثانية الى هدف الاولوية الاولى الا ان منطقة الحلول الممكنة مازالت لانهائية ويمكن تحقيق الهدفين معا دون انحرافات غير مرغوب فيها ، ويستدل على ذلك من اتجاهات الاسهم التي تشير الى اتجاه الانحرافات المرغوبة . أما أي نقطة تقع على عكس اتجاه الاسهم المرسومة فتشير الى وجود انحرافات غير مرغوبة وهو ما لم يحدث حتى الآن بالنسبة للهدفين الأول والثاني .

ثالثا : التمثيل البياني لهدف الاولوية الثالثة (هـ) :

بعد أن تم التمثيل البياني للهدف الأول والثاني، يتم التمثيل البياني لهدف الاولوية الثالثة (هـ) وهو الهدف الخاص بانتاج عدد ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الاقل للوفاء بتعاقدات المنشأة مع العملاء . والقييد الممثل لهذا الهدف هو :

$$٢س \leq ٢٠٠ \quad (هـ)$$

ويتم تمثيله بيانيا كما هو معتاد ، وبذلك يظهر الرسم البياني متضمنا الأهداف الثلاثة وفق أولوياتها واتجاه الانحراف المرغوب فيه على الشكل التالي :



ويتضح من هذا الشكل ان منطقة الحلول الممكنة مازالت مفتوحة ولا يوجد هناك تعارض بين الأهداف الثلاثة السابقة ، الا انه يلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة في شكلها الجديد بعد اضافة خط قيد الاولوية الثالثة لم تعد محددة بخط الربح ولكنها أصبحت محددة فقط بخطي الهدف الثاني والثالث وهذا معناه أن أي حل يتم اختباره في منطقة الحلول الممكنة الجديدة سيحقق أرباحا تزيد عن ٢٠٠٠٠ جنيه ، أي لابد أن يكون هنالك انحراف مرغوب فيه لهدف الاولوية الأولى .

خلاصة ماتقدم ان هذا الشكل يؤكد انه يمكن الحصول على حل يحقق ويوفي بالأهداف الثلاثة الاولى مجتمعة دون تناقض أو تعارض وان كان هذا الحل سيحقق أيضا انحرافات مرغوب فيها لواحد على الاقل من تلك الأهداف ولابد أن ذلك طالما انه لا يوجد قيد أو مغزى يفيد رفض هذه الانحرافات .

ولتوضيح ماتقدم نقول مثلا ان نقطة تقاطع خط الاولوية الثانية وخط الاولوية الثالثة تقع عند إحداثي (٢٠٠، ١٠٠) ، هذه النقطة اذا اخذناها ممثلة للحل ( قبل اضافة هدف الاولوية الرابعة ) ، فانها وان كانت تستوفي تماما هدف الاولوية الثانية وهدف الاولوية الثالثة دون أي انحرافات مرغوبة أو غير مرغوبة ، الا انها تحقق انحراف مرغوب فيه لهدف الاولوية الاولى بمقداره (٦٠٠٠) كالتالي :

$$١٠٠ \times ١٠٠ + ٨٠ \times ٢٠٠ = ٢٦٠٠٠ - ٢٠٠٠٠ = ٦٠٠٠ \text{ جنيه}$$

هذا ويمكن اختيار نقطة حل أعلى من النقطة المذكورة وسنجد أنها ستحقق انحرافات مرغوب فيها للأهداف الثلاثة السابقة .

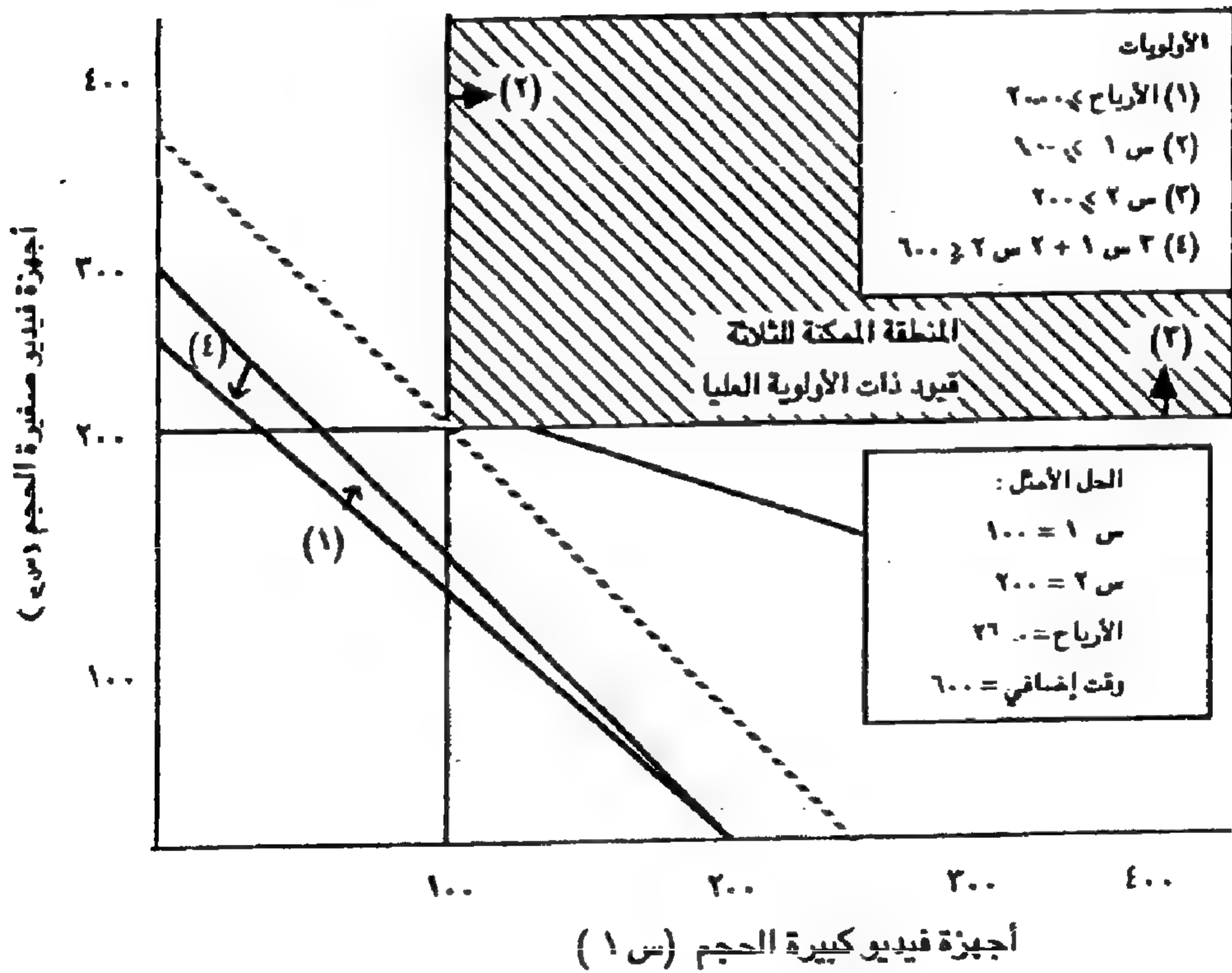
رابعاً : التمثيل البياني لهدف الاولوية الرابعة (هـ) :

وعلى نفس النمط المتتبع سيتم اضافة الخط الممثل

لقيد هدف الاولوية الرابعة ، وهو الهدف الخاص بتجنب الوقت الاضافى من ساعات العمل والتي تبلغ الطاقة المتاحة منها ٦٠٠ ساعة ، والقيد الممثل لهذا الهدف هو :

$$٣س١ + ٢س٢ \geq ٦٠٠ \quad (هـ)$$

وبعد رسم هذا الهدف وتحديد اتجاه الانحراف المرغوب فيه ، سيظهر الشكل البياني بكامل أهدافه الأربعة كالآتي :



وبعد اضافة خط قيد هدف الاولوية الرابعة الى الشكل البياني السابق ، أصبح هذا الشكل يمثل تماما المشكلة كاملة والتي يمكن تفسيرها بيانيا كالآتي بهدف التعرف على كيفية الوصول الى نقطة الحل الأمثل لنموذج برمجة الاهداف بيانيا .



يمكن ان نلاحظ من الشكل السابق ان قيد هـ هدف الاولوية الاولى وهو تحقيق ارباح مقدارها ٢٠٠٠٠ جنيه على الاقل هو الخط رقم (١) ، والسهم المرسوم مع خط القيد يشير الى ان الحلول التي توجد على ذات الخط او أعلى منه تحقق هدف الربح ، أي ان الانحرافات غير المرغوب فيها بالنسبة لهدف الربح ستكون مقدارها صفر بالنسبة لأي نقطة واقعة ومنطقة على ذلك الخط أو أعلى منه ، أما لو اتجهنا ناحية نقطة الاصل تبداً الانحرافات غير المرغوب فيها في الظهور، وتزداد كلما اقتربنا من نقطة الاصل ، وبطبيعة الحال تصل الانحرافات غير المرغوب فيها بالنسبة لهدف الربح الى اقصاها عند نقطة الاصل، وهذا منطقي لأن مقدار الارباح المحققة عند نقطة الاصل تساوي صفر ، اذن عند نقطة الاصل هناك انحراف غير مرغوب فيه في هدف الربح مقداره ٢٠٠٠٠ جنيه .

وبالنسبة لقيد الاولوية الثانية ، والذي يحدد الحد الأدنى لحجم الانتاج من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم بعدد ١٠٠ جهاز ، فانه يقابل الخط رقم (٢) ، ويلاحظ انه برغم ان بعض النقاط الممكنة المحددة بهدف الاولوية الاولى قد فقدت باضافة قيد الاولوية الثانية، الا انه مازالت هناك نقاط ممكنة غيرها تستوفي الهدفين معا .

وباضافة القيد الثالث والممثل في الشكل السابق بالخط رقم (٣) والذي يحدد الحد الأدنى للكمية المنتجة من اجهزة الفيديو صغيرة الحجم بعدد ٢٠٠ جهاز، سيؤدي ايضا الى نتيجة مماثلة ، اذ سنجد ان اضافة خط هذا القيد الى بعض النقاط الممكنة التي تستوفي كلا من قيد الاولوية الاولى وقيد الاولوية الثانية مستنفذ ، الا أننا سنجد مع ذلك ان هناك بعض الحلول الممكنة والتي تستوفي الاهداف الثلاثة معا وهي المنطقة المظللة بالشكل السابق .



أما بالنسبة للقيود الرابع والممثل في الشكل  
 بالخط رقم (٤) ، والذي يحدد طاقة الانتاج المتاحة  
 بعدد ٦٠٠ ساعة عمل ، فسنجد أنه غير محقق بعكس الحال  
 بالنسبة للقيود الثلاثة الأولى ، اذ نجد ان اتجاه  
 السهم المرتبط بخط ذلك القيد يشير الى انه لا توجد  
 نقاط تستوفي القيود الثلاثة الأولى وفي الوقت نفسه  
 تستوفي قيد الهدف الرابع ، وعلى ذلك فان متخذ القرار  
 يحتاج الى التوصل الى الحل الذي يستوفي القيود  
 الثلاثة الاولى باعتبارها اولويات عليا ، ويخفض في  
 الوقت نفسه انحرافات القيد الرابع ، باعتبار انه  
 أدنى الأهداف أولوية . وعلى ذلك فان التشغيل لوقت  
 اضافي يعتبر ضروري ولا بد منه ، فالهدف هو تحديد  
 جدولة الانتاج التي تخفض مقدار الوقت الاضافي بالاضافة  
 الى تحقيق ٢٠٠٠٠ جنيه على الأقل أرباح ، وانتاج ١٠٠  
 فيديو حجم كبير و ٢٠٠ حجم صغير على الاقل .

ولكن كيف سيتم تعيين نقطة الحل الأمثل ؟ للإجابة  
 على ذلك نقول ان تلك النقطة الممكنة بالنسبة لأهداف  
 الاولويات العليا السابقة والتي تعتبر اقرب تماما  
 ( أقل انحرافات غير مرغوبة ) لمقابلة ذلك الهدف غير  
 المحقق هي النقطة التي تمثل الحل الأمثل للمشكلة ،  
 ويمكن تعيينها اذا ما اعتبرنا ان قيد الهدف غير  
 المحقق أو غير المستوفي كأنه دالة هدف ، أي أن نقوم  
 بعمل سهل وبسيط وعلى نمط مشابه للطريقة التي اتبعناها  
 في خط الربح المتعادل ( أو خط التكلفة المتعادل ) ،  
 وذلك عند ايجاد الحل الأمثل لأي مشكلة برمجة خطية .  
 فالخطوط الموازية لخط القيد الرابع والتي تقع أعلى  
 ذلك الخط تمثل مجموعة النقط التي تمثل كل منها نفس  
 مستوى الانحراف عن ذلك القيد ، لذلك يمكن أن ننظر الى  
 تلك الخطوط على انها خطوط الانحرافات المتعادلة  
 Isodeviation Lines وعلى ذلك فاننا نبحث عن  
 اقل مستوى لحد خطوط الانحرافات المتعادلة والموازية

لقيود ساعات العمل والتي تحتوي على الاقل على نقطة واحدة على الاقل ممكنة تشترك مع القيود الثلاثة الأخرى ذات الاولويات الاعلى ، وبتطبيق تلك القاعدة ، سنجد أن النقطة (أ) الموضحة بالشكل السابق هي التي ينطبق عليها الاعتبارات السابقة ، اذن تكون النقطة (أ) هي نقطة الحل الأمثل ، وعند هذه النقطة تكون عدد أجهزة الفيديو كبيرة الحجم المنتجة ١٠٠ وحدة ، والأجهزة صغيرة الحجم ٢٠٠ وحدة ، والربح مقداره ٢٦٠٠٠ جنيه ، وتشغيل وقت اضافي مقداره ١٠٠ ساعة (  $200 \times 2 + 100 \times 3 = 700 - 600 = 100$  ساعة ) .

خلاصة ماتقدم ان النتائج التي تم التوصل اليها تشير الى انه تم استيفاء ثلاثة أهداف بدون انحرافات غير مرغوب فيها ، أما الهدف الرابع والذي يمثل الاولوية الدنيا فقد تم تخفيض انحرافاته غير المرغوب فيها الى ادنى حد ممكن ، والجدول التالي يمثل ملخصاً بالنتائج التي اسفر عنها حل المشكلة السابقة بنموذج برمجة الأهداف .

مستوى اولوية الهدف	الهدف	هل تم تحقيق الهدف	كيف ؟
١	الارباح تعادل ٢٠٠٠٠ جنيه على الاقل .	نعم	الارباح ٢٦٠٠٠ جنيه
٢	انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير على الاقل .	نعم	انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير .
٣	انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الاقل .	نعم	انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير .
٤	تجنب التشغيل لوقت اضافي (٦٠٠ ساعة عمل كطاقة متاحة) .	لا	هناك احتياج لوقت اضافي مقداره ١٠٠ ساعة عمل .

وجدير بالذكر ان نوضح هنا ان الخطوات التي اتبعناها في حل هذه المشكلة بيانيا ستمدنا بفهم جيد لبرمجة الاهداف ، فالملاحظة الاساسية التي يمكن الوقوف عليها من حل هذه المشكلة أن الحلول المثلى يتم تحديدها عن طريق تتابع اضافة قيود الاهداف واحدا تلو الآخر وفقا لمستوى اولويتها ، حتى نصل الى ان احد قيود الاهداف لايمكن استيفائه بأحد أو بعض الحلول الممكنة لقيود الاولوية الاعلى ، عندئذ نلجأ الى تخفيض الانحرافات غير المرغوبة فيها بالنسبة لأول قيد لم يتم استيفائه .

من ناحية أخرى نود أن نوضح أنه اذا كانت هناك اهدافا اضافية لها انحرافات في الحل النهائي فلان التبسيط الذي اتبعناه في هذا الحل البياني سيكون من الصعب جدا الاخذ به في تلك الحالة الأمر الذي يجعلنا نفكر في طريقة السمبلكس لحل نموذج برمجة الاهداف .

### حل نموذج برمجة الاهداف بطريقة السمبلكس :

ان مجال استخدام الطريقة البيانية في حل مشاكل برمجة الاهداف كما تناولناها في الجزء السابق يقتصر فقط على تلك المشاكل التي تتضمن متغيرين فقط من المتغيرات القرارية كما هو الحال تماما عند تطبيقها على مشاكل البرمجة الخطية ذات الهدف الواحد، ومن الممكن اتباع خطوات ومراحل منهج طريقة السمبلكس لمعالجة المشاكل المتعددة الاهداف في اطار نموذج برمجة الاهداف، وحتى يمكن الوقوف على كيفية استخدام منهج طريقة السمبلكس في حل هذا النوع من المشاكل ، نكون بحاجة اولا الى توضيح وفهم الكيفية التي يتم بها اعداد الصياغة الرياضية للمشاكل متعددة الاهداف . ولغرض التبسيط سنبدأ هذا الجزء بصياغة رياضية تمثل مشكلة بسيطة تضم هدفين فقط .

مثال :

نفرض ان مدير الانتاج باحدى الشركات يقوم حاليا بوضع مستويات الانتاج لمنتجات الشركة والمتمثلة في نوعين من المنتجات هما س<sub>١</sub>، س<sub>٢</sub> . وتقوم خطة الشركة على التشغيل الكامل لطاقة المصنع من خلال العمل لمدة خمسة أيام اسبوعيا وبثلاثة ورديات يوميا كل ورديـة ثمانية ساعات ، أي ان الطاقة الاسبوعية للمصنع هي ٧٢٠٠ دقيقة (  $7200 = 60 \times 8 \times 2 \times 5$  ) وهي تمثل الطاقة الانتاجية للاسبوع القادم ، ويتم انتاج كلا نوعي المنتجات في خط تجميع مشترك ، يستطيع الانتهاء من المنتج الاول في دقيقتين ، والمنتج الثاني في دقيقة واحدة ، وقد وضع مدير الانتاج نصب عينيه محاولة تحقيق هدفين : الهدف الاول وهو يمثل هدف الأولوية الاولى ، وهو تحقيق اجمالي عائد مساهمة مقداره ٧٠٠٠٠ جنيه على الاقل ، علما بأن هامش ربح المنتج الاول ١٥ جنيها ، وهامش ربح المنتج الثاني ١٠ جنيهات ، والهدف الثاني وهو يمثل أيضا هدف الأولوية الثانية ويتمثل في تحديد اجمالي عدد الوحدات المنتجة من النوعين معا بعدد لايزيد عن ٥٠٠٠ وحدة في الاسبوع وذلك تمشيا للخطة الموضوعة لمستويات المخزون .

صيغة المشكلة : Formulating the Problem

سبق القول ان الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية تتكون من جزئين اولهما وضع دالة الهدف . وثانيهما تحديد الصياغة الرياضية للقيود والمفروضة على دالة الهدف ، ونظرا لأن اعداد الصياغة الرياضية لمشكلة برمجة الاهداف وان كانت تتفق من حيث هيكل الصياغة الا انها تختلف بعض الشيء في محتوى دالة الهدف والقيود ، ولذلك سنستعرض فيما يلي كيفية اعداد الصياغة الرياضية للمشكلة التي وردت بالمثال السابق كمشكلة برمجة اهداف .



## قيود برمجة الأهداف : Goal Programming Constraints

كان المفروض ان نبدأ هنا اعداد دالة الهدف أولا باعتبارها تمثل الجزء الاول من الصياغة الرياضية ، مثلما كنا نتعامل مع مشاكل البرمجة الخطية في الفصول الثلاثة المتقدمة ، ولكننا نرى انه من الملائم لاغراض التوضيح والفهم السريع ان نبدأ مناقشتنا هنا بصياغة مشاكل برمجة الاهداف بصياغة القيود المفروضة على دالة الهدف لأنها ستيسر امامنا اعداد صياغة دالة الهدف أسرع وأصح كما سنرى في الجزء التالي .

عادة سنجد ان مشاكل برمجة الاهداف تتضمن نوعين من القيود المفروضة على دالة الهدف ، النوع الاول منها ونطلق عليه قيود فنية أو تكنولوجية Technological والنوع الثاني يطلق عليه قيود اهداف Goal Constrains ، والنوع الاول من القيود والذي اطلقنا عليه القيود التكنولوجية تتعامل مع طاقات الموارد والحدود الاخرى التي لا تمثل هدفًا موضوعًا بالمعنى المفهوم للهدف . وهي بذلك المعنى تماثل تمامًا نوع القيود التي عالجناها في الفصول الثلاثة السابقة . اما قيود الاهداف وهي النوعية الثانية من القيود بمشكلة برمجة الاهداف ، فانها تمثل الاهداف المحددة والموضوعة في اولويات واجبة التنفيذ ، وهذه تشابه الاهداف الأربعة التي وردت بمقدمة هذا الفصل في حالة شركة انتاج اجهزة الفيديو .

ومن خلال استعراض المثال الحالي سنجد أنه يمثل مشكلة تتضمن ثلاثة قيود ، احدهما يمكن تصنيفه ليندرج تحت نوع القيود التكنولوجية ، وهو يتعلق بالطاقة الانتاجية لخط التجميع ، اما القيد الآخر فيمكن تصنيفهما كقيود هدف ، الاول يتعلق بهدف الربح وهو تحقيق عائد مساهمة ٧٠٠٠٠ جنيه على الاقل ، والآخر



يتعلق بمستوى المخزون الموضوع والمحدد. ومن الضروري ان نفرق بين نوعي القيود لأن لكل منهما معالجة مختلفة عند الصياغة الرياضية للمشكلة .

فبالنسبة للقيود التكنولوجي ( وهو قيد طاقة التجميع ) فهو يماثل تماما مجموعة القيود في نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف ، ولذلك فإنه يتم التعامل معه بذات الطريقة المتبعة عند صياغة المشكلة أحادية الهدف ، فإذا رمزنا لعدد الوحدات المنتجة من النوعية الأولى من المنتجات بالرمز ( س<sub>١</sub> ) ، ورمزنا لعدد الوحدات المنتجة من النوعية الثانية من المنتجات بالرمز ( س<sub>٢</sub> ) ، فإن قيد الطاقة يمكن صياغته على النحو التالي :

$$٧٢٠٠ \geq س٢ + س١$$

وبعد اضافة المتغير الراكد ( س<sub>٣</sub> ) ليمثل الطاقة غير المستغلة ستصبح معادلة القيد على الشكل التالي :

$$٧٢٠٠ = س٢ + س٣ + س١$$

أما قيود الهدف فإنها تعالج بطريقة مختلفة بعض الشيء ، ويرجع السبب في ذلك الى أن المستوى المحدد والموضوع للهدف المعين يمثل وضعاً خاصاً ، اذ قد لا يمكن استيفاءه وتحقيقه تماماً بنفس المستوى المحدد ، اذ ربما قد يتحقق هذا الهدف بأكثر مما هو موضوع ، أو بأقل مما هو موضوع ، وهي كلها احتمالات واردة . وحتى يمكن مراعاة ذلك عند الصياغة الرياضية ، فإن الامر يتطلب اضافة متغيرين لكل قيد من قيود الاهداف (دون القيود التكنولوجية والتي لايسمح فيها مطلقاً بتعدى حدود الطاقة الموضوعه) ، هذه المتغيرات يطلق عليها اصطلاح المتغيرات الانحرافية Deviation Variables ، لأن قيمة كل متغير منها تمثل مقدار انحراف الحل عن مستوى

الهدف الموضوع ، فمتغير الانحراف الموجب Positive  
 deviational Variable والذي سنرمز له بالرمز (  $F^+$  )  
 يمثل مقدار الزيادة عن الهدف الموضوع . في حين أن  
 متغير الانحراف السالب Negative deviational  
 Variable ، والذي سنرمز له بالرمز (  $F^-$  ) يمثل  
 المقدار الذي لن يتحقق من الهدف .

وحيث ان الهدف الأول بمثالنا المذكور قد حدد  
 أن يكون مستوى الربح على الأقل مامقداره ٧٠٠٠٠ جنيه ،  
 اذن يمكن صياغته بالطريقة المعتادة كالآتي :

$$٧٠٠٠٠ \leq ١٥س١ + ١٠س٢$$

ولكننا ذكرنا قبل ذلك ، انه في بعض الحالات قد  
 يتم تحقيق هذا الهدف بأكثر مما هو موضوع ، وفي أحوال  
 أخرى قد يتم تحقيقه بأقل مما هو موضوع ، وحيث ان كلا  
 الاحتمالين قائمين ، اذن لابد من اضافتهما الى قيد ذلك  
 الهدف كالآتي :

أ - بفرض أن (  $F^-$  ) تمثل المقدار الذي يقل به هدف  
 الاولوية الاولى ( الربح ) الموضوع .

ب - وبفرض ان (  $F^+$  ) تمثل مقدار الزيادة المحققة  
 من هدف الاولوية الاولى وهو مستوى الربح الموضوع .

لذلك ، وبناءً على هذا الفهم ، فان قيد هدف الربح  
 ذات الاولوية الاولى يمكن تحويله الى صورة المعادلة  
 التالية :

$$٧٠٠٠٠ = ١٥س١ + ١٠س٢ - F^- + F^+$$

وبالنظر الى شكل المعادلة السابقة يمكن القول  
 ان متغير الانحراف (  $F^-$  ) يشبه المتغير الراكب  
 Slack Variable ، وان (  $F^+$  ) يماثل المتغير  
 المضاف Surplus Variable ، والحكمة من اضافة كلا

المتغيرين الى قيد الهدف ، هو انه يجعلنا نقف على حقيقة انه قد لا يكون في مقدورنا تحقيق ارباح مقدارها ٧٠٠٠٠ جنيه تماما وبالضبط Exactly لأن هناك ثلاثة احتمالات للحل هي :

#### الاحتمال الاول :

ان يكون مقدار الربح القابل للتحقيق معادل تماما وبالضبط لمستوى الهدف المحدد مقدما وهو ٧٠٠٠٠ جنيه ، وفي هذه الحالة تكون  $(F_1^+)$  مساوية للصفر ، و  $(F_1^-)$  مساوية ايضا للصفر، أي أن متغيرات الانحراف قيمتها مساوية للصفر حيث لا يوجد انحراف في تحقيق هدف الاولوية الأولى .

#### الاحتمال الثاني :

ان يكون مقدار الربح القابل للتحقيق يقل عن الربح المحدد مقدما كهدف نسعى اليه ، وفي هذه الحالة فان متغير الانحراف  $(F_1^-)$  تكون له قيمة موجبة مساوية للفرق بين الربح المحقق ومستوى الربح المستهدف ، وتكون قيمة متغير الانحراف  $(F_1^+)$  مساوية للصفر .

#### الاحتمال الثالث :

ان يكون مقدار الربح القابل للتحقيق يزيد عن الربح المحدد مقدما كهدف موضوع ومستهدف ، وفي هذه الحالة فان متغير الانحراف  $(F_1^+)$  تكون قيمة مساوية لمقدار الزيادة بين الأرباح المحققة فعلا ومستوى الربح المستهدف . وتكون قيمة متغير الانحراف  $(F_1^-)$  مساوية للصفر .

ويلاحظ ان احد الانحرافين الموجب أو السالب (على الاقل ) لابد ان يكون صفرا ، وفي كل الأحوال فان متغير الانحراف الموجب  $(F_1^+)$  ، ومتغير الانحراف السالب  $(F_1^-)$

لابد ان يكون كميات غير سالبة Nonnegative ، فاذا كان احدهما كمية موجبة فان الانحراف الآخر لابد أن يكون صفر.

وبنفس الطريقة وعلى نفس النهج السابق يتم صياغة القيد الثاني الممثل لهدف الاولوية الثانية (مستوى المخزون الموضوع للمنتجات) ، اذ يتم ذلك عن طريق تعديل القيد الاصلي لهدف مستوى المخزون عن طريق اضافة متغير انحراف يقل عن الهدف (  $f^-$  ) ، ومتغير انحراف يزيد عن الهدف (  $f^+$  ) ، وفى هذه الحالة يتم تمييز رموز الانحراف برقم يمثل اولوية الهدف ، وحيث ان هذا الهدف يمثل هدف الاولوية الثانية ، لذلك سيكون متغير الانحراف الذى يشير الى المقدار الذى لن يتحقق من الهدف لقيد هدف الاولوية الثانية هو (  $f_2^-$  ) ، وسيكون المتغير الذى يشير الى مقدار زيادة تحقق الهدف هو (  $f_2^+$  ) ، وعلى ذلك يتم تعديل صياغة قيد هدف الاولوية الثانية من شكلة الحالى وهو :

$$s_1 + s_2 \geq 5000$$

الى الشكل الصحيح فى صورة معادلة القيد كالاتي :

$$s_1 + s_2 + f_2^- - f_2^+ = 5000$$

وبعد الانتهاء من مناقشة اعداد صياغة القيود الثلاثة الواردة بالمثل المذكور ، فان الصياغة التالية ستكون هى الصياغة الرياضية لقيود الموارد والأهداف فى صورتها الكاملة :

$$7200 = s_1 + s_2 + f_1^- \quad (\text{قيد طاقة التجميع})$$

$$70000 = f_1^+ - f_1^- + 10s_2 + 15s_1 \quad (\text{هدف الربح})$$

$$5000 = f_2^- - f_2^+ + s_2 + s_1 \quad (\text{هدف مستوى المخزون})$$

$$s_1, s_2, s_3, f_1^-, f_1^+, f_2^-, f_2^+ \leq \text{صفر (عدم السلبية)}$$



### دالة هدف برمجة الاهداف :

#### Goal Programming objective Function

تعتبر صياغة دالة هدف نموذج برمجة الاهداف عملية هامة جدا وتتطلب تركيزا خاصا لفهم المنطق الرياضي وراء شكل الصياغة التي تأخذها تلك الدالة . فليس بخاف علينا انه بعد اضافة متغيرات الانحراف السالبة والموجبة الى القيود الاصلية للاهداف ، سيؤدي الى اننا سنفقد الاتجاه الاصلى للهدف ( اقل من أو أكبر من ) ، اذ بعد اضافة هذه المتغيرات ستصبح القيود على شكل معادلات متساوية الطرفين ومن ثم اختفت الاشارة الاصلية للقيود (  $<$  ،  $>$  ) وحل محلها اشارة التعادل (  $=$  ) ، وعلى ذلك اذن باضافة متغيرات الانحراف الى القيد الاصلى للهدف لم يعد في الامكان استنتاج اتجاه الهدف من معادلة القيد ، فمثلا معادلة قيد هدف مستوى المخزون الموضوع كما تم صياغته في الاصل يشير الى ان المطلوب ان يكون اجمالي انتاج نوعي السلع ليس أكثر من ٥٠٠٠ وحدة ، وبعد اضافة متغيرات الانحراف لهذا القيد اصبح في صورة المعادلة التالية :

$$s_1 + s_2 + f_2^- - f_2^+ = 5000$$

ان هذا القيد على هذه الصورة (معادلة) ، لا يوضح لنا ما اذا كنا نرغب ان نجعل  $s_1 + s_2$  تزيد عن ٥٠٠٠ وحدة او ان تقل عن ذلك أو أن تساوى ٥٠٠٠ تماما ، ونفس الامر يحدث بالنسبة لقيد الاولوية الاولى والخاص بمستوى الارباح وهذا ما نطلق عليه اصطلاح فقد الاتجاه Loss of Direction . ( يلاحظ ان هذا لا يحدث الا مع قيود الاهداف فقط ، اما القيود التكنولوجية وقيود الحدود الاخرى فلا تواجهنا هذه المشكلة حيث لا يضاف اليها متغيرات انحراف ، ولكن يضاف اليها متغيرات راکدة ، أو متغيرات مضافة ، أو متغيرات اصطناعية وهذا لا يفقدنا الاتجاه الاصلى للقيد ) .



ان التخوف من حالة فقد الاتجاه لا يمثل مشكلة معقدة  
اذ يمكن علاجها والابقاء على معرفة الاتجاه الصحيح لقيود  
الهدف وذلك من خلال اجراء تصحيح وتعديل بسيط ويسير  
عند صياغة ووضع دالة الهدف .

ان دالة هدف نموذج برمجة الاهداف تسعى الى تخفيض  
الانحرافات غير المرغوب فيها Undesirable لقيود  
الهدف ، فمثلا حيث ان مدير الانتاج قد قرر أن يكون  
الربح المستهدف يساوى على الأقل ٧٠٠٠٠ جنيه ، لذلك فان  
الامر يتطلب اعتبار أن عدم تحقق هذا الهدف بكامله أو  
بمعنى آخر مقدار عدم تحققه والمقاس بمتغير الانحراف  
(  $F_1^-$  ) هو انحراف غير مرغوب فيه ينبغي العمل على  
تخفيضه ، لذا ينبغي اضافة هذا المتغير الى دالة الهدف  
للعمل على تخفيضه ، وبناء على ذلك الفهم والتوضيح  
فانه لاينبغي ان يضاف المتغير (  $F_1^+$  ) والذي يقيس  
المبالغة أو الزيادة أو التجاوز في تحقيق هدف الربح  
لأنه انحراف مرغوب فيه .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الثانية والمتمثل في  
تحديد حجم الانتاج من المنتجين معا بما لايزيد عن  
٥٠٠٠ وحدة ، فان المبالغة أو التجاوز في تحقيق هذا  
الهدف ( أي انتاج أكثر من ٥٠٠٠ وحدة ) يعتبر انحرافا  
غير مرغوب فيه ، لذلك فان متغير الانحراف الذى سيتم  
اضافته الى دالة الهدف لتخفيضه ، هو ذلك المتغير  
الذى يمثل الانحراف غير المرغوب فيه ، أي المبالغة في  
تحقيق الهدف ، وهو متغير الانحراف (  $F_2^+$  ) ولا يضاف  
متغير الانحراف الآخر (  $F_2^-$  ) لأنه يمثل انحراف مرغوب  
فيه .

وكقاعدة عامة : اذا كان قيد الهدف (أقل من أو  
يساوى ) ، فانه يتعين اضافة متغير الانحراف الذى يبالغ  
في تحقيق الهدف (  $F^+$  ) الى دالة تخفيض الهدف . أما

إذا كان قيد الهدف ( اكبر من أو يساوى ) ، فإنه يجب  
ضم متغير الانحراف الذى يقيس مقدار النقص أو عدم  
التحقق ( ف<sup>-</sup> ) الى دالة الهدف ، أما اذا كان القيد  
( يساوى ) فإنه من الضروري اضافة كلا المتغيريين  
( ف<sup>+</sup> ، ف<sup>-</sup> ) الى دالة الهدف لأن كلا منهما فى تلك  
الحالة يمثل انحرافا غير مرغوب فيه .

وعلى ذلك ستكون مكونات دالة هدف نموذج برمجة  
 الاهداف عبارة عن كافة متغيرات الانحراف غير المرغوب  
 فيه وفقا للقاعدة السابقة . وسيكون هدف تلك الدالة  
 هو العمل على تخفيض تلك الانحرافات . ولكن يبقى  
 تمثيل اولويات الاهداف فى دالة الهدف ، فليس من  
 المعقول ان نقوم بتخفيض الانحراف غير المرغوب فيه  
 لهدف ادنى ويكون ذلك على حساب هدف ذات أولوية أعلى .  
 ان الهدف هو تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها ولكن  
 فى اطار مراعاة اولويات الاهداف المحددة بالمشكلة .

فمثلا بفرض انه يوجد لدينا هدفين لهما متغيرات  
 انحراف غير مرغوب فيها هما : ف<sup>+</sup> م ، ف<sup>-</sup> ل ، وان الهدف  
 م يمثل اولوية اعلى من الهدف ل ، عندئذ يمكن وضع  
 صياغة دالة الهدف على الصورة التالية :

$$\text{تخفيض } F^- \text{ ل} \quad | \quad \text{نهاية صفرى } F^+ \text{ م}$$

وتقرأ كالآتي : تخفيض ف<sup>-</sup> ل بعد تحقيق النهاية  
 الصفرى للانحراف ف<sup>+</sup> م وهذا يعنى اننا سنعمل الى تخفيض  
 انحراف الاولوية الثانية عن طريق الوصول الى النهاية  
 الصفرى للانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية  
 الاعلى . اذن سيكون التعامل أولاً مع الأولوية الاولى للوصول  
 بانحرافها الى النهاية الصفرى ومن ثم يكون العمل على  
 تخفيض انحراف الاولوية الثانية .

وحيث ان هدف الربح فى مثالنا الحالى يمثل

اولوية اعلى من هدف مستوى المخزون ، اذن ستأخذ صورة دالة الهدف للمشكلة التي نعد صياغتها الآن الشكل التالي :

$$\text{تخفيض } F_1^+ \mid \text{نهاية مغرى } F_1^-$$

والتي يمكن ترجمتها لفظيا الى : تخفيض عدد الوحدات المنتجة زيادة عن ٥٠٠٠ وحدة بعد تحقيق النهاية المغرى للانحراف غير المرغوب فيه لمستوى ارباح مقدارها ٧٠٠٠٠ جنيه على الاقل .

وتلخيصا لما تقدم ستكون الصياغة الرياضية الكاملة لنموذج برمجة الاهداف للمثال الحالي على الصورة التالية :

الصياغة الرياضية :

$$\text{دالة الهدف : تخفيض } F_1^+ \mid \text{نهاية مغرى } F_1^-$$

بشرط أن :

$$7200 = 1S_1 + 2S_2 + 3S_3$$

$$70000 = 15S_1 + 10S_2 + F_1^- - F_1^+$$

$$5000 = 1S_3 + F_2^- - F_2^+$$

$$S_1, S_2, S_3, F_1^-, F_1^+, F_2^-, F_2^+ \leq \text{مفر}$$

اعداد جداول السمبلكس :

بعد الانتهاء من اعداد الصياغة الرياضية لنموذج برمجة الاهداف ، ووفقا لمنهج السمبلكس ، فانه يتم اعداد جدول الحل المبدئي ، وفيما يلي جدول الحل المبدئي ، علما بأننا سنتناول بالشرح والتحليل كيفية تكوينه وكيفية تحديد معاملات صفوفه وأعمدته بعد استعراض الجدول وذلك حتى يتمكن القارئ من الوقوف أولا بأول على اسلوب اعداده وتدوين بياناته واستكمال العمليات الحسابية المطلوبة لاعداده .

## الجدول المبدئي

القيم	المتغيرات الأساسية	معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية	متغير خارج						متغير داخل						العنصر المحوري	
			س ١	س ٢	س ٣	ف ١	ف ٢	ف ٣	ف ٤	ف ٥	ف ٦	ف ٧	ف ٨	ف ٩	ف ١٠	ف ١١
٧٢٠٠	س ٢	مطر	(٢)	١	١	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر
٧٠٠٠٠	ف ١	مطر	١٥	١٠	مطر	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
٥٠٠٠	ف ٢	مطر	١	١	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	١	١
الأرباح الداخلة	س ٣	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	١	١
التكاليف الداخلة	س ٣	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	١	١
صافي التغير	س ٣	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	١	١
الأرباح الداخلة	س ٣	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	١	١
التكاليف الداخلة	س ٣	مطر	١٥	١٠	مطر	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
صافي التغير	س ٣	مطر	١٥	١٠	مطر	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١

$$\frac{7200}{3} = 2400$$

$$\frac{70000}{3} = 23333.33$$

$$\frac{5000}{1} = 5000$$



وبالنظر الى جدول الحل المبدئي يتضح أنه يتكون على نمط يشابه الى حد كبير جدول السمبلكس المعتاد، وان كانت هناك بعض الاختلافات الجوهرية والاساسية التي تتلاءم مع طبيعة نموذج برمجة الاهداف والذي يشتمل على عدد من الاهداف ذات الاولويات المعينة . وفيمايلي نوضح كيفية اعداد هذا الجدول .

### أولا : تحديد المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئي :

يتم تعيين المتغيرات الاساسية بجدول الحل المبدئي بالطريقة المعتادة والتي سبق استخدامها في نموذج البرمجة الخطية، وللتذكرة فان ذلك كان يتم عن طريق وضع قيمة المتغيرات القرارية (  $s_1, s_2$  ) مساوية للصفر وعندئذ يتم تعيين اى المتغيرات الراكدة أو متغيرات الانحراف بالقيود الموجودة بالصياغة ستكون أساسية بفرض تحقيق تلك القيود ، فمثلا اذا كانت  $s_1 = s_2 = \text{صفر}$  فان قيد الطاقة سيكون متوازن عندما تكون قيمة المتغير الراكد (  $s_3$  ) تساوى ٧٢٠٠ وهذه النتيجة تم التوصل اليها كالاتي :

$$٧٢٠٠ = s_1 + s_2 + s_3$$

وحيث ان  $s_1 = s_2 = \text{صفر}$  (عند الحل المبدئي - نقطة الاصل)

٠٠ بالتعويض بهذه القيم في المعادلة السابقة :

$$٧٢٠٠ = ٢(\text{صفر}) + ١(\text{صفر}) + s_3$$

$$٧٢٠٠ = s_3$$

وعلى ذلك فان  $s_3$  متغير اساسي وقيمه ٧٢٠٠ عند الحل المبدئي .

وبنفس الطريقة فان قيد هدف الربح يكون متوازنا عندما يكون متغير انحراف عدم التحقق (  $f_1$  ) مساويا لـ ٧٠٠٠ ، ومتغير التحقق مساويا للصفر كالاتي (حيث انه لا انتاج ومن ثم لا ارباح اى عدم تحقق اى مستوى من هدف الربح وعليه فان متغير التحقق = صفر ) :



$$٠٠ \quad ١٥س_١ + ١٠س_٢ + ف_١^- - ف_١^+ = ٧٠٠٠٠$$

$$\text{وحيث ان } ١س_١ = ٢س_٢ = ف_١^+ = \text{مفر}$$

٠٠ بالتعويض بهذه القيم في المعادلة السابقة :

$$٧٠٠٠٠ = ١٥(\text{مفر}) + ١٠(\text{مفر}) + ف_١^- - ١(\text{مفر})$$

$$٠٠ \quad ف_١^- = ٧٠٠٠٠$$

وعليه فان متغير الانحراف (  $ف_١^-$  ) سيظهر كمتغير اساسي بالجدول المبدئي وبقيمة مقدارها ٧٠٠٠٠ .

كذلك فان قيد مستوى المخزون يكون متعادلا عندما يكون متغير التحقق مساويا ٥٠٠٠ ومتغير انحراف التجاوز مساويا للمفر ( حيث انه بالجدول المبدئي لا يوجد انتاج ومن ثَم فلن يكون هناك تجاوز في هدف المخزون المحدد ، أي ان  $ف_٢^-$  ستكون مساوية للمفر بالجدول المبدئي ) .

$$٠٠ \quad ١س_١ + ٢س_٢ + ف_٢^- - ف_٢^+ = ٥٠٠٠$$

$$\text{وحيث ان } ١س_١ = ٢س_٢ = ف_٢^+ = \text{مفر}$$

٠٠ بالتعويض بهذه القيم في المعادلة السابقة ينتج

$$\text{ان قيمة } ف_٢^- = ٥٠٠٠$$

ولذلك سنجد ان المتغيرات الاساسية في الجدول المبدئي هي  $١س_١$  ،  $ف_١^-$  ،  $ف_٢^-$  وقيمة كل منها على الترتيب ٧٢٠٠ ، ٧٠٠٠٠ ، ٥٠٠٠ . وعلى ذلك يتم تسجيل المتغيرات الاساسية في العمود الثاني بالجدول وعلى اليسار بالعمود الثالث قيمة كل من تلك المتغيرات الاساسية على نفس النمط الذي سبق اتباعه بطريقة السمبلكس .

كذلك يلاحظ من الجدول المبدئي ان معاملات الهدف لكل متغير اساسي قد وضعت في العمود الاول باقصى اليمين وهي بذلك ايضا تشابه في وضعها جدول السمبلكس التقليدي

الا ان هناك اختلافا جوهريا بينهما ، فجدول السمبلكس التقليدي يتعامل مع المشاكل وحيدة الهدف ، أما برمجة الاهداف ذاتها فانها تتعامل مع المشاكل متعددة الاهداف ، لذلك ينبغي ان تعكس معاملات دالة الهدف هذا التعدد في الاهداف . وحيث انه يوجد في ذلك المثال هدفين هما ( الربح - ومستوى المخزون ) ، لذلك فقد رمزنا لهدف الاولوية الاولى بالرمز ( ل<sub>١</sub> ) ، وتكون بذلك ( ل<sub>٢</sub> ) هي رمز هدف الاولوية الثانية (مستوى المخزون) ، ومعنى ذلك انه لكل متغير اساسي معاملين احدهما في هدف الاولوية الاولى ، والثاني لهدف الاولوية الثانية .

فبالنسبة لهدف الربح وهو هدف الاولوية الاولى ، فالهدف هو تخفيض قيمة الانحراف السالب ف<sub>١</sub><sup>-</sup> متفيسر انحراف عدم التحقق ) ، لذلك فان دالة هدف مستوى الاولوية الاولى هي :

$$\text{تخفيض} = \text{مفر س}_1 + \text{مفر س}_2 + \text{مفر س}_3 - \text{ف}_1 + \text{مفر ف}_1 + \text{مفر ف}_2 + \text{مفر ف}_3 + \text{مفر ف}_4$$

ومن هذه الدالة يلاحظ ان جميع المتغيرات بها لها معاملات مفرية ماعدا المتغير ف<sub>١</sub><sup>-</sup> . وعلى ذلك سنجد أن المتغير الاساسي ( س<sub>٣</sub> ) معاملته في هدف الاولوية الاولى مفر ، كذلك الحال بالنسبة للمتغير الاساسي ( ف<sub>٢</sub><sup>-</sup> ) ، أما المتغير ف<sub>١</sub><sup>-</sup> فمعامله = ١

وبالنسبة لدالة هدف مستوى الاولوية الثانية ( مستوى المخزون ) ، فانه يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$\text{تخفيض} : \text{مفر س}_1 + \text{مفر س}_2 + \text{مفر س}_3 + \text{مفر ف}_1 + \text{مفر ف}_2 + \text{مفر ف}_3 + \text{مفر ف}_4 + \text{ف}_1 + \text{ف}_2$$

ومن هذه الدالة يتضح ان كل المتغيرات معاملها في دالة الهدف للاولوية الثانية مفر ماعدا متفيسر

الانحراف الموجب  $f_p^+$  ، لذلك سنجد ان معاملات المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئي عند الاولوية الثانية كلها مساوية للصفر .

أما جسم الجدول والذي يبين معاملات القيود فقد تم اعداده كأي نوع من مشاكل البرامج الخطية .

### ثانيا : تجسيد تعدد الأهداف :

ان التعديل الجوهرى الذى يتحتم اجراؤه على جدول السمبلكس التقليدى انما هو انعكاس لتعدد الأهداف فى مشاكل برمجة الأهداف ، ونظرا لان المشكلة التى نعالجها الآن تتضمن هدفين ، لذا ينبغى ان يأتى الجدول انعكاسا وتجسيدا لهذين الهدفين ، وهذا يتطلب ويفرض ضرورة تقسيم الجزء الاسفل من الجدول الى عدد من الاقسام وفقا لعدد الأهداف الموجودة بالمشكلة ، ولذلك فقد تم تقسيم الجزء الاسفل من الجدول المبدئي السابق الى قسمين ، يمثل كل منهما هدفا معينا ، أما ترتيب وضع تلك الأهداف فى الاقسام المخصصة لها فانه يتمشى مع الترتيب التصاعدي لمستوى الاولوية ، فاقبل الأهداف أولوية يوضع فى أول قسم ، ثم الذى يليه فى الاولوية يوضع فى القسم الثانى وهكذا .

وفى كل جزء من الاجزاء المخصصة لمستوى الاولويات يجرى تقسيمه افقيا الى ثلاثة صفوف ، أولهما يخص لارباح الداخلة ، والثانى يمثل التكاليف الداخلة ، أما الصف الثالث والاخير فيخصص لعمالى التغير . وبطبيعة الحال هذه التقسيمات بهذا الشكل تخالف شكل الجدول الذى يعد لمعالجة مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف والذى كان يوضع به صف الارباح الداخلة فى قمة الجدول ، أما فى مشاكل برمجة الأهداف ، فان الارباح الداخلة تشكل مع التكاليف الداخلة وقيم عمالى التغير مجموعة واحدة لكل

مستوى اولوية وتوضع فى الجزء الاسفل من الجدول .

والسؤال المطروح الآن : ماهي قيم الارباح الداخلة التى سيتم تسجيلها عند كل مستوى من مستويات الاولوية الموضوعه ؟ للإجابة على ذلك نقول ان قيم الارباح الداخلة هي ببساطة معاملات دالة الهدف لكل متغير عند مستوى الاولوية المخصص ، فبالنسبة لمستوى الاولوية (ل<sub>١</sub>) نجد ان الارباح الداخلة الوحيدة غير الصفرية هي المقابلة للمتغير ف<sub>١</sub><sup>-</sup> ( هدف الربح غير المحقق ) ، وعند مستوى الاولوية الثانية (ل<sub>٢</sub>) فان الارباح الداخلة الوحيدة غير الصفرية هي المقابلة للمتغير ف<sub>٢</sub><sup>+</sup> (التجاوز أو المبالغة فى مستوى المخزون) ، أو بشكل أبسط قيم قراءة دالة الهدف الواردة بالصياغة الرياضية لمشكلة برمجة الاهداف ، وتكون متغيرات الانحراف الواردة بها هي فقط المتغيرات التى لها معامل بدالة الهدف كأرباح داخلة وفقا للأولوية المحددة وماعدا ذلك من متغيرات فان أرباحها الداخلة صفرية لأنها لم تدخل فى دالة الهدف بالصياغة الرياضية . ولذلك سيتم كتابة رقم ١ بصف الارباح الداخلة عند الاولوية الثانية وتحت عمود المتغير ف<sub>٢</sub><sup>+</sup> وبقى معاملات الصف تكون صفرا ، كذلك نضع رقم ١ فى صف الارباح الداخلة عند مستوى الاولوية الاولى واسفل عمود المتغير ف<sub>١</sub><sup>-</sup> وبقى معاملات الصف تكون صفرا .

### ثالثا : حساب قيم صف التكاليف الداخلة :

يتم حساب قيم صف التكاليف الداخلة بالأسلوب العادى المتبع بطريقة السمبلكس ، أى هي مجموع حواصل ضرب المعاملات الواردة بكل عمود فى القيم المقابلة لها بعمود معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ، ويكون حاصل الضرب هو بمثابة التكلفة الداخلة لذلك العمود ، مع ملاحظة ان يتم ذلك عند كل مستوى اولوية . فمثلا التكلفة

الداخلية لعمود المتغير  $s_1$  عند مستوى الأولوية الأولى  
يتم حسابها كآتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية عند $s_1$			
صفر			
١			
صفر			

$s_1$	
٢	$\times$
١٥	$\times$
١	$\times$

صفر =	
١٥ =	
صفر =	

١٥ التكلفة الداخلية

وكذلك يتم حساب التكلفة الداخلية للمتغير  $s_1$  عند مستوى  
الأولوية الثانية بنفس الطريقة كآتي :

معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية عند $s_2$			
صفر			
صفر			
صفر			

$s_2$	
٢	$\times$
١٥	$\times$
١	$\times$

صفر =	
صفر =	
صفر =	

صفر التكلفة الداخلية

رابعاً : حساب قيم صف صافي التغير :

ويتم حساب قيم صف صافي التغير لكل مستوى أولوية  
بالطريقة المعتادة أي بطرح قيم التكاليف الداخلية من قيم  
الأرباح الداخلية بالنسبة لكل متغير من متغيرات الصياغة  
الرياضية للمشكلة ، فمثلاً بالنسبة للمتغير  $(s_1)$  وعند  
مستوى أولوية  $(s_1)$  تكون قيمة صف صافي التغير كآتي :

صافي التغير = الأرباح الداخلية - التكاليف الداخلية

$$= \text{صفر} - ١٥ = - ١٥$$



وعند مستوى اولوية ( ل<sub>١</sub> ) تكون قيمة صافي التغيير كالاتي :

$$\text{صافي التغيير} = \text{مفر} - \text{مفر} = \text{مفر}$$

ونذكر القارئ في هذا الجزء بأن قيم صافي التغيير تمثل التأثير على دالة الهدف لكل مستوى اولوية ، والذي ينتج عن زيادة وحدة واحدة في قيم المتغيرات ، فزيادة وحدة واحدة من المتغير س<sub>١</sub> ستؤدي الى تخفيض قيمة هدف الاولوية الاولى بمقدار ١٥ ، في حين ان نفس تلك الزيادة لن يكون لها أي اثر على قيمة هدف الاولوية الثانية .

خامسا : حساب قيمة دالة الهدف للحل المبدئي :

ويمكن حساب وايجاد القيمة الجارية أو الحالية لدالة الهدف عند كل مستوى اولوية ايضا بالطريقة المعتادة ، أي بضرب قيمة كل متغير أساسي x معامل الهدف المقابل لذلك المتغير عند الاولوية المحددة ومن ثم جمع ناتج الضرب فيكون هو قيمة دالة الهدف عند تلك الاولوية ، فبالنسبة للأولوية الاولى ( ل<sub>١</sub> ) يمكن حساب قيمة دالة الهدف من واقع بيانات الجدول المبدئي وذلك كالاتي :

القيم		معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية ل <sub>١</sub>	
مفر	=	٧٢٠٠	x
٧٠٠٠٠	=	٧٠٠٠٠	x
مفر	=	٥٠٠٠	x

$$\text{قيمة دالة هدف ( ل<sub>١</sub> )} = ٧٠٠٠٠$$

وبالنسبة لمستوى الاولوية (ل<sub>٢</sub>) تكون قيمة دالة الهدف كالاتي :

القيم		معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية ل <sub>٢</sub>
مفر = ٧٢٠٠	x	مفر
مفر = ٧٠٠٠٠	x	مفر
مفر = ٥٠٠٠	x	مفر
قيمة دالة هدف ( ل <sub>٢</sub> )		
مفر		

والى هذا الحد نكون قد استكملنا كافة البيانات والمعلومات للجدول المبدئي ، وقد يكون من المفيد جدا ان نعلق على مغزى النتائج التى يظهرها الجدول المبدئي اذ مامعنى ان قيمة دالة الهدف للاولوية الاولى ٧٠.٠٠٠ جنيه ؟ ، ان ذلك يعنى ان الحل الوارد بالجدول المبدئي ينحرف عن هذه الاولوية بمقدار ٧٠.٠٠٠ جنيه ، او بمعنى آخر يبلغ الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الاولى ( الربح ) بما يعادل ٧٠.٠٠٠ جنيه ، وهذا بطبيعة الحال امر منطقي ، وذلك لان جدول الحل المبدئي يمثل حالة عدم الانتاج ، أي أن قيمة س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> وهي المتغيرات القرارية مساوية للصفر . وطالما ان الامر كذلك فانه لا ارباح محققة ، أي ان الارباح المستهدفة كأولوية اولى مقدارها ٧٠.٠٠٠ جنيه ، فى حين ان الحل المبدئي يحقق ارباحا محققة مقدارها صفر ، أي ان نتائج الحل الحالي تنحرف انحرافا غير مرغوب فيه عن المستهدف بما مقداره ٧٠.٠٠٠ جنيه .

ومن ناحية اخرى فان حالة عدم الانتاج التـي يمثلها جدول الحل المبدئي يعنى ان قيمة كل س<sub>١</sub> المتغيرات القرارية س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> مساوية للصفر . ومن ثم فلا يوجد انتاج للتخزين ، أي أن هدف الاولوية الثانية

مستوفي تماما دون انحراف غير مرغوب فيه وذلك لأن قيد هدف التخزين سبق ان تم صياغته كآلاتي :

$$s_1 + s_2 \geq 5000$$

ولهذا السبب سنجد أن قيمة دالة الهدف للأولوية الثانية مقدارها صفر ، أي لا يوجد انحراف غير مرغوب فيه في تحقيق هدف التخزين كأولوية ثانية .

#### سادسا : اختبار مثالية الحل :

ان اختبار مثالية الحل والذي سبق اتباعه في نماذج البرمجة الخطية سيتم ادخال بعض التعديل عليه ليتلاءم مع نموذج برمجة الاهداف من حيث تعدد الاهداف وأولويتها ، ولقد سبق القول في اختبار مثالية الحل في مشاكل البرمجة الخطية في الفصول المتقدمة انه اذا كانت المشكلة تمثل مشكلة تخفيض دالة الهدف ، اذن شرط الامثلية هو ان تكون كافة قيم صف صافي التغير موجبة أو صفرية ، اذ ان غياب القيم السالبة بصف صافي التغير يعنى ان الانحرافات غير المرغوب فيها لا يمكن الاستمرار في تخفيضها اكثر من ذلك .

من ناحية أخرى فان الامثلية تشير الى انه عندما تكون بعض المتغيرات ذات قيمة صف صافي تغير سالبة ، قد يكون لها قيم صف صافي تغير موجبة ( غير صفرية ) عند مستويات الأولوية الأعلى وهذا بطبيعة الحال هو الوضع الأمثل بسبب هيكل أولويات الاهداف . فبرغم ان القيمة السالبة تعنى ان بعض متغيرات الانحراف للأولويات المنخفضة يمكن ان تنخفض اكثر مما عليه ، الا ان ذلك سيؤدي بالتالى الى زيادة انحرافات بعض أهداف الأولويات الأعلى . وتقيدها والتزامنا بأولويات الاهداف يمنعنا من عمل ذلك . وبمعنى أكثر وضوحا فاننا سنستمر في تحسين الحل وادخال متغيرات اساسية جديدة

للحل طالما كان في استطاعتنا تخفيض واحد أو أكثر من متغيرات الانحراف دون زيادة متغير انحراف الأولوية العليا .

وتلخيصا لما تقدم فانه لاختبار مثالية الحل فاننا ننظر الى صف صافي التغير لمستوى الأولوية الاعلى أولا ، فاذا تبين ان كل القيم موجبة او صفرية نكون قد وصلنا الى الحل الأمثل ، أما اذا ظهرت قيم صافي تغير عند هذا المستوى من الأولوية فيتعين الدخول في جولة تالية لتحسين الحل . وهنا يثار تساؤل وما هو موقف صافي التغير للأولويات الأدنى ؟ الا يمكن استخدامها للحكم على المثالية وتحسين الحل ؟ سيتم الاجابة على هذا التساؤل في حينه وعندما نواجه بهذا الموقف عند الحل .

وتطبيقا لقواعد اختبار المثالية التي اوضحناها في السطور المتقدمة ، يتضح من جدول الحل المبدئي أن هناك قيما سالبة للمتغيرات القرارية  $s_1$  ،  $s_2$  في صف صافي التغير بالنسبة لهدف الأولوية الأولى (ل<sub>1</sub>) . لذلك يمكن القول ان الحل الذي يقدمه الجدول المبدئي هو حل غير أمثل ويتعين السير في خطوات تحسين الحل التالية :

#### سابعاً : تحسين الحل :

ويتم اجراء تحسين الحل بنفس الخطوات المعتادة والتي سبق اتباعها عند التعرض لحل مشاكل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس ، والتي تتضمن اختيار المتغير الداخل ، وتعيين المتعين الخارج ، وتحديد المفتاح ، ثم اعداد جدول تحسين الحل ، وفيما يلي استعراض تلسك الخطوات بالتطبيق على جدول الحل المبدئي السابق .

#### (١) اختيار المتغير الداخل :

بعد ان تبين من اختبار مثالية الجدول المبدئي للحل انه في الامكان تحسين دالة هدف مستوى الأولوية الأولى



(ل) ، حيث انه يوجد اكثر من قيمة صافي تغير سالبة عند مستوى الاولوية الاولى . وكالمعتاد سيتم اختيار المتغير ذات اكبر قيمة صافي تغير باشارة سالبة ، طالما ان ذلك المتغير له قيمة صافي تغير صفرية عند أهداف الاولويات الاقل .

ومن الجدول المبدئي السابق ، يتضح ان كلا من المتغيرين  $S_1$  ،  $S_2$  لهما قيم صافي تغير سالبة عند مستوى الاولوية الاول (ل) ، وذلك يعنى ان كليهما يفيدان في تخفيض حجم الانحراف غير المرغوب لهدف الربح ، وحيث ان المتغير  $S_1$  هو الذى له قيمة صافي تغير باشارة سالبة تزيد عن قيمة صافي التغير للمتغير  $S_2$  ( $S_1 = -15$  ،  $S_2 = -10$ ) لذلك يتم اختيار  $S_1$  كمتغير داخل .

### (٢) تعيين المتغير الخارج :

أما المتغير الذى سيتم اختياره كمتغير خارج ، فسيتمتع في طريقة اختياره الطريقة ذاتها والتي سبق اتباعها في مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف . اذ سيتم حساب المعدلات عن طريق قسمة قيمة كل متغير اساسي في الجدول على المعامل الموجب المقابل بعمود المتغير الداخل ، ومن ثم يتم اختيار المتغير الذى يصل الى الصفر قبل غيره ، أي المتغير ذات أقل معدل كمتغير خارج ، ويلاحظ أننا اجرينا هذه العملية الحسابية على يسار الجدول المبدئي ووفقا لذلك سيكون المتغير الخارج هو المتغير  $S_3$  وسيحل محله المتغير الداخل  $S_1$  .

### (٣) تعيين العنصر المحوري (المفتاح) :

وسنجد من الجدول المبدئي ان العنصر المحوري (المفتاح) والذي يتحدد من تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل ، وهو الرقم (٢) والموضح بالجدول .



(٤) اعداد الجدول الثاني :

تتم كافة العمليات المطلوبة لتكوين الجدول الثاني طبقا لمنهج طريقة السمبلكس والتي تناولناها سابقا ، اذ يتم ايجاد القيم الجديدة للصف الرئيسي الجديد ( صف س<sub>١</sub> ) بقسمة كل المعاملات الموجبة بالصف القديم ( صف المتغير الخارج ) على العنصر المحورى ( المفتاح ) ، وكذلك يتم ايجاد القيم الجديدة لباقي الصفوف بنفس العمليات الحسابية التي تناولناها بالتفصيل فى حل مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف بالفعل الثاني . كذلك فان صف صافى التغير وكذلك قيم دالة الهدف فيتم حسابها وفقا لما اتبعناه عند اعداد الجدول السابق . وبعد اجراء كافة العمليات الحسابية المطلوبة سيظهر جدول الحل الثاني على الصورة التالية :



ويمكن ان نلاحظ من الحل الوارد بالجدول الثاني ( وهو جدول تحسين الحل ) انه بدخول المتغير  $s_1$  الى الحل كمتغير اساسي قد أدى الى انخفاض دالة هدف الاولوية الاولى (الربح) من ٧٠٠٠٠ الى ١٦٠٠٠ ( وهو انحراف غير مرغوب فيه بالنسبة لهدف الربح ) ، وفي نفس الوقت استمرت قيمة دالة هدف الاولوية الثانية مساوية للصفر ، ولكن ماهو تفسير تلك النتائج ؟ الجزء التالي يقدم تفسيراً لهذه النتائج لنقف على ما حدث عندما تم الانتقال من جدول الحل المبدئي الى الجدول الثاني .

من الجدول الثاني يتضح ان قيمة المتغير الاساسي (  $s_1$  ) هي ٣٦٠٠ وهذا يعنى انه وفقاً للحل الوارد بالجدول الثاني سيتم انتاج عدد ٣٦٠٠ وحدة من المنتج  $s_1$  ، وحيث ان هامش ربح الوحدة الواحدة منها هو ١٥ جنيه ، اذن انتاج هذه الكمية ستحقق ارباحاً مقدارها ٥٤٠٠٠ جنيه (  $٣٦٠٠ \times ١٥$  ) ، وهذا يعنى ان الانحراف عن هدف الربح سينخفض بمقدار ٥٤٠٠٠ جنيه عما كان عليه في الجدول المبدئي ( ٧٠٠٠٠ ) ، أي سيصبح الانحراف مقداره  $٧٠٠٠٠ - ٥٤٠٠٠ = ١٦٠٠٠$  جنيه ، ولذلك وجدنا ان الجدول الثاني يعطى قيمة دالة هدف الاولوية الاولى (الربح) مقدارها ١٦٠٠٠ جنيه .

من ناحية اخرى ، لماذا استمرت قيمة دالة هدف الاولوية الثانية مساوية للصفر كما كانت عليه في الجدول المبدئي ؟ للإجابة على ذلك نقول ان انتاج ٣٦٠٠ وحدة من  $s_1$  يعتبر أقل من الحد الاقصى لمستوى المخزون والمحدد بعدد ٥٠٠٠ وحدة من المنتجين، أي انه حتى الآن لاتوجد انحرافات غير مرغوب فيها بالنسبة لهدف الاولوية الثانية ، ولهذا السبب ظهرت قيمة دالة هدف الاولوية الثانية مساوية للصفر .

ولكن هل الجدول الثاني الذى توصلنا اليه يمثل

جدولا للحل الامثل أم يتعين العمل على تحسينه ؟ وفقنا لقاعدة الامثلية سنجد من فحص قيم صف صافي التغير عند الاولوية الثانية بالجدول الثاني ان هناك قيمة صافي تغير سالبة للمتغير  $s_3$  (  $-\frac{5}{4}$  ) ، وهذا يعنى ان هناك امكانية لتحسين الحل عن طريق تخفيض انحرافات هدف المستوى الاول ( الربح ) بمقدار ٢ جنيه (  $\frac{5}{4}$  ) لكل وحدة يتم انتاجها من  $s_3$  . لذلك يمكن تقرير ان الحل الذى يقدمه الجدول الثاني ليس هو الحل الامثل بعد ، ولكن يتعين السير لتحسينه ، ولهذا الغرض سيكون المتغير  $s_3$  هو المتغير الداخلى ( هو المتغير الوحيد الذى له قيمة صافي تغير سالبة عند الاولوية الاولى ) ، وتشير قيم العمليات الحسابية المستخدمة لتحديد المتغير الخارج ان المتغير الخارج هو (  $f_1$  ) لأنه ذات اقل خارج قسمة ، ونود ان نذكر القارئ هنا بأن المتغير  $f_1$  يمثل عدم التحقق للحد الاقصى لمستوى المخزون . لذلك فان انتاج  $s_3$  سيعمل على استغلال طاقة التخزين المتبقية .

#### (٥) اعداد الجدول الثالث :

ويتم اعداد الجدول الثالث بذات الاسلوب الذى اتبع في اعداد الجدولين السابقين ، وباتمام العمليات الحسابية المطلوبة لهذا الجدول كما هو معتاد سنعمل الى الجدول الثالث التالي :

## الجدول الثالث

المتغير الخارج							القيم	المتغيرات الأساسية	معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية	ل <sub>١</sub> ل <sub>٢</sub>
متغير داخل	ف <sub>٢</sub> +	ف <sub>٢</sub> -	ف <sub>١</sub> +	ف <sub>١</sub> -	ف <sub>٣</sub> +	ف <sub>٣</sub> -				
٢٢٠٠	١	١ -	مطر	مطر	١	١	٢٢٠٠	١	مطر	مطر
١٨٠٠	٥	٥ -	١ -	١	مطر	مطر	٩٠٠٠	١	مطر	١
	٢ -	٢	مطر	مطر	١ -	١	٢٨٠٠	٢	مطر	مطر
	١	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر		ل <sub>٢</sub>		دالة الهدف
	١	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر				مطر
	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر	مطر				دالة الهدف
	مطر	مطر	مطر	١	مطر	مطر				٩٠٠٠
	٥	٥ -	١ -	١	٥ -	٥ -				
	٥ -	٥	١	مطر	مطر	مطر				



ومن الجدول الثالث يمكن ان نقف على الملاحظات التالية :

\* ان هذا الجدول لا يمثل بعد الحل الأمثل، حيث انه مازالت توجد قيمة صافي تغير سالبة بالنسبة للاولوية الاولى عند المتغير ( ف  $^+$  ) ، ومن ثم فان اختيار هذا المتغير للدخول في جولة تالية للحل سيعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها لهدف الربح بمقدار ه جنيهاً عن كل وحدة تضاف من المتغير ( ف  $^+$  ) .

\* يلاحظ ايضاً ان قيمة صافي التغير في مستوى الاولوية الثانية للمتغير ( ف  $^+$  ) هو (١+)، وحيث ان هذا المتغير يمثل الانحراف غير المرغوب بالنسبة لهدف الاولوية الثانية ( هدف مستوى المخزون ) ، وهذا يعنى ان زيادة وحدة واحدة من ( ف  $^+$  ) سيؤدي الى زيادة قيمة دالة هدف الاولوية الثانية بمقدار (١) .

\* من البيندين الاول والثاني، نجد أن هناك موقفاً متناقضاً، ففي حين زيادة (ف $^+$ ) بمقدار وحدة واحدة يؤدي الى تخفيض ه وحدات من الانحراف غير المرغوب لهدف الاولوية الاولى (الربح)، نجد أنه في ذات الوقت يعمل على زيادة الانحرافات غير المرغوبة لهدف الاولوية الثانية بمقدار (١)، وهنا نتساءل ما هو التعريف الواجب حيال هذا التناقض؟ للإجابة على ذلك نقول ان برمجة الأهداف تقوم على قاعدة أساسية مؤداها : أي تحسين يمكن ان يؤدي الى تحسين في هدف مستوى الاولوية الاعلى فانه ينبغي اجراؤه بصرف النظر عن الاثر الذي سيحدثه على أهداف الاولويات الاقل . وتمشياً مع تلك القاعدة فاننا سنختار المتغير (ف $^+$ ) كمتغير داخل لتحسين الحل .

بالنظر الى المعدلات المحسوبة في اقصى يسار الجدول  
 نستنتج ان المتغير الخارج هو (  $F_1$  ) ، والواقع ان  
 اختيار المتغير (  $F_1$  ) كمتغير خارج يشير الى ان  
 هدف الربح كمستوى اولوية اولى سوف يتم الوفاء به  
 كاملا في الجدول التالي لأن خروج هذا المتغير  
 سيجعله يصبح متغيرا غير أساسي وبقيمة مقدارها  
 صفر ، وهذا يشير الى ان هدف الربح لم يعد في حالة  
 عدم تحقق وانه تحقق بكامله دون انحراف غير  
 مرغوب .

#### (٦) اعداد الجدول الرابع :

سيظهر جدول الحل الرابع على الشكل التالي :



ويتضح من هذا الجدول مايلي :

(١) ان قيمة دالة هدف مستوى الاولوية الاولى = صفر، وهذا يعنى ان هدف الاولوية الاولى قد تم تحقيقه بالكامل بدون أي انحراف غير مرغوب، ويمكن التأكد من ذلك بالنظر الى صف صافي التغير عند مستوى تلك الاولوية ، اذ سجد ان كل معاملات هذا الصف اما قيمة موجبة أو صفرية .

(٢) كذلك يتبين من الجدول ان هدف الاولوية الثانية لم يتم تحقيقه تماما وبالضبط ، اذ سجد أن قيمة دالة هدف تلك الاولوية ( ل<sub>٢</sub> ) مساوية للقيمة ١٨٠٠ ، وهذا يعنى ان الحل الذى يمثل الجدول الرابع سيتم وفقا له انتاج ١٨٠٠ وحدة زيادة عن مستوى الحد الاقصى للمخزون ، اذ وفقا لهذا الحل الموجود بالجدول سيتم انتاج عدد ٤٠٠ وحدة من س<sub>١</sub> ، ٦٤٠٠ وحدة من س<sub>٢</sub> اي أن اجمالى الانتاج ٦٨٠٠ وحدة وهذا الحجم من الانتاج يزيد بمقدار ١٨٠٠ وحدة عن مستوى المخزون المحدد بعدد ٥٠٠٠ وحدة . ( ٦٨٠٠ - ٥٠٠٠ = ١٨٠٠ ) .

(٣) من ناحية اخرى فانه بالنظر الى صف صافي التغير عند مستوى الاولوية الثانية (ل<sub>٢</sub>) ، سجد ان المتغير ( ف<sub>١</sub> ) له قيمة صافي تغير سالبة، فهل يمكن اختيار ( ف<sub>١</sub> ) كمتغير داخل حتى يمكن تخفيض الانحراف عن هدف الاولوية الثانية؟ حقيقة الامر أن اختيار المتغير ( ف<sub>١</sub> ) كمتغير داخل في جولة تالية للحل ، سيؤدي الى تخفيض الانحراف عن هدف الاولوية الثانية، ولكن قبل ان يتم هذا الاختيار علينا ان نتساءل عن ماهو أثر اختياره كمتغير داخل على دالة هدف الاولوية الاولى ؟ ان قيمة صافي التغير للمتغير ( ف<sub>١</sub> ) عند مستوى

الاولوية الاولى = (١+) ، وهذا يعنى ان ذلك المتغير كمتغير داخل في جولة تالية للحل سيؤدى الى وجود انحراف غير مرغوب فيه في هدف الاولوية الاولى ، وحيث ان القاعدة السابقة تقرر انسه لاينبغي ان يكون تحسين هدف الاولوية الادنى على حساب هدف الاولوية الاعلى ، لذلك فان الحل الذى يقدمه الجدول الرابع هو الحل الأمثل .

### مثال محلول :

تناولنا فى الجزء السابق شرحا وتطبيقا للاستلوب الذى يمكن من خلاله حل مشاكل البرمجة الخطية متعددة الاهداف والذى اطلقنا عليه اسلوب برمجة الاهداف ، وقد تناولنا عند تطبيق هذا الاسلوب مثالا مبسطا لتوضيح خطوات الاسلوب وفهم مغزاه ، ومن ثم يصبح من المفيد فى هذا الجزء ان نتناول مثالا اكثر تعقيدا وأكبر حجما ، ويتضمن تعددا فى اهدافه المتناقضة ، وقد يكون من الافضل لهذا الغرض ان نختار المثال الذى ورد قبل ذلك فى مستهل هذا الفصل والذى كان يصف مشكلة شركة انتاج اجهزة الفيديو بحجميه الكبير والصغير، وفيما يلي استعراض لهذا المثال ثم نعمل على صياغته وحله .

يحاول مدير الانتاج باحدى الشركات الانتاجية وضع جدولة لانتاج الاسبوع القادم من نوعين من منتجات الشركة ، النوع الاول يمثل جهاز فيديو حجم كبير وتعطى الوحدة منه هامش ربح مقداره مائة جنيه ، والنوع الثانى يمثل جهاز فيديو صغير الحجم وتعطى الوحدة منه هامش ربح مقداره ثمانون جنيها ، ويهدف مدير الانتاج الى تحديد المزيج الانتاجى الأمثل للاسبوع القادم ، علما بأنه قد تبين من المعلومات المتاحة بقسم التسويق أن هناك ارتباطات مع بعض العملاء يتعين الالتزام بهما وتتمثل في تسليمهم عدد ١٠٠ جهاز حجم كبير، وعدد ٢٠٠



جهاز حجم صغير فى نهاية الاسبوع القادم ، كذلك فان مدير الانتاج على بينة تامة من أن قوة العمل المتاحة لديه لاتزيد عدد ساعات التشغيل الاسبوعي لها عن ٦٠٠ ساعة عمل، وتحتاج النوعية الاولى من الاجهزة الى ثلاثة ساعات عمل لتجميعها ، وتحتاج النوعية الثانية الى ساعتين عمل فقط ، وتهدف الشركة الى تحقيق عدد من الاهداف ذات الاولويات المعينة وهي :

- هدف الاولوية الاولى : تحقيق ٢٠٠٠٠ جنيه ارباحا على الاقل .
- ، ، ، الثانية : انتاج ١٠٠ جهاز فيديو حجم كبير على الاقل .
- ، ، ، الثالثة : انتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الاقل .
- ، ، ، الرابعة : تجنب التشغيل لوقت اضافى (الساعات المتاحة ٦٠٠ ساعة عمل ) .

والمطلوب ايجاد حجم الانتاج الامثل فى ضوء المعلومات

السابقة .

الحل :

اولا : اعداد الصياغة الرياضية كمشكلة من مشاكل البرمجة الخطية .

بفرض ان  $x_1$  = عدد اجهزة الفيديو من الحجم الكبير والتي سيتم انتاجها .

وبفرض ان  $x_2$  = عدد اجهزة الفيديو من الحجم الصغير الذى سيتم انتاجها .

وبناء على ذلك يمكن صياغة الاهداف السابقة كالآتي :

$$20000 \leq 100x_1 + 80x_2 \quad (\text{هدف الربح})$$

$$100 \leq x_1 \quad (\text{هدف انتاج 100 جهاز حجم كبير})$$

$$200 \leq x_2 \quad (، ، ، 200 ، ، ، صغير)$$

$$600 \leq x_1 + 2x_2 \quad (، ، تجنب الوقت الاضافى)$$

وبعد اضافة متغيرات الانحراف السالبة والموجبة الى كل هدف من هذه الاهداف سنصل الى مجموعة المعادلات التالية :

$$١٠٠س١ + ٨٠س٢ + ف١^- - ف١^+ = ٢٠٠٠٠ \text{ (هدف الربح)}$$

$$١٠٠ = ف٢^- - ف٢^+ \text{ (انتاج ١٠٠ جهاز كبير)}$$

$$٢٠٠ = ف٣^- - ف٣^+ \text{ (انتاج ٢٠٠ جهاز صغير)}$$

$$٦٠٠ = ف٤^- - ف٤^+ + ٢س٢ + ٣س٣ \text{ (تجنب الوقت الاضافي)}$$

وحتى يمكن التوصل الى استكمال العمياعة الرياضية باعداد دالة الهدف فانه يتعين ان نقف على اتجاه كل هدف من هذه الاهداف الاربعة وذلك لنتمكن من تحديد تلك الانحرافات غير المرغوب فيها والتي سيتم تضمينها دالة الهدف لتخفيضها .

فمثلا هدف الاولوية الاولى يسعى الى تحقيق ارباح مقدارها ٢٠٠٠٠ جنيه على الاقل ، اذن الانحراف ( ف١^- ) وهو يمثل مقدار عدم التحقق لهدف الربح يعتبر بمثابة متغير انحراف غير مرغوب فيه .

كذلك الحال فان ( ف٢^- ) وهو المتغير الذى يمثل عدم تحقيق الحد الادنى لانتاج اجهزة الفيديو كبيرة الحجم يمثل ايضا متغير انحراف غير مرغوب فيه بالنسبة لهدف الاولوية الثانية .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الثالثة فانه لا يختلف عن هدف الاولوية الثانية ، اذ أن المتغير ( ف٣^- ) يمثل انحراف غير مرغوب فيه ، لانه المتغير الذى يشير الى مقدار عدم تحقيق الحد الادنى لانتاج اجهزة الفيديو صغيرة الحجم .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الرابعة والاخيرة وهو هدف تجنب الوقت الاضافى فان اتجاه قيد هذا الهدف يشير الى ان زيادة التحقق فى المستوى الموضوع لهذا الهدف يعتبر انحراف غير مرغوب فيه ، أى أن متغير الانحراف ( ف<sup>+</sup><sub>٤</sub> ) هو الانحراف الذى ينبغى العمل على تجنبه وفقا لمتطلبات الهدف الرابع .

وبصفة عامة يمكن القول أننا نريد أن نعمل على تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها وفقا لاولويات الاهداف الاربعة .

مما تقدم فان الصياغة الرياضية الكاملة للمشكلة التى يمثلها المثال الحالى كمسكلة برمجة اهداف ستكون على الصورة التالية :

دالة الهدف : تخفيض ف<sup>+</sup><sub>٤</sub> | نهاية مغرى ف<sup>-</sup><sub>١</sub> | نهاية مغرى ف<sup>-</sup><sub>٢</sub> |  
نهاية مغرى ف<sup>-</sup><sub>١</sub>

بشرط أن : ١٠٠س<sub>١</sub> + ٨٠س<sub>٢</sub> + ف<sup>-</sup><sub>١</sub> - ف<sup>+</sup><sub>١</sub> = ٢٠٠٠٠

١٠٠س<sub>١</sub> + ف<sup>-</sup><sub>٢</sub> - ف<sup>+</sup><sub>٢</sub> = ١٠٠

٢٠٠س<sub>٢</sub> + ف<sup>-</sup><sub>٣</sub> - ف<sup>+</sup><sub>٣</sub> = ٢٠٠

١٠٣س<sub>٣</sub> + ٢س<sub>٢</sub> + ف<sup>-</sup><sub>٤</sub> - ف<sup>+</sup><sub>٤</sub> = ٦٠٠

س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ، ف<sup>-</sup><sub>١</sub> ، ف<sup>+</sup><sub>١</sub> ، ف<sup>-</sup><sub>٢</sub> ، ف<sup>+</sup><sub>٢</sub> ، ف<sup>-</sup><sub>٣</sub> ، ف<sup>+</sup><sub>٣</sub> ، ف<sup>-</sup><sub>٤</sub> ، ف<sup>+</sup><sub>٤</sub> ≤ صفر

ثانيا : اعداد الجدول المبدئي للحل :

بعد اعداد الصياغة الرياضية تبدأ فى اعداد جدول الحل المبدئي ، ولمزيد من التوضيح سنقوم باعداده وفق خطوات سلسلة كالآتي :

(١) تخطيط هيكل الجدول بالصورة المعتادة لنموذج برمجة الاهداف مع ملاحظة أن هذا المثال يتضمن أربعة أهداف ، أي يتم تخطيط الجدول بحيث يتضمن الجزء الاسفل منه

أربعة اجزاء يخصص لكل اولوية جزء مبتدئين من اعلى  
بهدف الاولوية الادنى ( لـ ) ومتدرجين حتى الاولوية  
الاولى .

(٢) نبدأ في شغل عمود المتغيرات الأساسية، وهنا يثار تساؤل وماهي المتغيرات الأساسية بجدول الحل المبدئي؟ كما هو معروف فان الجدول المبدئي يفترض فيه أو هو أصلاً حل يمثل عدم الانتاج، أي ان المتغيرات القرارية في الجدول المبدئي (س، س<sub>١</sub>) ستكون متغيرات غير أساسية قيمة كل منها مساوية للصفر، كذلك فان حالة عدم الانتاج تعنى انه لايمكن تجاوز الاهداف الموضوعة للارباح وللانتاج، فمثلاً حالة عدم الانتاج تعنى انه لايمكن تجاوز الارباح المستهدفة لانه لن يكون هناك ارباح أصلاً، أي أن انحراف التجاوز لهدف الأولوية الأدنى (ف<sup>+</sup>) ستكون قيمته صفر، اذن هو متغير غير اساسي بجدول الحل المبدئي .

أي بصفة عامة يمكن القول أنه طالما ان المتغيرات القرارية فيمتها صفر (س<sub>١</sub>، س<sub>٢</sub>) وكذلك وكذلك متغيرات التجاوز بكل قيود الاهداف (ف<sup>+</sup>) قيمتها صفر ، اذن متغيرات عدم التجاوز (ف<sup>-</sup>) هي المتغيرات الاساسية بالجدول المبدئي، اذن ستكون المتغيرات الاساسية هي ف<sub>١</sub><sup>-</sup>، ف<sub>٢</sub><sup>-</sup>، ف<sub>٣</sub><sup>-</sup>، ف<sub>٤</sub><sup>-</sup> . أما قيمة كل متغير من هذه المتغيرات في الجدول المبدئي فستكون هي مقدار الجانب الايسر لكل قيد هدف توجد به هذه المتغيرات ، أي ان هذه القيم على الترتيب

٢٠٠٠٠ ، ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٦٠٠

(٣) تسجيل الارباح الداخلة عند مستوى كل اولوية وهذه يتم استخلاصها من دالة الهدف . فعند مستوى الاولوية الرابعة نجد ان دالة الهدف بها متغير واحد يخص الاولوية الرابعة وهو متغير الانحراف (ف<sup>+</sup>) لذلك تكون الارباح الداخلة صفر لكافة المتغيرات الموجودة

بالجدول ماعدا المتغير ( ف  $\frac{+}{4}$  ) فارباحه الداخلة هي (١) . وكذلك الحال بالنسبة لباقي الاولويات .

(٤) كذلك يتم تسجيل معاملات الهدف للمتغيرات الاساسية وفقا للاولويات ، ثم يتم حساب باقى القيم بالجدول والذى تظهر صورته على الشكل التالي :



[illegible]

ويمكن ان نستخلص من جدول الحل المبدئي السابق مايلي :

✱ ان هدف الاولوية الدنيا ( تجنب التشغيل لوقت اضافي ) مستوفي ومحقق تماما ( لاحظ ان دالة هدف الاولوية الرابعة تساوى صفرا )، وهذا بطبيعة الحال امر منطقي بالنسبة للحل الذي يمثله الجدول المبدئي والذي يمثل حالة عدم الانتاج على الاطلاق ، وطالما لا يوجد انتاج فان الوقت الاصلي المتاح بخط التجميع لم يستغل اطلاقا ، ومن ثم فلا حاجة اصلا للتشغيل لوقت اضافي . وهذا هو السبب في ان هدف الاولوية الرابعة محقق تماما بالجدول المبدئي .

✱ الملاحظة الثانية التي يمكن توضيحها ان دالة الهدف بالاولوية الثالثة تساوى مائة مائة ٢٠٠، وهذا يعنى ان جدول الحل المبدئي ، والذي يمثل عدم انتاج أي من المتغيرات القرارية سيترتب عليه عدم امكانية الوفاء بعدد ٢٠٠ فيديو مغير الحجم والتي تتم التعاقد عليها مع العملاء ، وكذلك الحال بالنسبة للاولوية الثانية .

✱ اما بالنسبة لهدف الاولوية الاولى والتي كانت تسعى الى تحقيق ارباح لاتقل عن ٢٠٠٠٠ جنيه ، فاننا سنلاحظ من الجدول المبدئي والذي يمثل حالة عدم الانتاج لأي من المتغيرات القرارية عدم تحقيق أي أرباح مطلقا نتيجة عدم الانتاج ، أي أن الانحراف غير المرغوب فيه بالنسبة لهدف الربح تمثل ٢٠٠٠٠ جنيه وهذا يمكن ملاحظته بوضوح عند دالة هدف الاولوية الاولى .

### ثالثا : اختبار مثالية جدول السمبلكس المبدئي :

كما سبق القول فانه يتم اختبار مثالية جداول حل نموذج برمجة الاهداف بذات الطريقة المتبعة في اختبار

مثالية جداول الحل لنموذج البرمجة الخطية، مع اختلاف واحد هو ان يكون التركيز على صف صافي التغير للاولوية الاعلى اولا . وبناء على ذلك فانه بالنظر الى صف صافي التغير عند الاولوية الاولى ، نجد ان هناك قيمتين سالبتين ، وهذا يعنى ان الحل الذى يقدمه الجدول المبدئي لا يمثل الحل الامثل وانه يحتاج الى التحسين وذلك تطبيقا للقاعدة التى ارسيناها فى البرمجة الخطية والتي كانت تنص على أنه " طالما وجد أن هناك ولو متغير واحد من كافة المتغيرات له قيمة صافي تغير سالبة ( بالنسبة لمشاكل التخفيض ) فان ذلك يعنى انه يمكن تحسين الحل عن طريق اختبار المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة في صف صافي التغير ليكون هو المتغير الداخلى " .

#### رابعاً : تحسين الحل :

بعد أن تبين ان الحل بالجدول المبدئي غير أمثل ويتعين تحسينه ، لذلك سنير فى اجراءات تحسين الحـلـ والتي تتمثل فى :

١- اختيار المتغير الداخلى : سيكون المتغير الداخلى هو المتغير ( س<sub>١</sub> ) لأنه المتغير ذات اكبر قيمة باشارة سالبة ( -١٠٠ ) فى صف صافي التغير عند الاولوية الاولى ( هدف الربح ) .

٢- تعيين المتغير الخارج : ولتحديد المتغير الخارج سنتبع ايضا نفس القاعدة التى طبقناها فى البرمجة الخطية وحيدة الهدف ، وهي ان المتغير الخارج يكون هو المتغير الاساسي الموجود بالقيـد الأكثر تحديداً للمتغير الداخلى ، أي هو المتغير ذات أقل خارج قسمة من قيم المتغيرات الاساسية على القيسـم المقابلة بعمود المتغير الداخلى . ويلاحظ انه قد تم تدوين العمليات الحسابية اللازمة لتعيين

المتغير الخارج على اقصى يسار الجدول المبدئي  
وسنجد ان اقل خارج قسمة يقابل المتغير الاساسي  
(  $F_2$  ) وعليه فهو المتغير الذى سيخرج من الحل  
ليحل محله المتغير الداخلى (  $S_1$  ) .

٣- تعيين العنصر المحورى ( المفتاح ) : وهو القيمة  
الواقعة عند تقاطع عمود التغير الداخلى مع صف  
المتغير الخارج أي انه القيمة (١) .

٤- بعد الانتهاء من اختيار المتغير الداخلى ، وتعيين  
المتغير الخارج ، وتحديد المفتاح ، نبدأ فى  
اعداد الجدول الثانى للحل .

#### خامسا : الجدول الثانى للحل :

كما سبق القول فان معظم عناصر الجدول الجديد  
سوف تكون هي نفسها تماما كما كانت بالجدول المبدئي ،  
ولهذا يتم اعداد هيكل الجدول وكتابة عناوين الاعمدة  
والصفوف دون انتظار حيث انه لن يدخل عليها أي تعديل  
كذلك يتم تسجيل صفوف الارباح الداخلة عند مستويات  
الاولويات المختلفة لانها لن تتغير ، يلى ذلك احداث  
التغيير المطلوب على المتغيرات الاساسية وفق ماتم  
بالخطوة الرابعة والقيام بالعمليات الحسابية المعتادة  
للانتقال من الجدول المبدئي الى الجدول الثانى . وبعد  
الانتهاء من هذه التعديلات والعمليات الحسابية سيظهر  
الجدول الثانى على الصورة التالية :







ومن الجدول الثاني يتضح مايلي :

- ١- ان هدف الاولوية الرابعة مستوفي ومحقق تماما دون أي انحراف غير مرغوب فيه ، وكذلك الحال بالنسبة لهدف الاولوية الثانية . ويرجع السبب في ذلك الى أن دخول المتغير القراري ( س<sub>١</sub> ) كتغير رئيسي في الجدول الثاني للحل وبقيمة مقدارها ١٠٠ وحدة ، يعنى انه سيتم انتاج ١٠٠ وحدة من أجهزة الفيديو كبيرة الحجم ، وحيث ان هدف الاولوية الثانية هو انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم على الاقل ، اذن هدف الاولوية الثانية تحقق بالكامل دون انحرافات غير مرغوب فيها - ومن ناحية أخرى فان انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم فعلاوة على انه يحقق هدف الاولوية الثانية ، فانه ايضا وفي نفس الوقت يحقق الاولوية الرابعة ، لأن انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم فقط يتطلب ٣٠٠ ساعة تجميع ( ١٠٠ x ٣ ساعة ) . وحيث ان طاقة التجميع المتاحة هي ٦٠٠ ساعة عمل ، فان ذلك يعنى ان هناك فائض في ساعات العمل مما يكون مبررا لعدم التشغيل الاضافي لهذا القسم ، لأنه من الامل لم يتم استغلال طاقته المتاحة بأكملها ، وهذا يعنى بالتبعية انه لا توجد انحرافات غير مرغوب فيها لهدف الاولوية وهذا هو الذى جعل الهدف الرابع مستوفي تماما .

- ٢- كذلك يلاحظ ان هدف الاولوية الثالثة لم يتحقق ، بل والاكثر من ذلك نجد ان مقدار الانحراف غير المرغوب فيه لذلك الهدف ظلت كما كانت عليه في الجدول المبدئي ، وهذا بطبيعة الحال أمر منطقي ، لأن جدول الحل الثاني يمثل انتاج أجهزة فيديو كبيرة الحجم فقط ( س<sub>١</sub> ) ، مما جعل الانحراف غير المرغوب فيه لذلك الهدف بنفس مقداره الذى كان عليه بجدول الحل المبدئي .

٣- والأمر الآخر الذي يستحق ان نشير اليه هو ان الحل الوارد بالجدول الثاني قد ادى الى تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الاولى (الربح) من ٢٠٠٠٠ جنيه ليكون فقط ١٠٠٠٠ جنيه، ويرجع السبب في هذا التخفيض الى الكمية التي ستنتج من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم والتي ستحقق أرباحا مقدارها ١٠٠٠٠ جنيه (١٠٠ x ١٠٠)، وحيث أن هدف الاولوية الاولى تحقيق ٢٠٠٠٠ جنيه على الأقل، اذن الانحراف عن الهدف مقداره (١٠٠٠٠-٢٠٠٠٠) ١٠٠٠٠ جنيه وهذا الرقم هو الذي يظهر كقيمة دالة هدف الاولوية الاولى بالجدول الثاني .

٤- بالنظر الى قيم صف صافي التغير عند الاولوية الاولى يتضح انه مازالت توجد قيما سالبة، ومعنى ذلك ان الجدول الثاني للحل لا يمثل بعد الحل الأمثل، ومن ثم سيتم تحسين الحل باختيار المتغير (ف<sub>٢</sub><sup>+</sup>) كمتغير داخل لانه ذات اكبر قيمة باشارة سالبة، ومن ثم يتم اعداد العمليات الحسابية لتحديد المتغير الخارج، الا اننا سنجد ان خارج القسمة الذي يحدد المتغير المرشح للخروج متساوى عند كل من المتغير (ف<sub>١</sub><sup>-</sup>)، والمتغير (ف<sub>٣</sub><sup>-</sup>) . أي ان هناك حالة تعدد في المتغيرات المرشحة للخروج، ولقد سبق بيان خطورة الاختيار العشوائي في هذه الحالة، ولذلك سيطبق قاعدة (تشارنز وكوبر) والتي سبق التعرض لها عند معالجة بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية. وبتطبيق هذه القاعدة سيكون المتغير الخارج هو (ف<sub>٢</sub><sup>-</sup>)، ومن ثم سيكون العنصر المحورى (المفتاح) هو القيمة (١٠) والواقعة عند تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل.

سادسا : الجدول الثالث للحل :

ويتم اعداد الجدول الثالث للحل وفق الخطوات المعتادة والتي اتبعت عند الانتقال من الجدول المبدئي الى الجدول الثاني .

وبعد اجراء التعديلات المطلوبة لتحسين الحل، وبعد استكمال العمليات الحسابية المطلوبة للانتقال من الجدول الثاني الى الجدول الثالث . سيظهر الجدول الثالث في صورته النهائية التالية :



ويمكن من خلال فحص وتحليل جدول السمبلكس الثالث أن نلاحظ الآتي :

١- تم تحقيق واستيفاء هدف الأولوية الأولى بالكامل، إذ أن قيمة دالة هدف الأولوية الأولى أصبحت في ذلك الجدول مامقداره صفر ، وهذا يعني أن الانحراف غير المرغوب فيه بهدف الأولوية الأولى قد تم التخلص منه تماما ، وعلى ذلك يمكن القول أن الجدول الثالث يقدم ارباحا مقدارها ٢٠٠٠٠ جنيه وهذا مايتطابق مع هدف الأولوية الأولى . ولتوضيح كيف أمكن تحقيق هدف الربح بالكامل ، نعود الى الجدول الثالث لنجد أن قيمة المتغير الاساسي ( س ) أصبحت ٢٠٠ وحدة ، وحيث ان هامش الربح للوحدة الواحدة ١٠٠ جنيه ، اذن الارباح المحققة من هذا الكم من الانتاج =  $200 \times 100 = 20000$  جنيه . وهذا يعني أن هدف الأولوية الأولى تحقق تماما .

٢- كذلك نلاحظ ان هدف الأولوية الثانية محقق أيضا بالكامل وبدون أي انحراف غير مرغوب فيه ، وذلك لأن معادلة هدف الأولوية الثانية كانت انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم على الاقل ، وهذا تم استيفاءه تماما ( وزيادة ) لأن قيمة المتغير الاساسي ( س ) في جدول الحل الثالث = ٢٠٠ وحدة ، ومعنى ذلك ان هناك انحرافا مرغوب فيه ( ف + ) قيمته ١٠٠ ، ويظهر ذلك من وضع ( ف + ) ضمن المتغيرات الاساسية وبقيمة مقدارها ١٠٠ .

٣- ان الهدف الوحيد الذي لم يتم تحقيقه بعد هو هدف الأولوية الثالثة ، حيث ان قيمة المتغيرات القرارية بالجدول الثالث هي : س = ٢٠٠ ، س = صفر ونظرا لأن هدف الأولوية الثالثة لم يتم تحقيقه بعد ، سنجد أن الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الثانية ( ف - ) ظهر كمتغير اساسي وبقيمة مقدارها ٢٠٠ .



- ٤- بالنظر الى صف صافي التغير عند مستوى الاولوية الاولى نجد أن قيم صافي التغير لكافة المتغيرات موجبه وصفرية ، وهذا يؤكد الاستيفاء الكامل لهدف الاولوية الاولى .
- ٥- بالنظر الى صف صافي التغير عند مستوى الاولوية الثانية نجد أن قيم صافي التغير لكافة المتغيرات موجبه وصفرية ، وهذا يؤكد بالتالي الاستيفاء الكامل لهدف الاولوية الثانية .
- ٦- بالنظر الى صف صافي التغير عند الاولوية الثالثة سنجد أن هناك قيمة واحدة سالبة ، وهذا يشير الى امكانية تحسين استيفاء وتحقيق مستوى الاولوية الثالثة ، فالمتغير ( س٣ ) له قيمة صافي تغير سالبة ( وهي القيمة السالبة الوحيدة بصف صافي التغير) عند الاولوية الثالثة ، اذ يمكن تحسين مستوى تحقيق هدف الاولوية الثالثة باختيار المتغير ( س٣ ) كمتغير داخل ، الا انه يجب علينا قبل أن نجزم باختيار المتغير س٣ كمتغير داخل ان ننظر أولا الى الاثر الذي يمكن ان يحققه هذا الاختيار على اهداف الاولوية الاولى والاولوية الثانية، ففي عمود س٣ سنجد أن ذلك المتغير له قيمة صفرية في صف صافي التغير عند الاولوية الاولى ، وهذا يعنى أن اختيار س٣ كمتغير داخل لن يؤثر على هدف الاولوية الاولى . اذن ليس هناك ما يمنع (من وجهة نظر الاولوية الأولى ) في اختياره كمتغير داخل ، كذلك سنجد قيمة صافي التغير لذلك المتغير عند الاولوية الثانية صفر أيضا ، وهذا يعنى كما سبق قوله ان اختيار س٣ كمتغير داخل لن يؤثر على هدف الاولوية الثانية .
- ٧- خلاصة القول ان اختيار المتغير س٣ كمتغير داخل في جولة تالية للحل لن يؤثر على هدف الاولوية

الاولى (والتي تحرص على عدم المساس بها لأنه تسم تحقيقها فعلا ) ، ولن يؤثر ايضا على هدف الاولوية الثانية ( التي نحرص ايضا على عدم المساس بها ) لأنه تم تحقيقها بالكامل ) ، وانما سيكون تأثيره فقط على هدف الاولوية الثالثة ، وهذا التأثير سيكون في صورة تخفيض في الانحراف غير المرغوب فيه لذلك الهدف ، فكل وحدة تضاف من  $S_1$  ستؤدي الى تخفيض دالة هدف مستوى الاولوية الثالثة بمقدار وحدة ، وهذا بطبيعة الحال أمر نسعى اليه كما سبق قوله ، وعلى ذلك سيحل هذا المتغير محل متغير الانحراف (  $F_1^+$  ) كما يتضح من العمليات الحسابية والمدونة بأقصى يسار الجدول السابق .

#### سابعا : الجدول الرابع للحل :

بعد القيام بالعمليات الحسابية المطلوبة لتحسين الحل الوارد بالجدول الثالث ، سيظهر الجدول الرابع للحل على الصورة التالية :



ويمكن ان نستخلص من الجدول الرابع الملاحظات التالية :

١- أمكن بالاضافة الى تحقيق هدف الاولوية الأولى ،  
والاولوية الثانية ، تخفيض الانحراف غير المرغوب  
فيه للأولوية الثالثة من ٢٠٠ كما ظهر بالجدول  
الثالث لتصبح ٧٥ فقط كما هو موضح بالجدول الرابع .

٢- ان قيم المتغيرات القرارية بالجدول الرابع هي :

$$س_٢ = ١٢٥ \text{ وحدة}$$

$$س_١ = ١٠٠ \text{ وحدة}$$

وهذا الحجم من الانتاج يعطى أرباحا مقدارها =  
 $١٠٠ \times ١٠٠ + ٨٠ \times ١٢٥ = ٢٠٠٠٠$  جنيه ، وبذلك  
فانه يكون هدف الربح ( هدف الاولوية الأولى ) قد تم  
تحقيقه تماما ودون انحراف غير مرغوب فيه (ف<sub>١</sub><sup>-</sup>) ،  
ولذلك تظهر قيمة ( ف<sub>١</sub><sup>-</sup> ) بالجدول الرابع مساوية  
للصفر .

كما ان هذا الحجم من الانتاج بالنسبة للمتغير  
القرارى س<sub>١</sub> يقى تماما بالأولوية الثانية وهي  
انتاج ١٠٠ وحدة من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم ،  
أي ان الانحراف غير المرغوب فيه بالنسبة للأولوية  
الثانية = صفر ، وأيضا الانحراف المرغوب فيه  
( ف<sub>٢</sub><sup>+</sup> ) يساوى صفر ، وكل ذلك مستخلص من  
المعلومات الواردة بالحل الذى يتضمنه الجدول  
الرابع .

أما بالنسبة لهدف الاولوية الثالثة والتسبي  
تقضى بانتاج ٢٠٠ جهاز فيديو حجم صغير على الأقل  
فاننا نجد أن قيمة المتغير القرارى س<sub>٣</sub> بالجدول  
الرابع = ١٢٥ وحدة ، أي ان هناك انحراف غير  
مرغوب فيه بالنسبة لهدف الاولوية الثالثة ( ف<sub>٣</sub><sup>-</sup> )  
مقداره =  $٢٠٠ - ١٢٥ = ٧٥$  وحدة ، ولذلك سنجد أن  
قيمة ( ف<sub>٣</sub><sup>-</sup> ) بالجدول الرابع ٧٥ وحدة وظهرت ضمن  
مجموعة المتغيرات الاساسية .



٣- بالنظر الى صف صافي التغير عند كل من الاولوية الاولى والثانية ، نجد أن كافة قيم المتغيرات اما موجبة أو صفرية ، وعليه فليس هناك اي تحسين يمكن ادخاله على دالة هدف كل من هاتين الاولويتين .

٤- وبالانتقال الى صف صافي التغير عند مستوى الاولوية الثالثة (ل٣) نجد أن هناك متغيرين لهما قيمة سالبة ، وحيث انه وفقا لمنهج السمبلكس يجب اختيار المتغير ذات اكبر قيمة بإشارة سالبة ( مشاكل التخفيض ) كمتغير داخل ، اذن يعنى ذلك انه وفقا لهذه القاعدة سيرشح المتغير (ف٣-) لأن قيمته في صف صافي التغير عند مستوى تلك الاولوية ( -  $\frac{1}{8}$  ) ، الا ان هناك وضعاً يمنعنا من ترشيح ( ف٣- ) ليدخل كمتغير داخل في جولة تالية للحل رغم انطباق القاعدة عليه ، وهذا الوضع يتمثل في اننا لو نظرنا الى قيمة صافي التغير لهذا المتغير ذاته ( ف٣- ) عند مستوى الاولوية (ل٣) سنجد انها ( ١+ ) وهذا يعنى اجمالاً ان زيادة وحدة واحدة من المتغير (ف٣-) سيؤدى الى تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الثالثة بما مقداره (  $\frac{1}{8}$  ) وحدة ، الا انه في ذات الوقت سيؤدى الى زيادة الانحراف غير المرغوب فيه بدالة هدف الاولوية الثانية بمقداره (١) وحدة . وحيث انه لا ينبغي ان نحقق هدف الاولوية الأدنى على حساب هدف الاولوية الأعلى لذلك سنرفض ترشيح المتغير ( ف٣- ) كمتغير داخل ونختار بدلاً منه المتغير ذات القيمة الاقل بإشارة سالبة في صف صافي التغير عند الاولوية الثالثة ، وهو المتغير ( ف٣+ ) لأن اختيار ذلك المتغير الداخل في جولة تالية للحل سيعمل على



تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الثالثة ، دون ان يؤدي ذلك الى ظهور انحراف غير مرغوب فيه فى اهداف الاولويات الاعلى كما هو الحال للمتغير ( ف<sup>-</sup> ) .

٥- وفقا للمناقشة السابقة اذن سيتم اختيار المتغير ( ف<sup>+</sup> ) كمتغير داخل فى جولة تالية للحل ، وسيكون المتغير الخارج هو المتغير ( ف<sup>-</sup> ) وفقا للعمليات الحسابية التى اوردناها بأقصى يسار الجدول الرابع ، وعلى ذلك سيكون العنصر المحورى (المفتاح) هى القيمة (  $\frac{2}{8}$  ) وهى القيمة الواقعة عند تقاطع صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخلى .

٦- بعد بناء هيكل الجدول الخامس وتدوين كافة بياناته وتسجيل العمليات الحسابية المختلفة الضرورية لايجاد تحسين للحل ، سيظهر الجدول الخامس للحل على الشكل التالى :

三、

[illegible]

三

ويتضح من الجدول الخامس للحل مايلي :

- ١- انه قد تم تحقيق هدف الاولوية الاولى وهـ هدف الاولوية الثانية بالكامل وبدون ظهور انحرافات غير مرغوب فيها ، الا انه بنظرة فاحصة سيتضح أن هدف الاولوية الاولى ( الربح ) قد بدأ في هذا الجدول ( الخامس ) ينحرف عن المستوى الموضوع ( ٢٠٠٠٠ جنيه ارباح ) ، وان هذا الانحراف في الاتجاه المرغوب فيه أي بزيادة الربح المحقق عن المستوى الموضوع . ويمكن توضيح ذلك من خلال قيم المتغيرات القرارية بالجدول السادس اذ ظهر كل من المتغير القراري س<sub>١</sub> كمتغير اساسي وبقيمة مقدارها ١٠٠ وحدة ، كذلك ظهر المتغير القراري س<sub>٢</sub> كمتغير اساسي وبقيمة مدارها ١٥٠ وحدة . وهذا الحجم من الانتاج سيحقق أرباحاً مقدارها :
$$٢٢٠٠٠ = ١٥٠ \times ٨٠ + ١٠٠ \times ١٠٠$$

وهذا القدر من الارباح يزيد عن مستوى هدف الربح الموضوع بمقدار ٢٠٠٠ جنيه ( ٢٢٠٠٠ - ٢٠٠٠ ) ، ولذلك نجد أن متغير انحراف التجاوز للاولوية الاولى ( ف<sub>١</sub> ) ظهر كمتغير اساسي وكانت قيمته ٢٠٠٠ جنيه .

- ٢- ان الانحراف غير المرغوب فيه بهدف الاولوية الثالث قد انخفضت بمقدار ٢٥ وحدة عما كانت عليه بالجدول الرابع .
- ٣- بالنظر الى صف صافي التغير عند كل من الاولوية الاولى ، والاولوية الثانية ، نجد انه لا توجد بينهما أي قيمة سالبة ، مما يشير الى الاستيفاء والتحقق الكامل لكليهما ، ومن ثم فليس هناك حاجة الى اجراء أي تحسين عليها .
- ٤- يتضح من خلال فحص قيم صف صافي التغير عند مستوى الاولوية الثالث ( ل<sub>٣</sub> ) وجود قيمتين سالبتيْن

احدهما تخص المتغير (  $f^-$  ) مقدارها (  $-\frac{12}{8}$  ) ،  
والقيمة الاخرى للمتغير (  $f^+$  ) مقدارها (  $-\frac{1}{4}$  ) ،  
ورغم ان قاعدة السبيلكس تنص على ان يكون  
المتغير صاحب اكبر قيمة باشارة سالبة هو  
المتغير الداخل ، الا اننا لن نطبق هذه القاعدة  
بصورة مطلقة ( لأن هناك تعدد فى الاهداف ) ، اذ  
ينبغي قبل تطبيقها ان نبحث عن الاثر المحتمل  
لاختيار هذا المتغير على دالة هدف الاولويات  
الاعلى ، فاختيار المتغير (  $f^-$  ) كمتغير داخل  
باعتباره ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فـي  
صافي التغير عند الاولوية الثالثة سيؤدى  
الى اثرين وانعكاسين فى آن واحد احدهما يعمل  
على تحسين دالة هدف الاولوية الثالثة ، والاثر  
الثاني وهو اثر سلبى على دالة هدف الاولوية  
الثانية ، لأن هذا المتغير له معامل موجب فـي  
صافي التغير للاولوية الثانية ، لذلك سيتم  
اختيار المتغير (  $f^+$  ) كمتغير داخل رغم انه  
لايعتبر ذات اكبر قيمة باشارة سالبة فى صافي  
التغير عند الاولوية الثالثة ، لأننا  
نؤكد مرة اخرى على تطبيق القاعدة التى تنص  
على الا يكون استيفاء هدف الاولوية الاقل على  
حساب الاولوية الاعلى .

هـ - يلاحظ القارئ من التعليقات التى نوردتها بعد  
كل جدول اننا لم نلتفت اطلاقا بفحص أو التعليق  
على هدف الاولوية الرابعة ، ولم نتعرض له حتى  
الآن من قريب أو بعيد ، فما هو السبب فى ذلك  
التناسى ؟ ان الاجابة على ذلك التساؤل سهلة  
وبسيطة . اذ اننا حتى اعداد الجدول الخامس  
مشغولين بالاولويات الاعلى من الاولوية الرابعة  
فما زلنا حتى الجدول الخامس نخفض من الانحراف

غير المرغوب للاولوية الثالثة وبعد ان ننتهي من ذلك نبدأ فى الاتجاه الى الاولوية الرابعة ، وهذا هو السبب وراء عدم التعامل حتى الآن مع هذه الاولوية الرابعة .

٦- وباختيار المتغير (  $F_1^+$  ) كمتغير داخل ، سيكون المتغير الخارج هو (  $F_3^-$  ) ويكون العنصر المحورى ( المفتاح ) هو القيمة (  $\frac{1}{p}$  ) . ومن ثم نقوم باعداد الجدول السادس . ويظهر على الصورة التالية بعد تمام كافة العمليات الحسابية المطولة له .





ويمكن ان نقف على مجموعة الحقائق التالية من تحليل بيانات الجدول السادس :

١- انه تم تحقيق واستيفاء كافة اهداف الاولويات الثلاثة الاولى بدون اى انحرافات غير مرغوب فيها .

٢- ان قيم صف صافى التغير عند مستوى الاولويات الثلاثة الاولى ( ل ١ ، ل ٢ ، ل ٣ ) جميعها قيم صفرية أو موجبة ، مما يعنى عدم امكانية اجراء أى تحسين على اهداف تلك الاولويات ، وبطبيعة الحال هذا شئ منطقي لانه تم استيفاؤها جميعا .

٣- بالنظر الى قيم صف صافى التغير عند الاولوية الرابعة سنلاحظ وجود قيمتين سالبتين ، احدهما لمتغير الانحراف ( ف٢ ) ، والاخرى لمتغير الانحراف ( ف٣ ) ، وهذا يعنى ان هناك امكانية لتخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الرابعة . ولكننا سبق ان ذكرنا انه لاينبغى ان يكون تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا على حساب هدف الاولوية العليا . عندئذ سنجد أنه لايمكن اجراء تحسين على هدف الاولوية الرابعة ، لأن اختيار المتغير ( ف٢ ) ، وهو اكبر قيمة باشارة سالبة فى صف صافى التغير عند الاولوية الرابعة ، لانه وان كان سيعمل على تحسين هدف الاولوية الرابعة ، الا انه فى ذات الوقت سيضر بهدف الاولوية الثانية ، لأن قيمة هذا المتغير فى صف صافى التغير عند الاولوية الثانية ( ١+ ) ، كذلك الحال اذا تم اختيار المتغير ( ف٣ ) كمتغير داخل فانه وان كان سيؤدى فعلا الى تحسين هدف الاولوية الرابعة ، الا انه سيضر فى ذات الوقت بهدف الاولوية الثالثة لنفس السبب المشار اليه .

وبناء على التحليل السابق نقرر ان الجدول السادس هو جدول الحل الامثل وملخص نتائجه كالآتي :

### بالنسبة لهدف الاولوية الاولى :

تم استيفاء وتحقيق هدف الاولوية الاولى وبأكثر من المستوى الموضوع للهدف ، اذ تبلغ الأرباح المحققة وفق الحل الوارد بالجدول السادس :

$100 \times 100 + 200 \times 80 = 16000 + 10000 = 26000$  جنيه  
أي ان تجاوز فى الارباح بالزيادة مقدارها ٦٠٠٠ جنيه ،  
ولهذا السبب فقد ظهر متغير انحراف التجاوز ( ف<sup>+</sup> )  
كمتغير اساسي فى الحل الامثل وبقيمة مقدارها ٦٠٠٠ .

### بالنسبة لهدف الاولوية الثانية :

تم استيفاء وتحقيق هدف الاولوية الثانية بالكامل اذ يتبين من الجدول السادس ان عدد الوحدات المنتجة من اجهزة الفيديو كبيرة الحجم عدد ١٠٠ جهاز ( س<sub>١</sub> ) ، وعلى ذلك فان انحراف التجاوز لهذا الهدف ( ف<sup>+</sup> ) ظهر كممتغير غير اساسي قيمته صفر .

### وبالنسبة لهدف الاولوية الثالثة :

فقد تم ايضا استيفاء وتحقيق هدف الاولوية الثالثة بالكامل ، اذ يتضح من المتغيرات الاساسية الواردة بالجدول السادس ان عدد الوحدات المنتجة من اجهزة الفيديو صغير الحجم ( س<sub>٣</sub> ) عدد ٢٠٠ جهاز ، ولهذا فان انحراف التجاوز لهذا الهدف ( ف<sup>+</sup> ) ظهر كممتغير غير اساسي قيمته صفر .

### أما بالنسبة لهدف الاولوية الرابعة :

فلم يتم استيفاءه بالكامل ، اذ ان هناك انحراف غير مرغوب فيه لابد ان يماحب الحل ومقداره ١٠٠ ساعة عمل ، بمعنى انه لابد من التشغيل الاضافى لمدة ١٠٠ ساعة حتى يمكن تحقيق الاهداف الثلاثة ذات الاولوية العليا ، لذلك ظهر متغير الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية

الرابعة ( ف<sup>+</sup> ) كمتغير اساسي وقيمته ١٠٠ .

ولتأكيد ذلك نقول ان انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير ، و ١٠٠ جهاز فيديو صغير تحتاج الى وقت جميع كالاتي :  $٣ \times (١٠٠) + ٢ \times (٢٠٠) = ٣٠٠ + ٤٠٠ = ٧٠٠$  ساعة عمل علما بأن ماهو متاح من ساعات العمل ٦٠٠ ساعة فقط . اذن لابد من العمل ١٠٠ ساعة اضافية اذا كنا جادين في تحقيق أهداف الاولويات العليا تماما دون تجاوز غير مرغوب فيه .

تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الاهداف :

من المنطقي ان يكون تحليل حساسية نتائج حل نموذج برمجة الاهداف اكثر معوبة بالمقارنة بتحليل حساسية مشاكل البرمجة الخطية وحيدة الهدف ، وهذه المعوبة ناشئة بطبيعة الحال من تعدد اهداف مشكلة برمجة الاهداف واختلاف اولويات تلك الاهداف . وبرغم تلك المعوبة النسبية الا ان متابعة نتائج حل نموذج برمجة الاهداف بتحليل حساسيتها على درجة عالية من الأهمية ، وتعطى تفسيرات غاية في الأهمية ، وفهم عميق لما ستكون عليه النتائج في حالة تغير بعض عناصر المشكلة . وسوف نتناول باختصار تحليل حساسية التغيرات التالية :

اولا : تأثير المتغيرات في المستويات الاصلية

الموضوعة للاهداف .

ثانيا : تأثير التبادل النسبي الضمني بين الاهداف .

ثالثا : تأثير التغيرات في تسلسل اولوية الاهداف .

وفيما يلي نستعرض بالتفصيل كل عنصر من هذه

العناصر .

أولا : تأثير التغير في المستوى الموضوع للهدف :

لقد سبق القول في موضع متقدم من هذا الفصل، ان



نموذج برمجة الاهداف يعتبر بمثابة مدخل استيفاء أو تحقيق Satisficing Approach ، بمعنى انه نموذج يسعى الى استيفاء وتحقيق مستويات موضوعية ومحددة لكل هدف ، ووفقا لهذا الفهم فان هذا النموذج لايمكن اعتباره مدخل لتعظيم أو تخفيض الاهداف Maximize or minimize كما هو الحال في نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف ، ولذلك فان السؤال الاول الذى نواجهه عند تحليل الحساسية لنموذج برمجة الاهداف هو : ماهو اثر التغيرات التى يمكن ان تحدث فى المستويات الموضوعية لكل هدف ؟ وللإجابة على هذا التساؤل ،فانه يتعين ان يتم ذلك بشكل عملى حتى يتم توضيح الكيفية التى يتم بها معالجة هذا العنصر ،لذلك سنستعرض فيما يلى جدول الحل الامثل للمشكلة التى سبق ان قمنا بحلها فى مقدمة هذا الفصل ، وهى المشكلة التى تمثل حالة احدى الشركات تنتج نموذجين من السلع هما س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> هامش ربح الوحدة من النوعية الاولى كانت ٥٠جنيها ومن النوعية الثانية ١٠ جنيها ، وان الشركة المذكورة وضعت اهدافها كالاتي :

الهدف الاول : تحقيق ٧٠٠٠٠ جنيه ربح على الاقل (اولوية اولى ) .

الهدف الثانى: تحقيق مستوى مخزون لايزيد عن ٥٠٠٠ وحدة ( اولوية ثانية ) .

ويذكر القارىء اننا وضعنا تلك الاهداف فى صورة قيود تشابه القيود فى البرمجة الخطية مع اختلافين: ١- الاختلاف الاول يتمثل انه يتم فى نموذج برمجة الاهداف اضافة متغير انحراف عدم التحقق (ف-) الى قيد الهدف ، وهو يماثل المتغير الراكد بالبرمجة الخطية .

٢- الاختلاف الثانى هو انه يتم ايضا اضافة متغير



انحراف التجاوز ( ف<sup>+</sup> ) الى قيد الهدف ، وهو —  
يمثل المتغير المضاف بالبرمجة الخطية .

ومن ناحية اخرى فان المستويات الموضوعية لتلك  
الاهداف تشابه تماما قيم الجانب الايسر من القيود  
المعتادة بالبرامج الخطية .

ويذكر القارئ ايضا اننا قد ناقشنا في  
الفصل الثالث ( تحليل الحساسية ) كيفية استخدام  
وضع المتغيرات ( الاساسية وغير الاساسية ) وكذلك  
قيم الحل لكل من المتغيرات الراكدة والمضافة  
لتحديد اقصى زيادة واقصى انخفاض يمكن اجراؤه  
على معاملات الجانب الايسر من القيد الاصلى (أو  
ما كنا نطلق عليه طاقة القيد او المورد) والتي  
لاتؤدي الى تغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية  
بجدول الحل الاخير .

ويمكن القول بصفة عامة انه يمكن تطبيق نفس  
المراحل على متغيرات الانحراف في نموذج برمجة  
الاهداف وذلك لتحديد الحد الاقصى للزيادة ، وكذلك  
الحد الادنى للانخفاض في المستويات الاصلية  
الموضوعة للاهداف دون ان يغير ذلك من وضع  
المتغيرات الاساسية المثلى بجدول الحل الاخير .

خلاصة ما تقدم انه يلزم لدراسة أثر التغيرات التي  
يمكن ان تحدث في المستويات الموضوعية لكل هدف، ان نقوم  
بتحليل متغيرات الانحراف ( التحقق والتجاوز ) وفقا  
لصفتها في جدول الحل الاخير اي المتغيرات الانحرافية  
الاساسية وغير الاساسية . وقبل ان نقوم بهذا التحليل  
سنورد فيما يلي جدول الحل الاخير للمشكلة التي  
نعالجها الآن على سبيل المثال .



## (١) متغيرات الانحراف غير الأساسية :

## Nonbasic Devistional Variables

أ - وبالنظر الى متغيرات انحراف هدف الربح (الاولوية الاولى) وهى (  $F_1^-$  ) ، (  $F_1^+$  ) نجدها قد ظهرت في جدول الحل الاخير ( الحل الأمثل ) كمتغيرات غير اساسية ، حيث انها لم تظهر في عمود المتغيرات الاساسية ، ولقد سبق ان توصلنا في الفصل السابق الى الصيغة التى يمكن عن طريقها تحديد أقصى تغير مسموح به فى طاقات القيود بالنسبة لكل من المتغيرات الراكدة غير الاساسية ، والمتغيرات المضافة غير الاساسية ، وهاتان الصيغتان بعد تعديلهما لتتوافقا مع برمجة الاهداف سيكونا على الشكل التالي :

$$\left[ \begin{array}{c} \text{الحد الاقصى للتغير المسموح به فى مستوى الهدف لمتغير انحراف عدم التحقق غير الاساسي } F_1^- \text{ والمقابل للمتغير الاساسي } Q \\ \hline \text{قيمة المتغير الاساسي } Q \text{ فى الحل النهائي} \\ \hline \text{معامل القيود } Q \text{ للمتغير } F_1^- \text{ ع} \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{والمعادلة الثانية هي :} \\ \text{الحد الاقصى للتغير المسموح به فى مستوى الهدف لمتغير التجاوز غير الاساسي } F_1^+ \text{ والمقابل للمتغير الاساسي } Q \\ \hline \text{قيمة المتغير الاساسي } Q \text{ فى الحل النهائي} \\ \hline \text{معامل القيود } Q \text{ للمتغير } F_1^+ \text{ ع} \end{array} \right]$$

وحيث ان لكل هدف فى نموذج برمجة الاهداف متغير عدم تحقق (  $F_1^-$  ) ، ومتغير تجاوز (  $F_1^+$  ) . لذلك فان الحد الاقصى للتغيرات فى مستوى الهدف المعين ، لابد وان يتم حسابه لكل من نوعي الانحراف ( عدم التحقق ، والتجاوز ) . ولكن هنا يتبادر سؤال منطقي وهو ، أي الحدود المستخرجة

سيتم استخدامها ؟ هل سيتم استخدام حدود عدم التحقق ، او حدود التجاوز ؟ الحقيقة وكم سنرى انه لا يوجد اختلاف بينهما . اذ سنجد ان كلا المتغيرين سيعطى نفس الحدود .

فبالنسبة لمتغير عدم تحقق هدف الربح (  $F_1^-$  ) فانه سيتم حساب ثلاثة حدود له وذلك وفقا لعدد المتغيرات الاساسية الواردة بالجدول الأخير ، وباستخدام المعادلة الاولى سيتم حساب تلك الحدود كالآتي :

المتغيرات الاساسية	القيم	$F_1^-$
$s_1$	٤٠٠	$-\frac{1}{5}$
$F_1^+$	١٨٠٠	$-\frac{1}{5}$
$s_2$	٦٤٠٠	$-\frac{2}{5}$

$2000 = (\frac{1}{5} -) \div (400) -$   
 $9000 = (\frac{1}{5}) \div (1800) -$   
 $16000 = (\frac{2}{5}) \div (6400) -$

ومن هذه النتائج يتبين ان حدود التغير في المستوى الموضوع لهدف الربح هي زيادة مقدارها ٢٠٠٠ جنيه (الرقم الموجب الوحيد) في المستوى الموضوع ، أو تخفيض مقداره ٩٠٠٠ جنيه ( اقل رقم باشارة سالبة ) ، أى ان مستوى هدف الربح الاصلى يمكن ان ينخفض الى ٦١٠٠٠ جنيه (  $70000 - 9000$  ) ، أو يرتفع الى ٧٢٠٠٠ جنيه (  $70000 + 2000$  ) ، دون ان يؤثر ذلك على الوضع النهائي الامثل للمتغيرات الاساسية .

ويلاحظ ان تلك النتيجة التى توصلنا اليها يمكن ان نحصل عليها أيضا ، اذا ما استخدمنا متغير التجاوز (  $F_1^+$  ) ، ولاشبات ذلك سنستخدم فيما يلى صيغة المعادلة الثانية لتحديد حدود التغيرات كما يلى :

المتغيرات الاساسية	القيم	ف <sup>+</sup> <sub>١</sub>
س <sub>١</sub>	٤٠٠	$\frac{1}{5}$
ف <sup>+</sup> <sub>٢</sub>	١٨٠٠	$\frac{1}{5} -$
س <sub>٣</sub>	٦٤٠٠	$\frac{2}{5} -$

$٢٠٠٠ = (\frac{1}{5}) - (٤٠٠)$   
 $٩٠٠٠ = (\frac{1}{5}) - (١٨٠٠)$   
 $١٦٠٠٠ = (\frac{2}{5}) - (٦٤٠٠)$

وهى نفس النتائج التى توصلنا اليها من تطبيق  
المعادلة الاولى على متغير انحراف عدم التحقق  
( ف<sub>١</sub><sup>-</sup> ) .

ب - اما بالنسبة لهدف مستوى الحد الاقصى للمخزون والذى  
تم صياغته فى صورة انه لايجب ان يزيد مستوى  
المخزون من انتاج الشركة عن ٥٠٠٠ وحدة . ومن الجدول  
الاخير سنجد ان متغير انحراف عدم التحقق لهذا  
الهدف ( ف<sub>٢</sub><sup>-</sup> ) قد ظهر كمتغير غير اساسي فى الحل  
الامثل . فى حين ان متغير انحراف التجاوز ( ف<sub>٣</sub><sup>+</sup> ) ظهر  
كمتغير اساسي .

ولقد رأينا فى الجزء السابق كيف يستخدم متغير  
الانحراف غير الاساسي فى استنتاج حدود التغيرات فى  
مستوى الهدف الاولي . ولذلك سنقوم بتطبيق المعادلة  
الاولى بالنسبة لمتغير الانحراف غير الاساسي ( ف<sub>٢</sub><sup>-</sup> ) :

المتغيرات الاساسية	القيم	ف <sub>٢</sub> <sup>-</sup>
س <sub>١</sub>	٤٠٠	مفر
ف <sub>٢</sub> <sup>+</sup>	١٨٠٠	١ -
س <sub>٣</sub>	٦٤٠٠	مفر

غير محدد  
 $١٨٠٠ = (١ -) - (١٨٠٠) -$   
 غير محدد



وهذه النتائج تشير الى ان المستوى الموضوع لهدف الحد الاقصى للمخزون (٥٠٠٠ وحدة) يمكن ان يزيد بمقدار ١٨٠٠ وحدة ، او ينخفض بأي مقدار (الانخفاض غير محدد) دون ان يؤثر ذلك على الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية بجدول الحل الاخير، وعلى ذلك فان المستوى الموضوع لذلك الهدف يمكن ان ينخفض الى صفر أو يرتفع الى ٦٨٠٠ وحدة دون تغيير المزيج الامثل للمتغيرات الاساسية .

## (٢) متغيرات الانحراف الاساسية :

### Basic Deviation Variables

يتذكر القارئ اننا ذكرنا قبل ذلك في الفصل الثالث ان القيود التي يظهر متغيرها الراكد كمتغير اساسي في جدول الحل الاخير، يمكن لثابت هذا القيد (الجانب الايسر للقيد) ان يزيد بأي مقدار دون ان يؤثر ذلك على الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية ، وهذه القاعدة نفسها صحيحة بالنسبة لتخفيض القيود بالمتغيرات المضافة الاساسية ، والتغيرات في الاتجاه العكسي محدودة. بالقيمة الجارية للمتغير المضاف الاساسي، أو المتغير الراكد الاساسي في جدول الحل النهائي. وعلى ذلك فانه بالنسبة للمتغير الراكد الاساسي فانه يمكن ان ينخفض الجانب الايسر الاقصى للقيد ( ثابت القيد) بمقدار يعادل قيمته في جدول الحل الاخير ، وبالنسبة للمتغير المضاف الاساسي ، فان الجانب الايمن للقيد يمكن ان يزيد بأي مقدار يعادل قيمته في جدول الحل النهائي .

وحيث ان (  $F_j^*$  ) قد ظهر في جدول الحل الاخير كمتغير انحراف اساسي ( وهو متغير مضاف ) ، وقيمته في الحل الاخير هي ١٨٠٠ ، اذن يمكن القول ان

مستوى الحد الاقصى للمخزون يمكن ان يزيد بمقدار ١٨٠٠ وحدة او ان ينخفض بأي مقدار دون تغير الوضع الامثل للمتغيرات الاساسية بجدول الحل الاخير. وعلى العموم سواء كنا نقوم بحساب حدود التنفيس باستخدام متغيرات عدم التحقق أو متغيرات التجاوز فان الحدود المحسوبة للمتغيرات فى المستوى الموضوع للهدف ستكون واحدة فى الحالتين .

### ثانيا : التبادل النسبى بين الاهداف :

#### Relative Tradoffs among Goals

برغم ان برمجة الاهداف لاتحاول ان تجرى تبسداً بين الاهداف ، الا انه فى مقدورنا ان نحدد ضمنيا القيم النسبية لمختلف الاهداف عن طريق تحليل واختبار جدول الحل الاخير ، وذلك لانه سيعطى لمتخذ القرار قدرا كبيرا من المعلومات الهامة تعطيه مرونة فى اتخاذ القرار بناء على هذا الفهم .

ان التبادل النسبى بين الاهداف يعنى الوقوف على الاثر الذى سيتركه تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا على الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية العليا . لقد سبق ان ذكرنا انه يتعين الا يكون تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا على حساب ظهور انحراف غير مرغوب فيه لهدف الاولوية الاعلى . وهنا نريد ان نقف على حقيقة اثر تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الدنيا بمقدار وحدة واحدة على الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الاعلى .

بالنظر الى جدول الحل الاخير السابق ، سنرى ان الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الاولوية الثانية

هو ما مقداره ١٨٠٠ وحدة ، ويكون التساؤل هو :

الا يمكن تحسين هذا الوضع ؟ وبمعنى آخر الا يمكن تخفيض هذا الانحراف الى مقدار اقل ؟ الاجابة بأنه يمكن تخفيضه ، اذن كيف يتم ذلك ؟ ولماذا لم يتم ذلك ؟ اما كيف يتم ذلك فاننا لو نظرنا الى صف صافي التغير عند الاولوية الثانية سنجد انه في الامكان تحسين دالة هدف الاولوية الثانية عن طريق اختيار المتغير (  $F_1$  ) كمتغير داخل في جولة تالية للحل حيث ان له قيمة صافي تغيّر سالبة مما يعنى ان اختياره كمتغير داخل سيؤدي الى تحسين دالة الهدف اي تخفيض الانحراف في هذا الهدف الى مقدار اقل ، اما لماذا لم يتم ذلك ؟ فلقد سبق ان ذكرنا اننا لانقوم باجراء هذا التحسين لان قيمة صافي التغير لذلك التغير (  $F_1$  ) عند مستوى الاولوية هو (  $+1$  ) ، بمعنى انه اذا أصبح المتغير (  $F_1$  ) متغير اساسي ، فان القيمة التي سيأخذها ستعادل قيمة عدم تحقيق هدف الربح ذات الاولوية الاعلى ، ومعنى ذلك انه مقابل كل جنيه يفقد في هدف الربح تحصل على تخفيض مقداره (  $\frac{1}{8}$  ) في عدد الوحدات المنتجة زيادة عن مستوى الحد الاقصى للمخزون . او بمعنى آخر ، ان تخفيض عدد الوحدات المنتجة زيادة عن مستوى الحد الاقصى للمخزون بمقدار وحدة واحدة ، سيكون اثره بمثابة تخفيض في الارباح بمقدار ٥ جنيهات. لذلك يمكننا ان نقرر ان التبادل او التحويل الضمني بين الهدفين ( الربح - مستوى المخزون ) هو ٥ جنيهات تخفيض في الارباح مقابل كل وحدة زيادة في مستوى المخزون ، ولعل القارىء يمكن ان يستخلص مدى أهمية هذه المعلومات لمتخذ القرار في امساده بحقائق تمكنه من ان يتخذ القرار السليم ، فاذا كان مستعدا للتضحية بأرباح مقدارها ٩٠٠٠ جنيه

مقابل عدم زيادة حجم المخزون عن الهدف الموضوع  
فانه يمكن ذلك الا انه في هذه الحالة يكون قد  
اعطى لهدف المخزون اولوية اولى وهذا ماسنناقشه  
في الجزء التالي :

### ثالثا : التغييرات فى مراتب الاولويات :

#### Changes in Priority Rankings

قد تؤدي التغييرات فى مراتب اولويات مختلف  
الاهداف الى احداث تأثيرات هامة على الحل الأمثل  
الذى تم التوصل اليه قبل تلك التغييرات، ولذلك  
فان من مجالات تحليل واختبار الحساسية التي  
يتعين القيام بها فى مشاكل برمجة الاهداف هي  
اعادة ترتيب اولويات الاهداف لتحديد تأثير  
التغييرات فى مراتب الاولوية على الحل الأمثل .

فعلى سبيل المثال وجدنا فى المشكلة الحالية  
ان هناك هدفين يمثل هدف الربح الاولوية الاولى،  
ويمثل الحد الاقصى للمخزون الاولوية الثانية، وبفرض  
انه قد تم اعادة ترتيب تلك الاولويات، بأن أخذ  
هدف الحد الاقصى للمخزون مستوى الاولوية الاولى،  
عندئذ نتساءل هل اعادة ترتيب تلك الاولويات  
يحتاج الى اعادة حل المشكلة من مرة اخرى من  
بدايتها لأخذ هذه التغييرات فى الحسبان ؟ للإجابة  
على ذلك نقول انه برغم ان اعادة الحل من بدايته  
امر ممكن ، الا انه ليس من الضروري اجراؤه ، وان  
اختبار الحساسية كاف للوصول الى المعلومات التي  
نريدها ، وسنرى كيف يتحقق ذلك .

لقد تبين بكل وضوح ان الجدول الاخير الذى تم  
التوصل اليه لحل المشكلة الحالية يمثل الحل  
الأمثل ، وذلك لان اي محاولة لتحسين هدف المخزون  
سيكون حتى على حساب هدف الربح ، وعليه اذا تغيرت



اولويات هذه الاهداف ، فان هذا الجدول لن يكون هو جدول الحل الأمثل ، لأن هدف المخزون سيأخذ الآن اسبقية على هدف الربح .

وعلى ذلك اذا اعتبرنا ان هدف المخزون هو الذى يمثل هدف الاولوية الاولى ، وقمنا بتحسين الحل عن طريق ضم المتغير (  $F_1^-$  ) الى الحل باعتباره انه المتغير ذات القيمة السالبة الوحيدة بصف صافى التغير لهدف المخزون ، فسيكون المتغير الخارج في هذه الحالة هو المتغير (  $F_1^+$  ) ، وبعد اجراء التحسين سنصل الى جدول جديد يطابق تماما الجدول الثالث للحل لتلك المشكلة وفقا لمستوى الاولويات الاملية ، ويلاحظ ان ذلك الجدول الجديد هو الجدول الامثل بالنسبة لتغير درجات الاولوية .  
وسهكون صف صافى التغير لهدف الاولوية الاولى ( وهو الآن  $L_1$  ) كـ له قيمة صفرية او موجبة وهذا يشير الى عدم امكانية تحسينه عن طريق ضم المتغير (  $F_1^+$  ) الى مجموعة المتغيرات الاساسية ، الا أن إعادة ترتيب الاهداف يمنعنا من عمل ذلك ، لأن المتغير (  $F_1^+$  ) له قيمة صافى تغير مقدارها (١٤) في هدف الاولوية العليا الجديد (المخزون) .

ان هذا المثال البسيط قد أوضح بجلاء انه يمكن اختبار تأثير إعادة ترتيب اولويات الاهداف بقليل من العمليات الحسابية المطلوبة والتي قد لاتخرج عن اتمامها بمجرد النظر ، هذا على الرغم من الاهمية القصوى لذلك التحليل لرجال الادارة ومتخذي القرارات . اذ انه يتيح لهم حلا بديلة اكثر للاختيار من بينها . وبالنسبة لمثالنا الحالى سيكون امام الادارة بديلين يمكن الاختيار من بينهما وهما :



ترتيب الاولويات		قيم المتغيرات القرارية		مستوى تحقق الهدف	
اولى	ثانية	س <sub>١</sub>	س <sub>٢</sub>	الربح	المخزون
الربح	المخزون	٤٠٠	٦٤٠٠	٧٠٠٠٠	٦٨٠٠
المخزون	الربح	٢٢٠٠	٢٨٠٠	٦١٠٠٠	٥٠٠٠

حالة وجود اكثر من هدف له نفس الاولوية :

في بعض الاحيان نجد ان هناك اكثر من هدف من أهداف المشكلة يأخذ نفس مستوى الاولوية ، فمثلا بفرض انه في مشكلة شركة انتاج اجهزة الفيديو ، كان هدف الحد الادنى لانتاج اجهزة الفيديو كبيرة الحجم ، وهدف انتاج اجهزة الفيديو صغيرة الحجم ، يأخذان كليهما مستوى الاولوية الثانية ، أي ان ترتيب اولويات حالة تلك الشركة اصحت كالآتي :

هدف الاولوية الاولى : تحقيق ارباح لا تقل عن ٢٠٠٠٠ جنيه  
هدف الاولوية الثانية : انتاج ١٠٠ جهاز فيديو كبير الحجم على الاقل ، وانتاج ٢٠٠ جهاز فيديو صغير الحجم على الاقل .  
هدف الاولوية الثالثة : تجنب التشغيل لوقت اضافي .

ويمكننا ان نعالج مثل هذه الحالة بأسلوب برمجة الاهداف عن طريق تعيين متغيري الانحراف المقابلين لنفس مستوى الاولوية ، ومن ثم اضافة قيمة كل منهما الى دالة الهدف لذلك تكون دالة الهدف على الصورة التالية :

$$\text{تخفيض } F_1^+ \mid \text{نهاية مغرى } (F_2^- + F_3^-) \mid \text{نهاية مغرى } F_1^-$$

ومن هذه الدالة نلاحظ اننا قد اعطينا وزنا متساويا مقداره (١) لكل متغير انحراف عند مستوى

الاولوية الثانية . الا انه ليس من الضروري ان نعطي وزنا متعادلا بل يمكن لمزيد من الدقة ان نعطي اوزانا ترجيحية مختلفة لمتغيرات الانحراف تعكس الاهمية النسبية داخل الاولوية المعينة ، ان ذلك يعتبر ضروري خاصة اذا كانت المتغيرات مقاسة بوحدات غير متماثلة ( جنيهاً ، وحدات انتاج ، ساعات عمل ) ، وذلك كله بفرض تحقيق التكافؤ .

من ناحية اخرى قد يكون من المفضل استعمال اوزان للانحراف لتشير الى تلك المتغيرات التي ليس لها نفس التأثير . فمثلا اذا كانت الشركة قد رأت أن التقصير في تسليم اجهزة الفيديو كبيرة الحجم أكثر تأثيرا بمقدار ثلاث مرات عن التقصير في تسليم اجهزة الفيديو صغيرة الحجم ، فانه يمكن تضمين تلك النواحي في دالة الهدف كالآتي :

$$\text{تخفيض } F_4^+ \mid \text{نهاية مغرى } (F_3^- + F_4^-) \mid \text{نهاية مغرى } F_1^-$$

### اسئلة وتطبيقات على الفعل الرابع :

- ١- ماهي الحاجة الملحة التي أوجبت ظهور نموذج برمجة الاهداف ؟ وهل نموذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف لم يعد صالحا للتطبيق في معالجة المشاكل التي تواجه المشروعات ؟ .
- ٢- بماذا تفسر عدم التمكن من وجود حل ممكن لمشكلة ما من مشاكل البرمجة الخطية ؟ وماهو الاسلوب الذي يمكن الالتجاء اليه لعلاج هذه الحالة ؟
- ٣- قارن بين خطوات الحل بطريقة السمبلكس في حالة مشكلة وحيدة الهدف وأخرى متعددة الاهداف .
- ٤- علل " لماذا اذا تضمن جدول الحل الأمثل واحد أو أكثر من المتغيرات الاصطناعية في صورة متغير اساسي ، فان المشكلة على الصورة التي تم صياغتها عليها ليس لها حل أمثل .
- ٥- هل من الضروري ان يتم وضع أولويات للأهداف في حالة تعددها في نموذج برمجة الاهداف ؟ وماهو الاجراء الذي يتبع اذا تبين انها جميعا على نفس القدر من الأهمية ؟ .
- ٦- ماهو الفرق بين الهدف، والقيود ؟
- ٧- ماهو مفهومك لمصطلح انحراف التجاوز ، ومصطلح انحراف عدم التحقق ؟
- ٨- تقوم شركة القاهرة لصناعة الآلات الحاسبة بانتاج حاسبات للجيب ، وقد تمكنت من خلال تجاربها وابحاثها التوصل الى نموذجين من هذه الحاسبات يمتازان برخص اثمانهما ، وهي تفكر حاليا في انتاج هذه الحاسبات خاصة بعد ان تلقت طلبات من العملاء

للتوريد للاسبوع القادم . وقد واجه مدير التخطيط مشكلة تحديد كمية الانتاج من كل من هذين النموذجين في ضوء الاهداف والطاقات المحددة ، ولهذا الغرض تم تجميع البيانات التالية :

النموذج	هامش الربح	قسم التصنيع	قسم التجميع	رقائق الخشب
س <sub>١</sub>	٧	٣	٢	١
س <sub>٣</sub>	١٠	٢	٤	—

فاذا علمت ان الادارة العليا للشركة قد حددت أن تكون الخطة الموضوعية تستهدف الآتي :

هدف الاولوية الاولى : تحقيق ارباح مقدارها ١١٦ جنيه على الاقل في الاسبوع القادم .

هدف الاولوية الثانية : تجنب استخدام اكثر من ١٠ وحدات من رقائق الخشب .

هدف الاولوية الثالثة : انتاج ٨ وحدات على الاقل من النموذج س<sub>١</sub> .

هدف الاولوية الرابعة : تجنب استخدام اكثر من ٣٦ ساعة من قسم التصنيع .

هدف الاولوية الخامسة : تجنب استخدام اكثر من ٤٠ ساعة من قسم التجميع .

هدف الاولوية السادسة : انتاج ٧ وحدات على الاقل من النموذج س<sub>٣</sub> .

والمطلوب منك ايجاد المزيج الانتاجي الأمثل في ضوء الاهداف الموضوعية من قبل ادارة الشركة .

٩- بفرض ان احدى الشركات تقوم بانتاج منتجين وكل منتج منهما يمر بعمليتين انتاجيتين في قسمين ، وان طاقة هذين القسمين هي ٣٠ ساعة للقسم الاول ،

٦٠ ساعة للقسم الثاني يوميا ، وان كل وحدة من المنتج الاول تحتاج ٢ ساعة من القسم الاول و ٦ ساعات من القسم الثاني .

اما المنتج الثانى فان كل وحدة منه تحتاج الى ثلاث ساعات من القسم الانتاجي الاول ، و ٤ ساعات من القسم الانتاجي الثاني . والمطلوب ان تحدد للادارة المزيج الانتاجي الامثل فى ضوء الاهداف التى وضعتها الادارة مرتبة ترتيبا تنازليا كالاتي :

- أ - انتاج ١٠ وحدات على الاقل من المنتجين معا .
- ب - انتاج ٧ وحدات من المنتج الثاني على الاقل .
- ج - تجنب التشغيل الاضافى للقسم الاول .
- د - تجنب التشغيل الاضافى للقسم الثاني .
- هـ - انتاج ٤ وحدات على الاقل من المنتج الاول .





## الفصل الخامس

### طرق خاصة فى البرامج الخطية

- \* طريقه النقل .
- \* حالات خاصة لمشاكل النقل .
- \* مشكله التخصيص .



## مشكلة النقل

\* مقدمة

\* علاقة مشكلة النقل بالبرامج الخطية

\* طرق ايجاد الحل المبدئي الممكن :

\*\* طريقة الركن الشمالى الشرقى.

\*\* طريقة ادنى تكلفة فى الصف.

\*\* طريقة ادنى تكلفة فى العمود.

\*\* طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة.

\*\* طريقة فوجل التقريبية.

\*\* طريقة رسل التقريبية.

\* تحديد امثلية الحل :

\*\* طريقة نقطة الارتكاز.

\*\* طريقة التوزيع المعدل.

\* حالات خاصة لمشاكل النقل.

\* تطبيق طريقة النقل على مجالات ادارية اخرى.





## الفصل الخامس

### طريقه النقل

### The Transportation Method

تعتبر طريقة النقل احد مجالات التطبيق الهامة لاساليب البرمجة الخطية ، حيث أنها كباقي اساليب وطرق البرامج الخطية تتضمن مواقف تخصيص الموارد Resource Allocation ، فمشكلة النقل تتعلق بقرارات تخصيص أو تعيين الطريقة المثلى للانتقال المادى لكميات من السلع توجد فى نقاط معينة يطلق عليها نقاط التوريد او الامداد Supply Points ( من المصانع مثلا ) الى مواقع اخرى يطلق عليها نقاط الطلب Demand Points ( الى المخازن أو الى مناطق التوزيع ) وذلك بشرط ان تحمل التكلفة الكلية للنقل ادنى ما يمكن ، فتكاليف النقل من الأهمية بالنسبة للإدارة بحيث أن أي توفير فيها يعود على الشركة بأرباح طائلة .

وتكون المتغيرات القرارية فى ذلك النوع من المشاكل هى كمية السلع التى سيتم نقلها أو شحنها من كل نقطة توريد الى كل نقطة طلب ، ونقاط الامداد والتوريد هنا يمكن اعتبارها بمثابة المصنع أو مجموعة المصانع التى تتبع إدارة واحدة أى لها مركز رئيسي وتريد ان تقوم بنقل سلعها الجاهزة أو التامة الصنع على عدد من المخازن المحددة للتوزيع على مناطق الاستهلاك لتكون قادرة على تلبية طلبات العملاء والمستهلكون حال ظهورها ، وحيث ان عامل التكلفة فى الظروف العادية يمثل الاهمية الكبرى فى مثل هذه المواقف ، اذ يتطلب الامر ان يتم هذا النقل بأدنى تكلفة ممكنة ، ومشكلة القرار هنا ترجع الى أن

المخازن او المستودعات او نقاط الطلب يمكن تمويلها  
وسد احتياجاتها من اى مصنع من المصانع المتاحة ، اى  
ان هناك عدد من الحلول البديلة ، وكلما زادت المصانع  
والمخازن زادت بالتالى البدائل المختلفة لنقل  
الكميات المطلوبة للمخازن المختلفة بحيث تزداد صعوبة  
تقييم التكاليف المختلفة لهذه البدائل المتاحة .

خلاصة ماتقدم ان مشكلة النقل أو طريقة النقل  
ماهي الا نموذج رياضي تم تكوينه بشكل خاص مستهدفا  
تحديد البديل الامثل لنقل وتوزيع كميات معينة من  
ماهو متاح من مصادر التوريد الى مناطق استهلاك أو  
مستودعات تحتاج الى تمويلها بكميات معينة بحيث تصل  
تكلفة النقل الى حدها الادنى ، ومعنى ذلك ان العبرة  
ليست فقط سد احتياجات نقاط الطلب بما يحتاجه من  
كميات من السلع التامة لانه لو كان الامر كذلك ماكانت  
هناك مشكلة تحتاج الى حل ، ولكن ان يتم اشباع هذه  
الاحتياجات مما هو متاح بالمصانع شريطة ان تصل  
تكلفة النقل الناتجة من نقل تلك الكميات الى ادنى  
حد ممكن لها .

ويتطلب الامر حتى يمكن تطبيق نموذج النقل ان  
تكون المشكلة موضوع البحث تتوافر فيها بعض السمات  
او الخصائص ، بحيث اذا ماتوافرت تلك الخصائص يمكن  
القول انه يمكن حلها والتعامل معها بنموذج النقل ،  
اما اذا فقدت احد أو بعض تلك الخصائص يصبح من غير  
الممكن الاستفادة بنموذج النقل فى حل تلك المشكلة،  
ويتعين البحث عندئذ عن اسلوب آخر يمكن من خلاله  
التعامل مع هذه المشكلة . وتلك الخصائص هي :

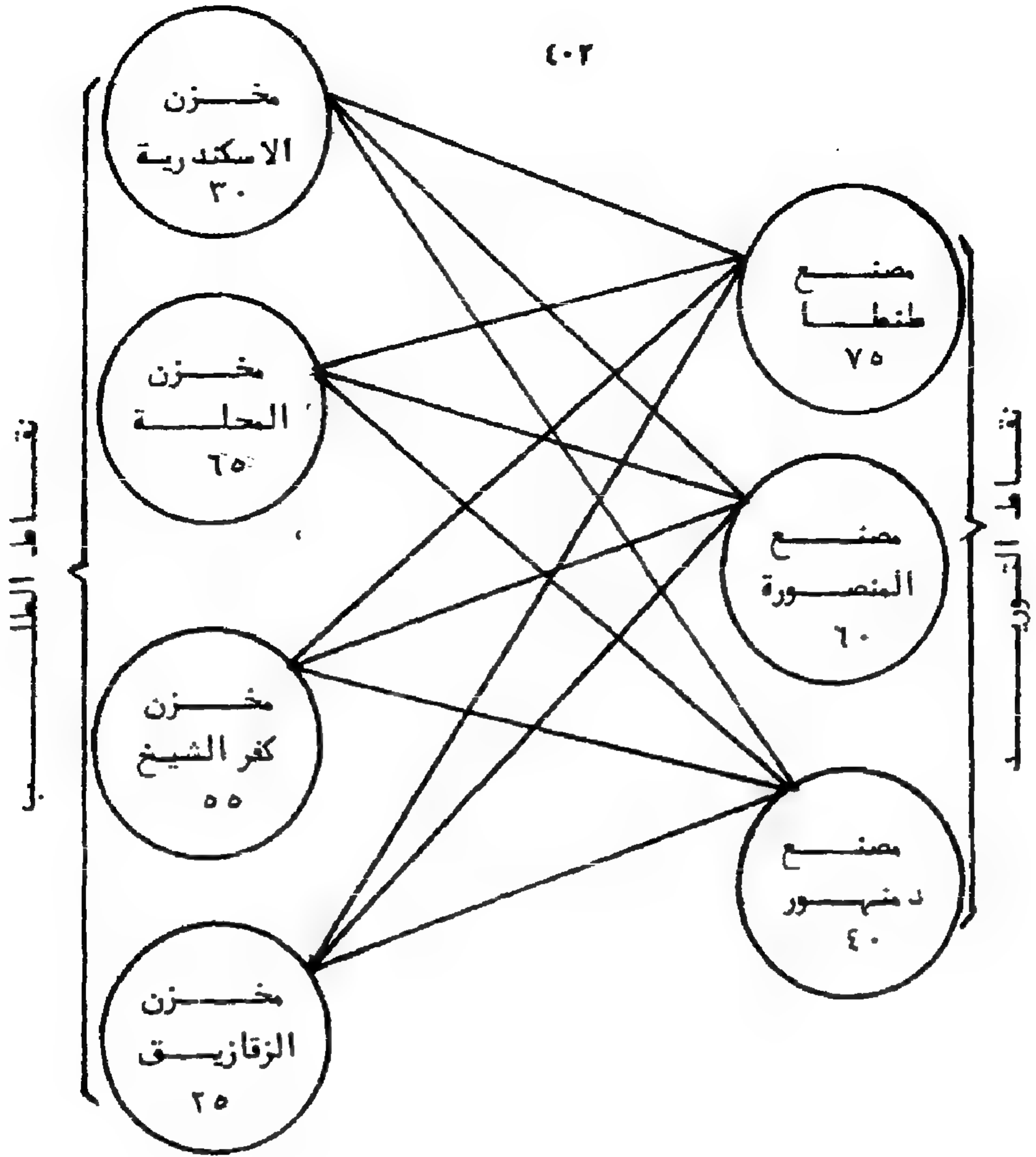
- ١- وجود عدة نقاط توريد ( مصانع مثلا ) ذات طاقات  
محددة ، ووجود عدة نقاط طلب (مخازن ، مناطق  
توزيع ) لها أيضا طاقات استيعابية محددة ،

ويتعين ان تكون طاقات نقاط التوريد وكذلك الطاقات الاستيعابية لمراكز الطلب معروفة ومقاسة كميا بوحدات طبيعية ( وحدات ، اوزان ) . وفي بعض الاحيان تكون الظروف التي تنشأ فيها المشكلة تتسم بأنها ظروف عدم تأكد ، اي ان الكميات المعروضة والمطلوبة غير محددة على وجه الدقة ، الا اننا نؤكد هنا ان هناك نماذج احتمالية تعالج مثل هذه المواقف وتحاول ان تقترب باستخدام الاساليب الاحصائية العلمية الى الحد الذي يصبح فيه تحديد تلك الكميات امرا ممكنا وبدرجة مناسبة من الدقة .

٢- توافر عدد من البدائل المتاحة ، أي ان هناك عددا من الطرق التي يمكن استخدامها لنقل شحن المنتجات من نقاط التوريد الى نقاط الطلب ، ويكون القرار الامثل هو الاختيار من بين هذه الطرق البديلة والمفاضلة بينها ليس بشكل جزئي كل على حده ولكن بشكل كلي يعمل على تدنية اجمالي تكلفة النقل للكميات كلها .

٣- لابد ان تتوافر وبشكل دقيق بيانات عن تكلفة النقل للوحدة من كل مركز توريد الى كل مركز طلب ، وان تتسم تلك التكلفة بالثبات ونعني هنا بالثبات ان تأخذ تكلفة النقل علاقة خطية مع الكمية المنقولة ، فاذا كانت تكلفة نقل الوحدة جنييه واحد فان نقل خمسون وحدة هو خمسون جنيها ونقل مائة وحدة هو مائة جنيه ، ذلك مانقصده بالثبات وهو في ذات الوقت العلاقة الخطية التي تعتبر شرطا لتطبيق طريقة النقل ( حيث انها تنتمي لنموذج البرمجة الخطية ) .

والشكل التالي يعمد الشروط التالية التي تعتبر العناصر والمتطلبات الاساسية لمشكلة النقل .



ويتبين من هذا الشكل أن هناك عدة مصادر توريد محددة الطاقات ، وعدة نقاط للطلب محددة الاحتياجات ، وعدة طرق نقل بديلة تختلف تكلفة النقل على كل منها بسبب تعدد وسائل النقل المتاحة واختلاف المسافات ، وعلى ذلك تصبح مشكلة القرار هي في تلبية متطلبات كل مخزن وفي حدود طاقة كل مصنع على أساس تخفيض التكاليف الكلية للنقل الى أدنى حد لها .

وحيث ان مشكلة النقل من الطرق الخاصة للبرامج الخطية ، اذن يمكن صياغتها على صورة شكل برمجة خطية ( سنرى كيف يمكن ذلك في جزء لاحق ) . وهنا قد يتبادر



الى ذهن القارئ تساؤل منطقي ، وهو طالما انه في الامكان صياغة مشكلة النقل على صورة مشكلة برمجية خطية ، فلماذا اذن نستخدم لحلها أسلوبا خاصا برغم امكانية ذلك بطرق البرمجة الخطية السابقة؟ الحقيقة انه وان كانت مشكلة النقل تندرج تحت طرق البرمجة الخطية ويتم صياغتها بذات الاسلوب المتبع في البرمجة الخطية ، الا أن لها من الخصائص والسمات مايمكننا من حلها بمنهج خاص يتلاءم مع تلك الخصائص والسمات اكثر ملاءمة من استخدام منهج السمبلكس ، وقد اصطلح على تسمية هذا المنهج الخاص بطريقة النقل ، وهذه الطريقة تعتبر سهلة وميسره وفعاله بما فيه الكفاية اذا ماقورنت بطريقة السمبلكس كما سنرى في جزء لاحق .

من ناحية اخرى فانه قد يعتقد البعض من المقدمة السابقة أن نموذج النقل لايجد له مكانا في التطبيق الا على تلك الحالات التي تمثل فعلا عملية انتقال مادي للسلع ويكون مطلوب في تلك الحالة العمل على الوصول بتكلفة النقل الاجمالية الى حدها الأدنى ، ان هذا الاعتقاد وذلك التصور نشأ بلاشك بسبب الاسم الذي يأخذه هذا النموذج ( نموذج النقل أو مشكلة النقل ) فالحقيقة ان هذا الاسم يعتبر خادع ومضلل Misleading الى حد ما ، حيث أن نوعيات المشاكل التي تطبق عليها طريقة النقل متنوعة ومتعددة جدا ، وليست مقصورة فقط كما يفهم من سماها على الانتقال المادي للسلع والبضائع . فهي مألحة للتطبيق وبنجاح تام على كثير من المشاكل المتنوعة مثل تخطيط الانتاج Production Planning ، وجدولة الآلات Machine Scheduling وتحليل المواقع Location Analysis وجدولة القوى العاملة Work Force Scheduling ، والعديد من نوعيات المشاكل الاخرى . وسوف نعالج في



نهاية هذا الجزء بعض امثلة من هذه المشاكل التي لا تمثل انتقالا ماديا للسلع والبضائع . أما عرضنا التالي فسنركزه على تلك المشاكل المتعلقة بالانتقال المادي للسلع والبضائع .

وبغرض توضيح مشكلة النقل وكيفية صياغتها كمشكلة برمجة خطية فإننا سنطرح المثال التالي الذي راعينا فيه التبسيط بغرض التوضيح .

مثال على مشكلة الانتقال المادي للسلع :

تنتج احدى الشركات الكبرى في جمهورية مصر العربية منتجا واحدا متماثلا في ثلاثة مصانع نوعية تقع جغرافيا في طنطا ، المنصورة ، دمهور ، وتبلغ طاقات المصانع الثلاثة في السنة القادمة من الوحدات المنتجة الكميات التالية ( بالالف وحدة ) ، ١٥٠ ، ١٢٠ ، ٨٠ على الترتيب .

ويتم نقل تلك الكميات الى مخازن التوزيع الاربعة التابعة للشركة ليتم تسليمها بعد ذلك الى العملاء ، وتبلغ احتياجات تلك المخازن الاربعة عن نفس السنة التخطيطية القادمة ما مقداره كالاتي ( بالالف وحدة ) :  
مخزن الاسكندرية ٦٠ ، مخزن المحلة ١٣٠ ، مخزن كفر الشيخ ١١٠ ، مخزن الزقازيق ٥٠ .

ولقد توفر للشركة المعلومات الكاملة والمتعلقة بتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع من المصانع الثلاثة ، الى كل مخزن من مخازن التوزيع الاربعة وكانت هذه التكلفة كما هو مبين من الجدول التالي :

المخزن / المصنع	تكلفة نقل الوحدة الى ( بالجنيهات )			
	الاسكندرية	المحلة	كفر الشيخ	الزقازيق
طنطا	٦	١٢	٤	٣
المنصورة	٨	١٥	٧	٨
دمنهـور	٣	١١	٢	٥

### والمطلوب :

ايـجاد جدول الشحن الامثل للفترة التخطيطية القادمة  
والذي يفي باحتياجات المخازن الاربعة من انتاج المصانع  
الثلاثة بحيث تعمل تكلفة النقل الى ادنى حد ممكن .

### الحل :

لقد سبق القول بأن مشكلة النقل (مثل الحالة التي  
امامنا الآن ) تعتبر نوعا خاصا من مشاكل البرمجة  
الخطية ، ولتوضيح ذلك سنحاول وضع المشكلة التي يمثلها  
هذا المثال في صياغة رياضية على غرار الصياغة  
الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية .

يتعين علينا أولا أن نحدد المتغيرات القرارية التي  
تتضمنها الصياغة الرياضية ، ان المتغيرات القرارية في  
مثالنا هذا تمثل كمية السلع الواجب شحنها من كل مصنع  
الى كل مخزن . وحيث ان كل مصنع يعتبر مورد محتمل  
للمخازن الاربعة ، وحيث انه يوجد ثلاثة مصانع ، لذلك  
فان عدد المتغيرات القرارية في هذه الحالة هي  $12 (4 \times 3)$  ،  
وهذا العدد يمثل طرق الشحن المحتملة أو المتغيرات  
القرارية . أي انه يمكن القول بصفة عامة أن عدد  
المتغيرات القرارية يعادل عدد نقاط الامداد والتوريد  
(المصانع ) مضروبا في عدد نقاط الطلب ( مخازن التوزيع ) .

والجدول التالي يوضح الرموز التي ستعبر عن تلك المتغيرات القرارية :

المخزن المصنع	الاسكندرية	المحلة	كفر الشيخ	الزقازيق	طاقة المصنع
طنطا	١١ <sup>س</sup>	٢١ <sup>س</sup>	٣١ <sup>س</sup>	٤١ <sup>س</sup>	١٥٠
المنصورة	١٢ <sup>س</sup>	٢٢ <sup>س</sup>	٣٢ <sup>س</sup>	٤٢ <sup>س</sup>	١٢٠
دمنهور	١٣ <sup>س</sup>	٢٣ <sup>س</sup>	٣٣ <sup>س</sup>	٤٣ <sup>س</sup>	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ ٣٥٠

ويلاحظ ان المتغير القراري اخذ رمزا ذو قيمة مزدوجة وذلك بسبب ان المتغير القراري في هذا النوع من المشاكل يمثل الكمية المنقولة من مصنع ما الى مخزن ما ، وعليه فاذا كنا نرمز للمتغير القراري بصفة عامة بالرمز الذي استخدمناه قبل ذلك وهو ( س ) ، اذن يتطلب الامر ان نذيل ذلك الرمز برقم مزدوج ليشير الى رقم المصنع ورقم المخزن ، فمثلا المتغير القراري ( س١١ ) يعبر عن الكمية التي سيتم شحنها من المصنع الاول (طنطا) الى المخزن الاول (الاسكندرية) ، كذلك يشير المتغير القراري ( س١٣ ) الى الكمية التي سيتم شحنها من المصنع الثاني (المنصورة) الى المخزن الاول (الاسكندرية) وهكذا .

وحيث ان هدف الشركة هو ان تعمل على نقل انتاج المصانع الثلاثة للوفاء باحتياجات المخازن الأربعة بحيث تعمل تكلفة النقل الاجمالية الى حدها الادنى أي ان دالة الهدف ستكون كالآتي :

دالة الهدف :

$$\text{تخفيض } 6 \text{ س} + 11 \text{ س} + 12 \text{ س} + 21 \text{ س} + 4 \text{ س} + 31 \text{ س} + 2 \text{ س} + 41 \text{ س} + 8 \text{ س} + 12 \text{ س} + 15 \text{ س} + 22 \text{ س} + 7 \text{ س} + 32 \text{ س} + 8 \text{ س} + 42 \text{ س} + 3 \text{ س} + 11 \text{ س} + 23 \text{ س} + 2 \text{ س} + 33 \text{ س} + 5 \text{ س} + 43 \text{ س}$$

أما القيود المفروضة على تلك الدالة فتتمثل في نوعين من القيود ، النوع الاول يتعلق بنقاط التوريد ، والآخر يتعلق بنقاط الطلب ، بخلاف شرط عدم السلبية ،

قيود نقاط التوريد :

$$\begin{aligned} 11 \text{ س} + 11 \text{ س} + 21 \text{ س} + 31 \text{ س} + 41 \text{ س} &\geq 150 \text{ (مصنع طنطا)} \\ 12 \text{ س} + 22 \text{ س} + 32 \text{ س} + 42 \text{ س} &\geq 120 \text{ (مصنع المنصورة)} \\ 13 \text{ س} + 23 \text{ س} + 33 \text{ س} + 43 \text{ س} &\geq 80 \text{ (مصنع دمنهور)} \end{aligned}$$

أما قيود نقاط الطلب :

$$\begin{aligned} 11 \text{ س} + 12 \text{ س} + 13 \text{ س} &\geq 60 \text{ (مخزن الاسكندرية)} \\ 21 \text{ س} + 22 \text{ س} + 23 \text{ س} &\geq 130 \text{ (مخزن المحلة)} \\ 31 \text{ س} + 32 \text{ س} + 33 \text{ س} &\geq 110 \text{ (مخزن كفر الشيخ)} \\ 41 \text{ س} + 42 \text{ س} + 43 \text{ س} &\geq 50 \text{ (مخزن الزقازيق)} \end{aligned}$$

شروط عدم السلبية :

$$\begin{aligned} 11 \text{ س} , 21 \text{ س} , 31 \text{ س} , 41 \text{ س} , 12 \text{ س} , 22 \text{ س} , 32 \text{ س} , 42 \text{ س} , \\ 13 \text{ س} , 23 \text{ س} , 33 \text{ س} , 43 \text{ س} \leq \text{صفر} \end{aligned}$$

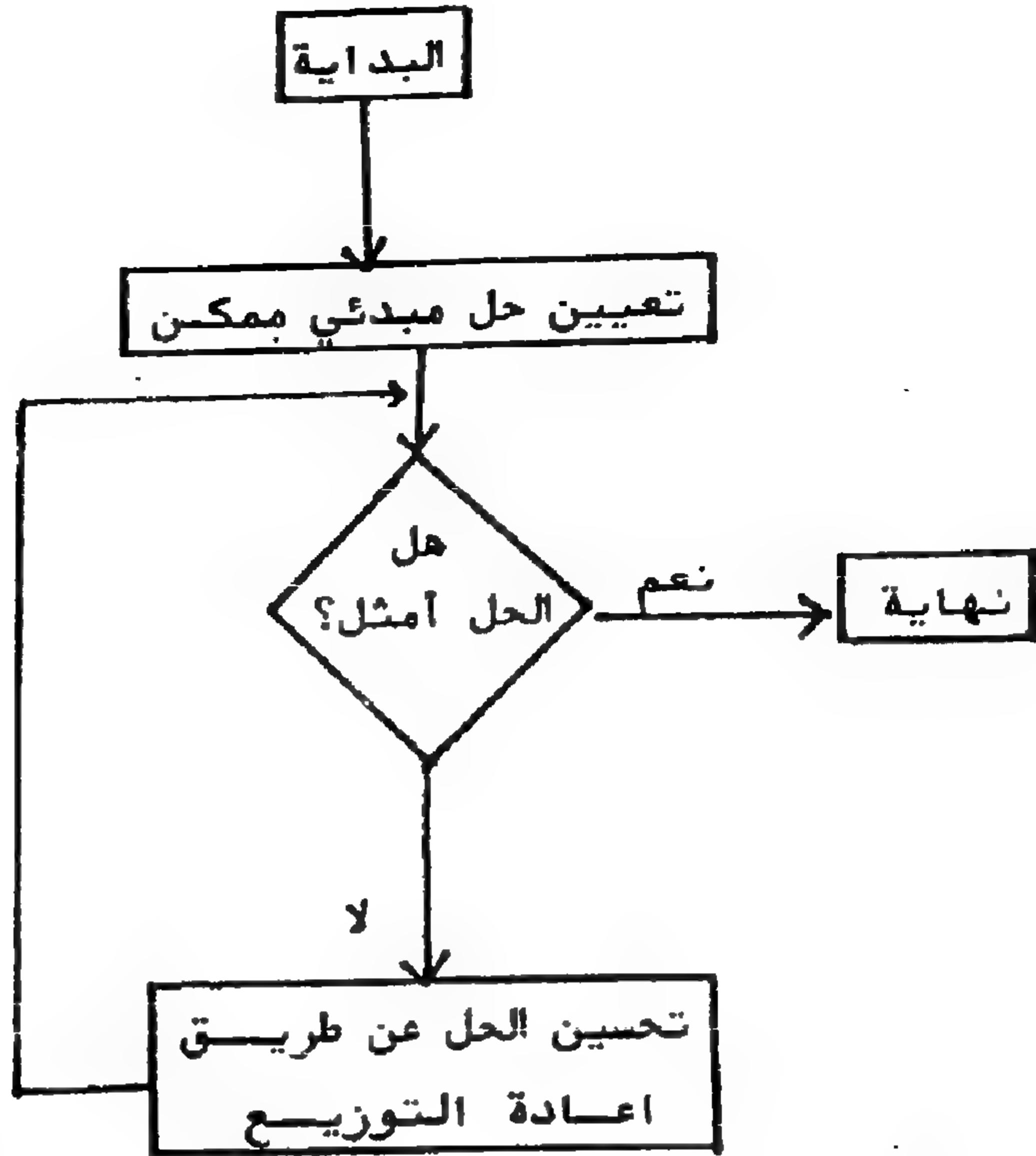
ويتضح من هذه الصياغة الرياضية أن مشكلة النقل البسيطة نسبيا قد قادتنا الى مشكلة برمجة خطية كبيرة نوعا ما ، وتتفاقم المشكلة اذا كان لدينا مشكلة نقل بها ١٠ مصادر توريد و ٥٠ نقطة طلب هنا سنجد أن المشكلة تحتوى على ٥٠٠ متغير قرارى (١٠×٥٠) وعدد ٦٠ قيد

(٥٠+١٠) ،وبرغم ان مشكلة بهذا الحجم لاتمثل عبثا عند حلها باستخدام الحاسب الآلى ، الا ان استخدام طريقة النقل فى حلها تعتبر آسهل وأيسر من حلها بطريقة السمبلكس وهذا هو الذى جعلنا نبتعد عن حلها باستخدام أسلوب السمبلكس ونتوصل الى طريقة النقل التى تعتبر افضل بكثير فى التعامل مع تلك النوعية من المشاكل .

### الحل باستخدام طريقة النقل :

بعد التقديم السابق سنركز اهتمامنا الآن على حل المثال السابق باستخدام طريقة النقل والتى تعتبر بمثابة منهج حل متخصص ، تم التوصل اليه لمعالجة وحل مشاكل النقل ، ومنهجيا فان طريقة النقل تتشابه الى حد ما فى خطواتها مع طريقة السمبلكس ، فهى تبدأ بحل مبدئي ممكن Initial Feasible Solution ثم يتم اختبار امثليته Optimality ، فاذا كان الحل أمثلا فـان خطوات الحل تتوقف ، اما اذا تبين ان الحل المبدئي ليس بعد هو الحل الأمثل يتم العمل على تحسينه عن طريق تغيير نمط الشحن ( اى إعادة التوزيع ) ، ونستمر فى اختبار المثالية وإعادة التوزيع Reallocating حتى نصل الى جدول الحل الأمثل والشكل التالي يوضح خطوات منهج طريقة النقل .





الخطوة الأولى لطريقة النقل : ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن :

ان الخطوة الاولى وفقا لمنهج طريقة النقل هي ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن ، ولعله يكون من المناسب أولا أن نتعرف على خصائص وسمات الحل الممكن ، ان الحل يعتبر ممكنا اذا كان يقدم جدولا للشحن لا يتعدى الطاقات المتاحة للمصانع وفي ذات الوقت يستوفى احتياجات المخازن بدون تجاوز طاقات المصانع ، ومعنى ذلك أن الحل الذى يستوفى قيود التوريد ، وقيود الطلب المختلفة هل هو حل اساسي وممكن فى الوقت نفسه ، فمثلا الجدول التالي يمكن اعتباره جدول حل مبدئي اساسي وممكن للمثال الذى نتناوله بالحل . مع ملاحظة ان شكل الجدول التالى هو التصميم او الشكل الذى سنستخدمه باستمرار كتصميم عام لجداول الحل لمشكلة النقل ، ويلاحظ منه أننا نضع تكلفة النقل فى مربع صغير داخل الخلايا

الممثلة لطرق الشحن ، أما القيم التي توضع داخل بعض الخلايا فهي تمثل الكمية التي سيتم شحنها عبر هذا الطريق . وبناءً على هذا التوضيح سيتم اعداد جدول حل مبدئي ممكن مع مراعاة اننا استبدلنا أسماء المصانع بالرموز أ ، ب ، ج ، ورمزنا للمخازن بالرموز س ، ص ، ع ، ل على التوالي :

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
		١٠٠		٥٠	
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
		٣٠	٩٠		
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠
		٦٠	٢٠		
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠
				٣٥٠	

ويتضح من هذا الجدول انه جدول حل مبدئي اساسي وممكن حيث انه يستوفي قيود التوريد وقيود الطلب ، فاجمالي الكميات المنقولة من كل مصنع تعادل تماماً طاقة ذلك المصنع ، كذلك يتضح أن اجمالي الكميات المنقولة الى كل مخزن تعادل تماماً الكميات المطلوبة لذلك المخزن أي أن هذا الجدول يستوفي كافة قيود العرض ( طاقة المصانع ) ، وقيود الطلب ( احتياجات المخازن ) ، ومن ناحية أخرى فانه يمكن حساب تكلفة النقل الاجمالية لنمط الشحن الوارد بالجدول المبدئي عن طريق ضرب الكمية المنقولة  $\times$  تكلفة نقل الوحدة المرتبطة بتلك الكمية ، ويكون مجموع حواصل الضرب هي اجمالي تكلفة

النقل لذلك الحل ، وفي العادة يتم اعداد هذه العملية الحسابية اسفل الجدول .

$$\text{اجمالي تكلفة النقل للجدول السابق} = 10 \times 20 + 3 \times 50 + 12 \times 100 = 2650 \text{ جنيه}$$

$$+ 7 \times 90 + 3 \times 60 + 2 \times 20 = 2650$$

ولكن السؤال الهام والاساسي هو كيف يمكن ايجاد ذلك الحل المبدئي الممكن ؟ ان الجزء التالي سيتولى بالتوضيح والتفسير التام الاجابة على ذلك السؤال الهام .

### طرق اعداد الحل المبدئي الممكن :

الحقيقة انه يمكن ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن بأي صورة جزافية ، بمعنى شغل الخلايا بأي كميات وبأي طريقة جزافية او بالصدفة أو أيا كان الأسلوب ، ولا يوجد من شرط على هذا الحل سوى مراعاة خاصية الحل الممكن وهي استيفاء كافة القيود الخاصة بالعرض والطلب ، ولكن حتى يمكن وضع خطوات محددة ومقننة وبفرض العمل على توحيد من الجميع في ايجاد ذلك الحل المبدئي ظهرت بعض الطرق المنطقية التي تجعل خطوات ايجاد الحل المبدئي الممكن روتينية ووفق خطوات محددة وموحدة . وواجبة الاتباع . تلك الطرق ليست جميعها على نفس درجة الكفاءة في التوصل الى ذلك الحل المبدئي الممكن ، فهناك طرقا كل مايعنيها فقط هو التوصل الى حل اساسي مبدئي ممكن اي مجرد استيفاء قيود العرض والطلب دون اي اعتبار لعامل تكلفة النقل ، وهناك طرق أخرى أكثر كفاءة اذ ان شغلها الشاغل ليس فقط مجرد ايجاد حل مبدئي ممكن ، بل انها تعمل في ذات الوقت الى ان يكون هذا الحل المبدئي الممكن يقترب ما أمكن من الحل الأمثل ومن ثم يوفر الجهد المبذول في عدة جولات للحل وصولا للحل الأمثل ، اذ انها طرق تأخذ في اعتبارها بالاضافة الى استيفاء قيود العرض والطلب التوصل الى حل مبدئي ذات اجمالي تكلفة نقل منخفضة ، أي انها تنظر أيضا الى

عامل التكلفة حتى وهي تعمل على ايجاد حل مبدئي ممكن،  
واجمالا فان الطرق المستخدمة فى ايجاد الحل المبدئي  
الممكن هي :

- ١- طريقة الركن الشمالي الشرقي
- ٢- طريقة ادنى تكلفة فى الصف
- ٣- طريقة أدنى تكلفة فى العمود .
- ٤- طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة .
- ٥- طريقة فوجل التقريبية .
- ٦- طريقة رسل التقريبية .

وفيما يلي شرح تفصيلي لهذه الطرق لتوضيح كيفية تطبيقها  
ومدى كفاءة كل منها فى ايجاد الجدول المبدئي الممكن  
الذى يقترب من جدول الحل الأمثل .

#### أولا : طريقة الركن الشمالي الشرقي :

North West Corner Method

يجدر بنا ان ننوه فى البداية الى انه يوجد  
اختلاف فى اسم هذه الطريقة فى كل من اللغة العربية واللغة  
الانجليزية ، وهذا الاختلاف مرجعه اننا فى اللغة العربية  
ننظر الى الجدول من اليمين الى اليسار ، بعكس الحال  
فى اللغة الانجليزية .

وتعتبر طريقة الركن الشمالي الشرقي من أسهل  
المداخل المستخدمة لايجاد جدول الحل المبدئي الممكن  
لمشاكل النقل ، ولهذا السبب نجدها أكثر الطرق شيوعا  
واستخداما ، ولقد سميت باسم الركن الشمالي الشرقي لأنها  
تبدأ بشغل الخلية الواقعة فى اقصى الركن الشمالي  
الشرقي بالجدول المبدئي، ثم تتابع خطوات شغل باقى  
الخلايا وفق الاسلوب الذى تسير عليه هذه الطريقة والذى  
سنوضحه فيما يلى :

يتم ايجاد الجدول المبدئي الممكن وفقا لطريقة  
الركن الشمالي الشرقي وفقا للخطوات التالية ، علما



بأننا سنطبق تلك الخطوات على المثال الذي بدأنا به  
هذا الجزء .

١- ابدأ بالخلية الواقعة في أقصى الركن الشمالي الشرقي ( وهي الخلية أ س ) وضع بها كمية من الوحدات تساوي كمية صفها أو كمية عمودها أيهما أقل . أي يوضع بتلك الخلية الكمية الممثلة لطاقة المصنع (أ) أو طاقة المخزن (س) أيهما أقل ، وحيث ان طاقة المصنع (أ) ١٥٠ وحدة ، وطاقة المخزن (س) هي ٦٠ وحدة ، اذن سيتم شغل الخلية أ س بكمية مقدارها ٦٠ وحدة ، وبذلك يكون المخزن (س) قد حصل على كامل احتياجاته من انتاج المصنع (أ) ، وما زال بهذا المصنع كمية مقدارها ٩٠ وحدة (١٥٠ - ٦٠) .

٢- تحرك الى يسار تلك الخلية او الى أسفلها ( حسب مقتضيات الحال ) واشغلها بكمية تساوي كمية صفها او كمية عمودها أيهما أقل . ولكن ما الذي يحدد لنا اتجاه الحركة سواء الى اليسار أو الى أسفل ؟ ان اتجاهنا الى اليسار او الى أسفل محدد بالصف أو العمود الذي تم استيفاءه بالكامل . اذ يوضع كمية مقدارها ٦٠ وحدة في الخلية أ س يكون المخزن (س) قد استوفى حاجته تماما ومن ثم لا يمكن ان تشغل أي خلية بعمود ذلك المخزن بأي كمية ومن ثم فالاتجاه اجباري الى الخلية الواقعة الى اليسار اي ننتقل الى العمود الثاني ، وتحديدا الى الخلية أ ص . ونقوم بشغل الخلية أ ص بكمية تساوي كمية صفها ( بعد خصم ٦٠ وحدة منها سبق شغلها عبر الخلية أ س ) ، أو كمية عمودها (١٣٠) أيهما أقل ، وحيث أن كمية الصف المتبقية من طاقة المصنع هي ٩٠ وحدة (١٥٠ - ٦٠) ، وأن كمية العمود (١٣٠) . اذن يتم شغل الخلية



١ ص بالكمية الاقل وهي ٩٠ وحدة .

٣- ثم يتم التحرك الى يسار تلك الخلية أو الى أسفلها ( حسب مقتضيات الحال ) ويتم شغلها بكمية صفها او كمية عمودها ايهما أقل . ويتم الاستمرار في هذا العمل حتى يتم مقابلة كل قيود التوريد وقيود الطلب ، وسيظهر جدول الحل المبدئي وخطواته طبقا لطريقة الركن الشمالي الشرقي كالآتي :

	المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
١		٦	١٢	٤	٣	١٥٠
		٦٠	٩٠			
ب		٨	١٥	٧	٨	١٢٠
			٤٠	٨٠		
ج		٣	١١	٢	٥	٨٠
				٣٠	٥٠	
احتياجات المخزن		٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٢٥٠
						٢٥٠

$$٦٠ - ٩٠ = ٩٠ - ٩٠ = ٠ \text{ صفر}$$

$$٤٠ - ٨٠ = ٨٠ - ٨٠ = ٠ \text{ صفر}$$

$$٣٠ - ٥٠ = ٥٠ - ٥٠ = ٠ \text{ صفر}$$

٦٠ -	٩٠ -	٨٠ -	٥٠ -
صفر	٤٠	٣٠	صفر
	٤٠ -	٣٠ -	
صفر	صفر		

وستكون التكلفة الاجمالية للنقل وفقا للجدول المبدئي

$$\text{هي} = ٦ \times ٦٠ + ١٢ \times ٩٠ + ١٥ \times ٤٠ + ٧ \times ٨٠ + ٢ \times ٣٠ + ٥٠ \times ٥٠$$

$$= ٢٩١٠ \text{ جنيها}$$

ويتضح من خطوات طريقة الركن الشمالي الشرقي انها تغفل تماما اعتبارات التكلفة وأن شغلها الشاغل هو التوصل الى حل مبدئي ممكن يعتبر الاساس والمنطلق الذي يتم الارتكاز عليه لجولات تالية نحو تحسين الحل وصولا للحل الامثل .

### ثانيا : طريقة أدنى تكلفة فى الصف :

واضح من مسمى هذه الطريقة انها ستكون على عكس طريقة الركن الشمالي الشرقي من حيث اهتمامنا عند ايجاد جدول الحل المبدئي الممكن ، فهي ستدخل فـى اعتبارها ليس فقط اعتبارات القيود بل وأيضا وستنظر بعين الاعتبار الى التكلفة ايضا ، وتسير هذه الطريقة فى الخطوات التالية :

- ١- نبدأ بالصف الأول من مصفوفة النقل التى تمثل المشكلة المطلوب حلها ، ويتم اختيار تلك الخلية ذات اقل تكلفة فى ذلك الصف (الخلية أ) ويتم شغلها بكمية صفها أو كمية عمودها أيهما أقل . ووفقا لارقام المثال الذى نحن بصددده سيتم شحن تلك الخلية بكمية مقدارها خمسون وحدة ، وهي تمثل احتياجات المخزن (ل) بالكامل، عندئذ يتم استبعاد العمود (أ) من المصفوفة وفى نفس الوقت تخفيض طاقة المصنع (أ) بمقدار خمسون وحدة اي يتبقى بذلك المصنع ١٠٠ وحدة فقط (١٥٠ - ٥٠) .

- ٢- طالما ان الصف الاول ( وهو الذى يمثل المصنع الاول ) مازالت به وحدات متاحة فانه يتم النظر مرة اخرى فى ذلك الصف بحثا عن الخلية ذات التكلفة الاقل ، وسنجد ان الخلية (أع) هي الخلية التالية ذات اقل تكلفة نقل بعد استبعاد العمود (ل) ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها

(١٠٠) أو كمية عمودها (١١٠) أيهما أقل ، أي سيتم شغل الخلية (أع) بكمية مقدارها (١٠٠) ، وبذلك تكون طاقة المصنع أ قد استغلت بالكامل (٥٠ منها للخلية أ ، ١٠٠ للخلية أع) وهذا معناه ان الصف الاول قد استوفي تماما ومن ثم يتم استبعاده . ويتم تخفيض احتياجات المخزن (ع) بالكمية التي شنت اليه عبر الخلية أ ع وهي كمية مقدارها ١٠٠ وبذلك تكون احتياجات المخزن (ع) قد أصبحت فقط ١٠ وحدات (١١٠-١٠٠) .

٣- يتم الانتقال الى الصف الثاني ، ونبحث فيه عن الخلية ذات اقل تكلفة نقل نجد أنها الخلية (ب ع) ، اذن يتم شحنها بكمية صفها (١٢٠) أو كمية عمودها (١٠) أيهما أقل ، وبذلك يتم شغلها بكمية مقدارها ١٠ وحدات ، بذلك يكون المخزن ع قد استوفى احتياجاته بالكامل فيتم استبعاده ، اما المصنع (ب) فان طاقته المتاحة أصبحت كمية مقدارها ١١٠ فقط (١٢٠-١٠) . وحيث أنه مازالت توجد كمية متاحة بالصف الثاني ، اذن يتم البحث عن الخلية الموجودة بذلك الصف والاقل تكلفة نقل نجد انها الخلية (ب س) . اذن يتم شغلها بكمية صفها (١١٠) أو كمية عمودها (٦٠) أيهما أقل ، أي انه سيتم شغلها بكمية مقدارها ٦٠ وحدة . وبذلك يتم استبعاد العمود (س) لانه تم استيفاء احتياجاته بالكامل ، ويتبقى بالمصنع (ب) كمية مقدارها (١١٠-٦٠) ٥٠ وحدة ، ومن ثم يتم البحث في ذلك الصف نفسه عن الخلية التالية في التكلفة فنجد أنها الخلية (ب ص) ويتم شغلها بكمية صفها (٥٠ وحدة) أو كمية عمودها (١٣٠) أيهما أقل . أي يتم شغلها بعدد ٥٠ وحدة .

وهكذا يتم الانتهاء من الصف الأول والثاني حتى الصف الأخير وبذلك يظهر جدول الحل المبدئي الممكن على الصورة التالية :

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

$$\begin{array}{r}
 \frac{٥٠ -}{\text{صفر}} \\
 \frac{١٠٠ -}{١٠} \\
 \frac{٥٠ -}{٨٠} \\
 \frac{٦٠ -}{\text{صفر}} \\
 \frac{١٠ -}{\text{صفر}} \\
 \frac{٨٠ -}{\text{صفر}}
 \end{array}$$

وبذلك نكون قد انتهينا من اعداد الجدول المبدئي الممكن وفقا لطريقة ادنى تكلفة في الصف وتكون قيمة دالة الهدف وفقا لهذا الجدول كالآتي :

$$٨ \times ٦٠ + ٧ \times ١٠ + ٤ \times ١٠٠ + ٣ \times ٥٠ = \text{اجمالي تكلفة النقل}$$

$$٢٧٣٠ \text{ جنيه} = ١١ \times ٨٠ + ١٥ \times ٥٠ +$$

وبمقارنة تلك التكلفة بتكلفة الجدول المبدئي الممكن باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي نجد أنها أفضل ، وهذا يؤكد ماسبق قوله ان طريقة الركن الشمالي الشرقي لاتهتم الا بأن تصل الى حل مبدئي ممكن بصرف النظر عن التكلفة ، وهذا ماتراعيه الطريقة الثانية الى حد ما .

### ثالثاً : طريقة ادنى تكلفة فى العمود :

فى حين كانت الطريقة الثانية تهتم بأدنى تكلفة فى الصفوف ، فإن هذه الطريقة تنظر الى أقل تكلفة فى الأعمدة ، فهى أيضاً طريقة تدخل فى اعتبارها عامل التكلفة وليس فقط مجرد حصر اهتمامها فى اعتبارات استيفاء القيود كما كان الحال بطريقة الركن الشمالى الشرقى ، وفيما يلى نستعرض خطوات وملاحق هذه الطريقة لنقف على كيفية ايجاد جدول الحل المبدئى الممكن وتكلفة هذا الحل :

١- تبدأ هذه الطريقة بالعمود الأول الذى يمثل المخزن ( س ) ، ويتم تحديد الخلية ذات أقل تكلفة نقل للوحدة فى هذا العمود ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها أو كمية عمودها ، أيهما أقل . وبالنظر الى العمود الأول بالصفوفة التى تمثل المثال الذى نتعامل معه فى هذا الجزء وهو عمود المخزن ( س ) نجد أن الخلية ( ج س ) هى الخلية ذات أقل تكلفة لنقل الوحدة وكمية صفها وهى طاقة المصنع (ح) تبلغ ٨٠ وحدة ، فى حين أن كمية عمودها وهى احتياجات المخزن ( س ) تبلغ ٦٠ وحدة ، إذن يتم شغل الخلية ( ج س ) بكمية مقدارها ٦٠ وحدة ، وبذلك يكون المخزن ( س ) قد استوفى احتياجاته بالكامل وعلى ذلك يتم استبعاده ، كذلك نجد أن المصنع ( ج ) قد انخفضت طاقته بعد شحن ٦٠ وحدة منه الى المخزون ( س ) وأصبح كل المتاح به ٢٠ وحدة فقط ( ٦٠ - ٨٠ ) .

٢- بعد استبعاد العمود الأول فى الخطوة الأولى ( لاستيفاء كافة احتياجاته ) ، ننتقل الى العمود الثانى ونبحث فيه أيضاً عن الخلية ذات أقل تكلفة



نقل للوحدة ، وسنجد أنها الخلية ( ج ص ) ، لذلك يتم شغلها بكمية صفها ( ٢٠ ) أو كمية عمودها ( ١٣٠ ) ايهما أقل ، ولهذا يتم شغل الخلية ( ج ص ) بكمية مقدارها ٢٠ وحدة ، وبذلك يكون المصنع ( ج ) قد استنفذ طاقته بالكامل فيستبعد فسي حين ان المخزن ( ص ) والذي يمثل العمود ( ص ) مازال في حاجة الى ١١٠ وحدة ( ٢٠-١٣٠ ) لهذا لا تنتقل الى العمود الذي يليه الا بعد استيفاء كافة احتياجاته ، لهذا نبحث عن تلك الخلية الأقل في تكلفة نقل الوحدة بذلك العمود بخلاف الخلية ( ج ص ) التي تم شغلها ، فنجد أن الخلية ( أ ص ) هي الأقل في تكلفة نقل الوحدة لهذا يتم شغلها بكمية صفها ( ١٥٠ ) أو كمية عمودها ( ١١٠ ) ايهما أقل ، أي يتم شغلها بعدد ١١٠ وحدة ، وبذلك يكون العمود ص الممثل للمخزن ص قد استوفي كل احتياجاته فيتم استبعاده .

٣- ننتقل الى العمود الثالث ونكرر ماتم فسي الخطوتين الاولى والثانية وهكذا حتى يتم استيفاء احتياجات كافة المخازن من انتاج المصانع الثلاثة ، وسيظهر جدول الحل المبدئي الممكن بعد تلك الخطوات على الشكل التالي :

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

$$-٤٠ - ٤٠ = ١١٠ \text{ صفر}$$

$$-٥٠ - ٥٠ = ٧٠ \text{ صفر}$$

$$-٢٠ - ٢٠ = ٦٠ \text{ صفر}$$

$$\begin{array}{r} ٥٠ - \\ \hline \text{صفر} \end{array} \quad \begin{array}{r} ٤٠ - \\ \hline ٧٠ \end{array} \quad \begin{array}{r} ٢٠ - \\ \hline ١١٠ \end{array} \quad \begin{array}{r} ٦٠ - \\ \hline \text{صفر} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٧٠ - \\ \hline \text{صفر} \end{array} \quad \begin{array}{r} ١١٠ - \\ \hline \text{صفر} \end{array}$$

وتكون تكلفة النقل الاجمالية للجدول المبدئي  
الممكن وفقا لطريقة أدنى تكلفة فى العمود هي =  
اجمالى تكلفة النقل =  $٨ \times ٥٠ + ٧ \times ٧٠ + ٤ \times ٤٠ + ١١ \times ٢٠ + ١٢ \times ١١٠ + ٣ \times ٦٠$   
= ٢٧٧٠ جنيه .

وهي اعلى قليلا من تكلفة الجدول المبدئي وفقا لطريقة  
ادنى تكلفة فى الصفوف ، الا انها احسن كثيرا بالمقارنة  
بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، وهذا طبعاً أمر متوقع  
لان طريقة الركن الشمالي الشرقي لم تأخذ في اعتبارها  
عند اعداد الجدول المبدئي عامل التكلفة فى حين راعت  
ذلك هذه الطريقة .

#### رابعاً : طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة :

وفقاً لهذه الطريقة فانها لن تكتفى فقط بالنظر  
الى ادنى تكلفة فى الصف كالتريقة الثانية، أو ادنى  
تكلفة فى العمود كالتريقة الثالثة، وانما يتم التعامل

مع المصفوفة كلها بكامل صفوفها وأعمدتها ، وذلك بغية الوصول الى جدول مبدئي ممكن وايضا اجمالاً تكلفة النقل وفقاً له في وضع معقول يمكننا من الوصول الى جدول الحل الأمثل بمجهود أقل وفي عدد من جداول تحسين الحل أقل . وتسير هذه الطريقة في الخطوات التالية :

١- يتم البحث في المصفوفة كلها عن تلك الخلية التي تكون فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة بالمصفوفة كلها . وبالنظر الى المصفوفة التي تمثل المثال الذي نتعامل معه في هذا الجزء ، نجد أن الخلية ( ج ع ) هي تلك الخلية التي تمثل فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة في المصفوفة كلها ( ٢ جنيه للوحدة ) ، عندئذ يتم شغل تلك الخلية بكمية صفها ( ٨٠ وحدة ) أو كمية عمودها ( ١١٠ وحدة ) أيهما أقل . أي يتم شغلها بكمية مقدارها ٨٠ وحدة ، ويتم استنزال هذه الكمية من طاقة المصنع ( ح ) ، والذي يتبين أنه استنفذ طاقته بالكامل ، ويتم استنزالها أيضاً من احتياجات المخزن ( ع ) فيصبح هذا المخزن في حاجة فقط الى ٣٠ وحدة ( ١١٠ - ٨٠ ) .

٢- يتم بعد ذلك البحث عن الخلية ذات أقل تكلفة نقل للوحدة للمصفوفة كلها بعد استبعاد الصف ج ( وهو المصنع ح الذي أصبحت طاقته صفراً ) ، ونجد أن الخلية ( أ ل ) هي الخلية ذات أدنى تكلفة نقل للوحدة في المصفوفة الباقية ، لذلك يتم شغلها باقصى كمية أي كمية صفها ( ١٥٠ ) ، أو كمية عمودها ( ٥٠ وحدة ) أيهما أقل . أي سيتم شغلها بكمية مقدارها ٥٠ وحدة ، وباتمام هذه الخطوة يكون المخزن ( ل ) قد حصل على احتياجاته كلها أي يتم استبعاده من المصفوفة ، كما يتم تخفيض طاقة المصنع ( أ ) بالكمية التي نقلت

بالخلية ( آل ) ، أي ستعير طاقة المصنع المتبقية  
١٠٠ وحدة فقط (٥٠-١٥٠) .

٣- يتم تكرار العمل بذات الخطوات السابقة ، أي يتم  
البحث عن الخلية ذات أدنى تكلفة بالمصفوفة  
المتبقية بعد استبعاد الصف (د) ، والعمود (ل) ،  
وسنجد انها الخلية (أع) فيتم شغلها بكمية صفها  
( ١٠٠ وحدة ) أو كمية عمودها ( ٣٠ وحدة ) أيهما  
أقل ، أي يتم شغلها بعدد ٣٠ وحدة . وهكذا .

٤- يتم تكرار الخطوات السابقة وفي كل مرة يتم  
استبعاد الصف أو العمود الذي تم استنفاده  
والتعامل مع باقي المصفوفة ، حتى يتم استيفاء  
كافة الصفوف والاعمدة .

٥- بانتهاء الخطوات السابقة ، وبعد استيفاء كافة  
صفوف وأعمدة المصفوفة سيظهر الجدول المبدئي  
الممكن كالآتي :

المخزون المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦ ٦٠	١٢ ١٠	٤ ٣٠	٣ ٥٠	١٥٠
ب	٨ ١٢٠	١٥ ١٢٠	٧	٨	١٢٠
ج	٣ ٨٠	١١ ٨٠	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

٦٠ -	١٠ -	٨٠ -	٥٠ -
صفر	١٢٠	٣٠	صفر
	١٢٠ -	٣٠ -	
	صفر	صفر	

وتكون قيمة دالة الهدف لهذا الجدول المبدئي الممكن  
باتباع هذه الطريقة هي :

$$3 \times 50 + 2 \times 80 = \text{الممكن للجدول المبدئي}$$

$$+ 4 \times 30 + 6 \times 60 + 12 \times 10 + 15 \times 120 = 2710 \text{ جنيه}$$

وبمقارنة هذه التكلفة بنتائج الطرق السابقة نجد أنها  
افضل طريقة حتى الآن .

#### خامسا : طريقة فوجل التقريبية :

Vogel's Approximation Method (VAN)

وتنسب هذه الطريقة الى مكتشفها W.R.Vogel  
وتسعى طريقة فوجل التقريبية والتي تعرف بحروفها  
الأولى اذ تختصر الى VAN ، الى التوصل الى جدول  
مبدئي ممكن يهل بتكلفة النقل الى حد يقترب من الأمثلية  
بحيث تكون خطوات وجداول تحسين الحل أقل ما يمكن .  
لذلك نجدها تهتم جدا عند اعداد هذا الجدول المبدئي  
بتكاليف النقل لخلايا المعفوفة ليس فقط كما كان يحدث  
بالطرق السابقة والتي كانت تهتم ايضا بالتكاليف ،  
ولكنها تنتهج اسلوبا مغايرا اكثر فاعلية ، ويقوم هذا  
المنهج على فكرة التضحية أو العقوبة أو الجزاء Penalty  
والذي قد يقترب من مفهوم الفرصة الضائعة . ويتم حساب  
التضحية أو العقوبة أو الجزاء لكل صف ولكل عمود  
بالمعنى وذلك من خلال حساب الفروق المطلقة بين ادنى  
تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة لكل صف ولكل عمود  
ولذلك سيتم اضافة صف جديد للمعفوفة اسفل صف احتياجات  
المخازن ، وأيضا اضافة عمود جديد يسار عمود طاقة  
المصنع ، ويسجل بالصف الجديد فروق الاعمدة ، ويسجل  
بالعمود الجديد فروق الصفوف . ولترتيب استخدام هذه  
الطريقة يتم السير في الخطوات التالية :

- ١- نبدأ بالصف الأول ، ونحدد أقل تكلفة نقل  
للوحدة به ، والتكلفة التي تليها مباشرة في ذلك



الصف نفسه ، ونستخرج الفرق بينهما ، ونسجل هذا الفرق امام ذلك الصف فى الخلية التى أضيفت بالعمود الجديد ، ونكرر تلك العملية مع كل صف حتى نفرغ من جميع الصفوف .

٢- ننتقل بعد ذلك الى الاعمدة ، ونبدأ بالعمود الاول ، ونحدد أيضا اقل تكلفة نقل للوحدة به ، والتكلفة التى تليها مباشرة فى العمود نفسه ، ونستخرج الفرق بينهما ، ونسجل هذا الفرق اسفل ذلك العمود فى الخلية التى أضيفت بالصف الجديد ، ونكرر تلك العملية مع كل عمود حتى نفرغ من جميع الاعمدة .

وبتطبيق هاتين الخطوتين على مصفوفة المثال السابق نحصل على الجدول التالي :

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	الفرق
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠	١
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠	١
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠	١
احتياج المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠		
الفرق	٣	١	٢	٢		

٣- الخطوة الثالثة هى تحديد اكبر هذه الفسروق (مفوقا كانت أو اعمدة) ، وفى حالة التساوى لأكثر من قيمة من قيم تلك الفروق يتم الاختيار جزافيا ،

ثم يتم تحديد الصف أو العمود المقابل لأكبر هذه الفروق . فاذا كان هذا الفرق مقابل أحد الأعمدة مثلا، فإنه يتم البحث في هذا العمود عن الخلية ذات اقل تكلفة نقل للوحدة، ويتم شغلها بكمية صفها أو كمية عمودها أيهما اقل ، ثم نحدد الصف أو العمود الذى تم استيفاءه بشغل تلك الخلية ومن ثم حذفه من المصفوفة .

وقد يكون من المفيد ان تجرى تلك الخطوة على المثال السابق قبل الخوض فى باقى الخطوات حتى يمكن تفهمها أولا بأول ، اذ بالنظر الى المصفوفة السابقة نجد أن اكبر الفروق المحسوبة هي الفروق المقابلة للعمود الأول (س) اذ تبلغ تلك الفروق (٣) ، وان الخلية ذات اقل تكلفة بذلك العمود هي الخلية (ج س) ، اذن يتم شغلها بكمية صفها (٨٠ وحدة) أو كمية عمودها (٦٠ وحدة) أيهما اقل . ووفقا لهذه القاعدة سيتم شغلها اذن بعدد ٦٠ وحدة وهي كمية العمود، وبذلك يكون المخزن (س) قد تم استيفاء احتياجاته بالكامل ومن ثم يتم استبعاده من الجولة التالية للحل .

٤- نقوم بجولة تالية للحل ، ولا بد ان نبدأ من الخطوة الاولى مرة اخرى على أن يتم أولا استبعاد العمود الاول من المصفوفة حيث تم الانتهاء منه وتنسب احتياجاته بالكامل فى الخطوة الثالثة . وبعد تعديل العرض والطلب اخذا فى الاعتبار التخصيص الذى تم فى الخطوة الثالثة، وفيما يلى نعيد تعوير المصفوفة بعد تعديلها وفق ماترم ذكره ، وبعد حساب الفروق المطلوبة للمصفوف والاعمدة .

المخزن المصنع	ص	ع	ل	طاقة المصنع	الفروق
أ	١٢	٤	٣	١٥٠	١
ب	١٥	٧	٨	١٢٠	١
ج	١١	٢	٥	٢٠	٣
احتياجات المخازن	١٣٠	١١٠	٥٠		
الفروق	١	٢	٢		

ويتبين أولاً من هذه المصفوفة انه تم استبعاد  
العمود ( س ) منها لاستيفائه لاحتياجاته ، وتتم  
تخفيض طاقة المصنع ( ج ) من ٨٠ وحدة الى ٢٠ وحدة ،  
حيث انه قد تم شحن ٦٠ وحدة من هذا المصنع لتلبية  
احتياجات المخزن ( س ) . من ناحية اخرى يلاحظ أن  
الفروق أسفل الاعمدة ظلت كما هي دون تغيير —  
المصفوفة السابقة ، لأنه لم يتم استبعاد صفوف  
ولكن تم استبعاد عمود ، واستبعاد العمود لا يؤثر  
على فروق الاعمدة. ولكن يؤثر على فروق الصفوف .  
ولهذا السبب نلاحظ وجود تغير في فروق الصفوف  
عما كانت عليه في المصفوفة السابقة .

وبالنظر الى المصفوفة الجديدة نجد أن أكبر  
فروق موجودة في صف المصنع (ج) ومقدار هذا الفرق  
( ٣ ) ، لذلك نختار الخلية ( ج ع ) لأنها الخلية ذات  
اقل تكلفة في صف المصنع (ج) ، ويتم شغلها بكمية  
صفها ( ٢٠ وحدة ) أو كمية عمودها ( ١١٠ وحدة ) أيهما

أقل . أي أن يتم شغلها بعدد ٢٠ وحدة وبذلك يكون المصنع (ج) قد استنفذ طاقته بكاملها فيتم استبعاده من المصفوفة الجديدة ويتم تخفيض العمود ( ع ) بمقدار ٢٠ وحدة لتصبح احتياجات المخزن ( ع ) ٩٠ وحدة فقط ، ثم يتم حساب الفروق وندخل في الجولة التالية للحل .

٥- يتم تموير المصفوفة بعد احداث التعديلات التي ذكرناها في الخطوة السابقة عليها ، وتظهر المصفوفة الجديدة كالآتي :

المخزن المصنع	ص	ع	ل	طاقة المصنع	الفروق
أ	١٢	٤	٣	١٥٠	١
ب	١٥	٧	٨	١٢٠	١
احتياجات المخزن	١٣٠	٩٠	٥٠		
الفروق	٣	٣	٥		

ويتضح من هذه المصفوفة ان اكبر فروق موجودة في عمود المخزن (ل) ومقدار هذا الفرق (٥)، لذلك يتم اختيار الخلية (أل) لأنها الخلية ذات أقل تكلفة في عمود المخزن (ل) ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها (١٥٠) او كمية عمودها (٥٠) أيهما أقل ، اي يتم شغلها بعدد ٥٠ وحدة ، وبذلك يكون المخزن (ل) قد تم استيفاءه بالكامل فيتم استبعاده من المصفوفة الجديدة ، ويتم تخفيض طاقة المصنع (أ) بمقدار ٥٠ وحدة ليظهر في المصفوفة التالية بطاقة قدرها ١٠٠ وحدة فقط . ثم يتم حساب الفروق

الفروق مرة اخرى ويعاد تصوير المصفوفة وندخل في جولة جديدة للحل .

٦- يتم تصوير المصفوفة بعد التعديلات التي حدثت عليها من الخطوة السابقة ، وفيما يلي المصفوفة الجديدة .

المخزن / المصنع	ص	ع	طاقة المصنع	الفروق
أ	١٢	٤	١٠٠	٨
ب	١٥	٧	١٢٠	٨
احتياجات المخزن	١٣٠	٩٠		
الفروق	٣	٣		

ويتضح من هذه المصفوفة ان اكبر فروق موجودة في كل من العمودين ( أ ) و ( ب ) ومقدار هذه الفروق ( ٨ ) اي انهما متعادلان في الفروق ، وكما سبق القول يتم في هذه الحالة الاختيار الجرافيكي لأيهما . ويمكن ان نختار الصف ( أ ) ، عندئذ يتعين اختيار الخلية ( أ ع ) لانها الخلية ذات أقل تكلفة في الصف ( أ ) ويتم شغلها بكمية صفها ( ١٠٠ وحدة ) ، أو بكمية عمودها ( ٩٠ وحدة ) ايهما اقل ، أي يتم شغلها بكمية مقدارها ٩٠ وحدة وهي الكمية الاقل ، وبذلك يكون المخزن ( ع ) قد حصل على كل احتياجاته ومن ثم يتم استبعاده من المصفوفة الثانية ، كذلك يتم تخفيض طاقة المصنع ( أ ) بتلك الكمية ومن ثم تصبح طاقته المتاحة حاليا ١٠ وحدات فقط ، ثم يتم



### الدخول فى الجولة التالية للحل .

٧- يتم تصوير المصفوفة بعد التعديلات السابقة ، مع ملاحظة اننا اهلنا صف وعمود الفروق ، حيث لم يعد لدينا سوى عمود واحد وعقدين ، وبالتالي لن ينتج لدينا سوى فرق واحد للعمود الموجود . وفيما يلي شكل المصفوفة المعدل .

المخزن / المصنع	ص	طاقة المصنع
أ	١٢	١٠
ب	١٥	١٢٠
احتياجات المخزن	١٣٠	

ومن هذه المصفوفة يتم شغل الخلية أص بمقدار ١٠ وحدات ، ويتم شغل الخلية ب ص بمقدار ١٢ وحدة .

وبذلك ننتهى من توزيع الكميات وفقا لطريقة فوجل وفيما يلي المصفوفة التى تظهر الجدول المبدئي للحل وفقا لهذه الطريقة :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وتكون قيمة دالة الهدف لهذا الجدول المبدئي الذى تم اعداده بطريقة فوجل التقريبية هي :

اجمالي تكاليف النقل للجدول المبدئي السابق =  
 $12 \times 10 + 4 \times 90 + 3 \times 50 + 10 \times 120 + 3 \times 60 + 2 \times 20 = 2650$  جنيه  
 وبمقارنة هذه التكلفة بنتائج كل الطرق السابقة سنجد  
 أن المقارنة في صالح هذه الطريقة .

#### سادسا : طريقة رسل التقريبية :

Russel's Approximation Method

وهذه الطريقة ايضا من الطرق التي تأخذ فــــــي  
 اعتبارها تكلفة النقل عند ايجاد جدول الحل المبدئي ،  
 ولذلك سنجد أن الحل المبدئي الذي يتم اعداده وفقا  
 لهذه الطريقة سيقترب كثيرا من الحل الأمثل ، بمعنى انه  
 لن يحملنا كثيرا من الجهد المبذول في عدة جولات للحل ،  
 وذلك بالمقارنة مثلا بالجدول المبدئي الناتج من  
 استخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي .

وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية :

١- حساب الفروق المطلقة لكل خلية بين خلايا المصفوفة

باستخدام المعادلة التالية :

الفروق المطلقة للخلية = تكلفة الخلية - أعلى تكلفة في صف  
 تلك الخلية - أعلى تكلفة في عمود تلك  
 الخلية .

٢- بعد حساب الفروق المطلقة لكل خلايا المصفوفة ، يتم

اختيار تلك الخلية ذات أكبر رقم بإشارة سالبة ، وفي  
 حالة ما اذا اتضح أن هناك أكثر من خلية تشترك في  
 الرقم الأكبر ، فإن الاختيار بينهما يتم جزافيا ، أو  
 يمكن الرجوع ثانية الى التكاليف الاصلية لتلك الخلايا  
 واختيار الادنى في التكلفة .

٣- يتم شغل الخلية ذات أكبر رقم مطلق بإشارة سالبة

بكمية صفها أو كمية عمودها ايهما أقل ، والصف أو  
 العمود الذي يتم استيفاءه بالكامل يتم استبعاده .  
 في الجولة التالية للحل ، ويتم اعداد الجولة

التالية للحل بعد عملية الاستبعاد هذه ومع ملاحظة  
اجراء التعديلات الواجبة في كميات طاقة المصانع  
أو احتياجات المخازن وفقا للتخصيص الذي تم في  
الخطوات السابقة .

٤- يتم السير في الخطوات السابقة وفي جولات متعاقبة  
حتى يتم استيفاء كل الاعمدة والمغروف .

ولغرض توضيح كيفية تطبيق خطوات هذه الطريقة ،  
فاننا سنقوم بتنفيذ خطواتها على مصفوفة المثال الذي  
طرحناه في مشكلة النقل والتي كانت تأخذ الشكل التالي:

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠ / ٣٥٠

وفي الجولة الأولى وتطبيقا لخطوات طريقة راسل  
التقريبية يتم حساب الفروق المطلقة لكل خلية وفقا  
للمعادلة السابق ذكرها في الخطوة الاولى . وفيما يلي  
حساب هذه الفروق صفا صفا :

الصف الأول :

$$\text{فروق الخلية أ س} = ٦ - ١٢ - ٨ = - ١٤$$

$$\text{فروق الخلية أ ص} = ١٢ - ١٢ - ١٥ = - ١٥$$

$$\text{فروق الخلية أ ع} = ٤ - ١٢ - ٧ = - ١٥$$

$$\text{فروق الخلية أ ل} = ٣ - ١٢ - ٨ = - ١٧$$

الصف الثاني :

فروق الخلية ب س = ٨ - ١٥ - ٨ = ١٥ -

فروق الخلية ب ص = ١٥ - ١٥ - ١٥ = ١٥ -

فروق الخلية ب ع = ٧ - ١٥ - ٧ = ١٥ -

فروق الخلية ب ل = ٨ - ١٥ - ٨ = ١٥ -

الصف الثالث :

فروق الخلية ح س = ٣ - ١١ - ٨ = ١٦ -

فروق الخلية ح ص = ١١ - ١١ - ١٥ = ١٥ -

فروق الخلية ح ع = ٢ - ١١ - ٧ = ١٦ -

فروق الخلية ج ل = ٥ - ١١ - ٨ = ١٤ -

ويتضح من الخطوة الاولى ان الخلية ( أ ل ) هي الخلية ذات اكبر قيمة فروق مطلقة بإشارة سالبة (-١٧)، لذلك ووفقا لخطوات طريقة رسل التقريبية يتم شغل تلك الخلية بكمية صفها (١٥٠) أو كمية عمودها (٥٠) ايهما أقل، اي سيتم شغلها بكمية مقدارها خمسون وحدة وبذلك يكون المخزن ( ل ) قد تم استيفاءه لكل احتياجاته ومن ثم يتم استبعاده من الجولة التالية للحل ، كذلك يتم تعديل طاقة المصنع (أ) لتصبح ١٠٠ وحدة فقط بدلا من ١٥٠ وحدة. لأننا اخذنا ٥٠ وحدة من هذا المصنع لاستيفاء حاجة المخزن ل . ثم نعيد تهوير المصفوفة بعد اجراء هذه التعديلات ، ونقوم بتكرار الخطوة السابقة أي حساب الفروق المطلقة لخلاياها .

المخزن المصنع	س	ص	ع	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	١٠٠
ب	٨	١٥	٧	١٢٠
ج	٣	١١	٢	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٣٠٠

### الصف الاول :

$$\begin{aligned} \text{فروق الخلية أ س} &= ٦ - ١٢ - ٨ = -١٤ \\ \text{فروق الخلية أ ص} &= ١٢ - ١٢ - ١٥ = -١٥ \\ \text{فروق الخلية أ ع} &= ٤ - ١٢ - ٧ = -١٥ \end{aligned}$$

### الصف الثاني :

$$\begin{aligned} \text{فروق الخلية ب س} &= ٨ - ١٥ - ٨ = -١٥ \\ \text{فروق الخلية ب ص} &= ١٥ - ١٥ - ١٥ = -١٥ \\ \text{فروق الخلية ب ع} &= ٧ - ١٥ - ٢ = -١٥ \end{aligned}$$

### الصف الثالث :

$$\begin{aligned} \text{فروق الخلية ح س} &= ٣ - ١١ - ٨ = -١٦ \\ \text{فروق الخلية ح ص} &= ١١ - ١١ - ١٥ = -١٥ \\ \text{فروق الخلية ح ع} &= ٢ - ١١ - ٧ = -١٦ \end{aligned}$$

ويتضح من هذه الجولة الثانية في حساب الفروق أن هناك خليتين كل منهما يمثل أكبر قيمة فروق مطلقة بإشارة سالبة وهما الخليتين (ح س) ، (ح ع) ، والفروق المطلقة لكل منهما (١٦-) ، ومن ثم يمكن الاختيار من بينهما جزافيا ، او يمكن ان نختار أيهما أقل تكلفة نقل في المصفوفة الاصلية ، والتي يظهر منها ان تكلفة النقل



للوحدة الواحدة بالخلية (ح س) هي ٣ جنيهات في حين انها للخلية (ج ع) ٢ جنيه فقط ، لذلك سنختار شغل الخلية الاقل في التكلفة وهي الخلية (ج ع) ويتم شغلها بكمية تساوي كمية صفها ( ٨٠ وحدة) أو كمية عمودها (١١٠ وحدة) ايهما أقل ، أي سيتم شغلها بكمية مقدارها ٨٠ وحدة ومن ثم يتم استبعاد المصنع (ج) من المصفوفة التالية حيث استنفذت طاقة هذا المصنع بالكامل لتلبية جزء من احتياجات المخزن (ع) الذي يتعين ان يعدل احتياجاته لتصبح ٣٠ وحدة فقط (١١٠ - ٨٠)، ثم نعيد تصوير المصفوفة بعد اجراء هذه التعديلات عليها تمهيدا للدخول في جولة جديدة للحل يتم فيها تكرار خطوة حساب الفروق المطلقة لكافة خلاياها .

وفيما يلي المصفوفة الجديدة بعد اجراء التعديلات عليها :

المخزن المصنع	س	ص	ع	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٤	١٠٠
ب	٨	١٥	٧	١٢٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	٣٠	٢٢٠ ٢٢٠

الصف الاول :

$$\text{فروق الخلية أ س} = ٦ - ١٢ - ٨ = - ١٤$$

$$\text{فروق الخلية أ ص} = ١٢ - ١٢ - ١٥ = - ١٥$$

$$\text{فروق الخلية أ ع} = ٤ - ١٢ - ٧ = - ١٥$$

الصف الثاني :

$$\text{فروق الخلية ب س} = ٨ - ١٥ - ٨ = - ١٥$$

فروق الخلية ب ص = ١٥ - ١٥ - ١٥ = ١٥ -

فروق الخلية ب ع = ٧ - ١٥ - ٧ = ١٥ -

ويتضح من هذه الفروق انه توجد خمس خلايا متساوية من حيث اكبر قيمة فروق مطلقة بإشارة سالبة (-١٥) وعليه سيتم الاختيار من بينها وفقا للمعيار الجرافي ، أو المعيار اقلهما تكلفة في المصفوفة الاصلية ، ووفقا للمعيار الثاني سيتم اختيار الخلية (أع) لأنها اقلهم تكلفة نقل . ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها ( ١٠٠ وحدة ) أو كمية عمودها ( ٣٠ وحدة ) أيهما أقل ، أي سيتم شغلها بعدد ٣٠ وحدة ومن ثم يستبعد المخزن ع لاستيفائه بكل احتياجاته ، وتخفض طاقة المصنع (أ) بعدد ٣٠ وحدة لتصبح ٧٠ ، ويعاد تصوير المصفوفة مرة أخرى بعد اجراء هذه التعديلات .

المخزن / المصنع	س	ص	طاقة المصنع
أ	٦	١٢	٧٠
ب	٨	١٥	١٢٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١٩٠ / ١٩٠

#### الصف الاول :

فروق الخلية أ س = ٦ - ١٢ - ٨ = ١٤ -

فروق الخلية أ ص = ١٢ - ١٢ - ١٥ = ١٥ -

#### الصف الثاني :

فروق الخلية ب س = ٨ - ١٥ - ٨ = ١٥ -

فروق الخلية ب ص = ١٥ - ١٥ - ١٥ = ١٥ -

وتتضح ان هناك ثلاثة خلايا متساوية فى قيمة الفروق المطلقة بإشارة سالبة ( ١٥- ) لذلك سيتم اختيار الخلية ( ب س ) لأنها ذات اقل تكلفة نقل فى المصفوفة الاصلية ، ويتم شغل تلك الخلية بكمية صفها ( ١٢٠ ) أو كمية عمودها ( ٦٠ ) ايهما اقل . أي سيتم شغلها بعدد ٦٠ وحدة ، ومن ثم يتم استبعاد العمود ( س ) حيث قد تم استيفاءه بكامل احتياجاته ، كما يتم تعديل طاقة المصنع (ب) لتصبح ٦٠ وحدة فقط بدلا من ١٢٠ وحدة حيث أنه قد تم شحن ٦٠ وحدة من ذلك المصنع لاستيفاء احتياجات المخزن ( س ) . ثم يعاد تصوير المصفوفة بعد هذه التعديلات .

المخزن المصنع	ص	طاقة المصنع
أ	١٢	٢٠
ب	١٥	٦٠
احتياجات المخزن	١٣٠	١٣٠

وواضح من هذه المصفوفة انه لا داعى ان نكرر حساب الفروق حيث ان تخصيصات الكميات واضحة ومحددة ولا تحتاج لاي عمليات حسابية ، اذ سيتم شغل الخلية (أص) بعدد ٢٠ وحدة. وهى كمية صفها ، وكذلك شغل الخلية (بص) بعدد ٦٠ وحدة. وهى كمية صفها أيضا .

وعلى ذلك فان الجدول المبدئي الممكن وفقـاً لطريقة رسل التقريبية سيكون كالاتي :

طاقة المصنع	ل	ع	ص	س	المخزن / المصنع
١٥٠	٣	٤	١٢	٦	أ
	٥٠	٣٠	٧٠		
١٢٠	٨	٧	١٥	٨	ب
			٦٠	٦٠	
٨٠٠	٥	٢	١١	٣	ج
		٨٠			
٢٥٠	٥٠	١١٠	١٣٠	٦٠	احتياجات المخزن
٢٥٠					

وتكون قيمة دالة الهدف لهذا الجدول المبدئي الذي تم اعداده بطريقة رسل التقريبية هي :

اجمالي تكاليف النقل للجدول المبدئي السابق =  $4 \times 30 + 12 \times 70$

$+ 2 \times 80 + 10 \times 60 + 8 \times 60 + 3 \times 50 = 2650$  جنيه

وفيما يلي بيان مقارن لاجمالي تكلفة الحل المبدئي الممكن وفقا للطرق السابقة :

٢٩١٠ جنيه	طريقة الركن الشمالي الشرقي
٢٧٣٠ جنيه	طريقة ادنى تكلفة فى الصف
٢٧٧٠ جنيه	طريقة ادنى تكلفة فى العمود
٢٧١٠ جنيه	طريقة ادنى تكلفة فى المصفوفة
٢٦٥٠ جنيه	طريقة فوجل التقريبية
٢٦٥٠ جنيه	طريقة رسل التقريبية

وبصفة عامة يمكن القول بأن :

١- الطرق التى تراعى تكلفة النقل عند ايجادها للحل المبدئي افضل من طريقة الركن الشمالي الشرقي التي تهملها تماما ، هذا على الرغم من أن الاخيرة سهلة وسريعة فى ايجاد جدول الحل المبدئي ، ولكن العبرة ليست بالسرعة انما بأن يكون ذلك الحل المبدئي

الممكن قريبا ما أمكن من جدول الحل الأمثل حتى  
لاندخل في عدة جولات للحل بغرض تحسينه تستهلك  
كثيرا من الوقت وتزيد من الاهباء الحسابية للحل .

٢- حتى الآن لا يوجد هناك معيار للمفاضلة بين هذه الطرق  
بالنسبة لحل مشكلة بذاتها ، وان تقرير هذا الأمر  
بصورة قاطعة يستدعي حل المشكلة باستخدام كافة  
هذه الطرق ، ولكننا نميل الى تطبيق أي من الطريقتين  
الاخيرتين وهما طريقة فوجل التقريبية ، وطريقة رسل  
التقريبية . ولقد ظلت طريقة فوجل ولفترة طويلة  
منذ عام ١٩٥٨ بمثابة الطريقة المفضلة لإيجاد الحل  
المبدئي . اما طريقة رسل فلم تكن متاحة للاستخدام  
الا منذ عام ١٩٦٩ ، ولكن على الرغم من حداثةها  
النسبية ، وعلى الرغم من أنها تعتمد على جولات  
متتالية للحل ، وعلى الرغم كذلك من عدم استنادها  
حتى الآن على برهان نظري، الا أنها أصبحت الطريقة  
المفضلة في معظم الأحوال لأنها تقترب بالحل المبدئي  
الى الحل الأمثل .

٣- سلاحظ في أي من الطرق الستة السابقة أن شغل أي  
خلية كان يعنى دائما اما استنفاد مصدر ، أو اشباع  
حاجة ، أو الاثنين معا وتلك سمة من السمات المميزة  
لمشكلة النقل .

### تحديد الأمثلية Determining Optimality

وفقا لمنهج طريقة النقل الذى اشرنا اليه فـ في  
مقدمة هذا الجزء ، فان ايجاد جدول الحل المبدئي  
الممكن يعتبر بمثابة الخطوة الأولى من خطوات حل مشكلة  
النقل ، وتكون الخطوة الثانية هي تحديد ما اذا كان  
جدول الحل المبدئي الذى تم التوصل اليه من الخطوة  
الأولى يمثل الحل الأمثل أم لا ؟ ، بمعنى اختيار أمثلية



الحل . فاذا ما اتضح ان الحل أمثل فقد توصلنا الى حل المشكلة ، اما اذا ماتبين ان الحل غير أمثل فـان الامر يتطلب الاستمرار فى العمل نحو تحسينه ، ونود أن نوضح هنا من البداية ان اختبار المثالية يعتبر في حد ذاته نقطة انطلاق نحو تحسين الحل ، بمعنى ان هذا الاختبار لا تقتصر نتائجه على الحكم بأن الحل الحالي امثل أم لا ؟ ، بل انه يتعدى هذه الحدود ويوضح لنا الطريق الذى نتبعه نحو تحسين ذلك الحل .

كذلك يتعين ان نوضح منذ البداية ايضا ان اختبار المثالية لمشكلة النقل هو فى أساسه ومفهومه نفس الاختبار الذى سبق اتباعه فى طريقة السمبلكس ، أي انه منهجيا يسير بنفس الخطوات المتبعة فى تحسين الحل المبدئي لطريقة السمبلكس ، فقد كانت مثالية جدول السمبلكس تتحدد بتقييم كل متغير غير أساسي من حيث مقارنة المكسب الذى يمكن ان نحققه من جعل ذلك المتغير أساسيا ( الارباح الداخلة ) مقارنة بالتضحية التـى سنحملها فى سبيل احداث هذا التغير (التكاليف الداخلة ) وعندما نصل الى النقطة التى نجد فيها أن أيا من المتغيرات غير الأساسية لا تقدم تحسنا اضافيا للحل ، نكون بذلك قد وصلنا الى الحل الأمثل .

ان ذلك المدخل سيكون هو نفسه المدخل المتبع في تحديد امثلية الحل لجولات مشكلة النقل ، فالمتغيرات غير الأساسية فى مشكلة النقل هى تلك الخلايا التى لم يتم شغلها بالجدول (الخلايا الفارغة) ، ولذلك يتم مقارنة تكلفة النقل لكل خلية فارغة وسنطلق عليها تكلفة النقل المباشرة ، بصافى التغير فى تكلفة الطرق الأخرى الذى سيحدث لو فكرنا فى شغل تلك الخلية الفارغة ، وسنطلق عليها اصطلاح التكاليف غير المباشرة ، وسيكون الحل أمثل اذا كانت التكلفة المباشرة للـخلايا الفارغة (متغيرات غير أساسية) تزيد عن صافى التخفيض فى التكاليف

غير المباشرة الناشئة من إعادة الشحن عبر الخلايا  
الآخري ( الطرق الآخري ) .

وقبل الدخول في تفاصيل الطرق المتبعة في اختبار المثالية ، يهمنا أيضا ان نغطي مفهوم الأمثلية بمزيد من الوضوح ، لذلك سنواصل توضيح مفهوم القاعدة السابقة بمثال مبسط بدلا من تطبيقه على المصفوفة الأصلية اختصارا للعمليات الحسابية المطلوبة ، ثم ننقل هذا المفهوم بعد استيعابه للتطبيق على المشكلة الأصلية .

بفرض ان المصفوفة التالية تمثل جدول الحـسـل المبدئي الممكن لمشكلة نقل ومطلوب اجراء اختبار المثالية عليها وفقا للقاعدة التي طرحناها في هذا الجزء .

المخزن المصنع	ب ١	ب ٢	طاقة المصنع
أ ١	٣ ٥٠	٦ ١٠	٦٠
أ ٢	٤	١٠ ٦٠	٦٠
احتياجات المخزن	٥٠	٧٠	١٢٠ ١٢٠

ويتضح من هذا الجدول المبدئي ان المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) هي : أ ١ ب ١ ، أ ١ ب ٢ ، أ ٢ ب ٢

أما الطريق الوحيد او الخلية الوحيدة غير المشغولة (المتغير غير الأساسي) فهي الخلية أو الطريق أ ٢ ب ١ ، ووفقا للقاعدة السابقة : اذا كان الحل الذي تقدمه تلك المصفوفة هو الحل الأمثل فانه من الضروري ان نجد ان تكلفة النقل بالخلية ( أ ٢ ب ١ ) اكبر من التخفيض او توفر الناتج من إعادة الشحن على الطرق

والخلايا الأخرى . ولكن كيف يمكننا حساب ذلك ؟ فيما يلي نوضح كيف يمكن إجراء العمليات الحسابية بهدف المقارنة المطلوبة والتي تقررهما تلك القاعدة .

دعنا نتخيل أننا قررنا شغل الخلية الفارغــــــــــــة (أ ب ٢) لنرى تأثير ذلك على صافي التغير الذي يعتبر بمثابة المؤشر على اختبار المثالية، فإذا فكرنا مثلاً في شغل الخلية (أ ب ١) وليكن بوحدة واحدة فإن صف أ ب ( طاقة المصنع الثاني ) ستزيد إلى ٦١ وحدة، ونحسب نفترض أن طاقات المصنع محددة ، إذن ليس هناك من حل سوى أن يتم تخفيض الخلية المجاورة (أ ب ٢) بمقدار وحدة لأحداث التوازن الذي اختل بشغل الخلية (أ ب ١) بوحدة ، ولكن شغل الخلية (أ ب ١) بوحدة واحدة لا يؤثر فقط على صفها ولكنه أثر على عمودها، إذ يشغلها بوحدة واحدة. يترتب عليه أن تزداد احتياجات المخزن بوحدة واحدة ( تصبح ٥١ )، وهذا لا يصح إذ يتعين الإبقاء على متطلبات المخازن كما هي ، لذا يتعين تخفيض الكمية المنقولة بالخلية (أ ب ١) بوحدة واحدة لأحداث التوازن ، ولكن تخفيض الكمية المنقولة بالخلية (أ ب ١) بمقدار وحدة واحدة وإن كان قد أعاد التوازن إلى العمود (ب ١) إلا أنه أحدث خللاً بالصف (أ ١) إذ ستكون طاقة المصنع (٥٩) وهذا غير حقيقي ويتطلب العمل على إعادة التوازن مرة أخرى عن طريق إضافة وحدة واحدة إلى الخلية (أ ب ٢) . والسؤال الآن أن عمليات إعادة التوازن هذه والتي فرضتها عملية شغل الخلية (أ ب ١) بوحدة واحدة ليس لها انعكاس وتأثير على التكلفة ؟ وما هي النتيجة النهائية أو المحصلة النهائية لإعادة التخصيص من زاوية التكاليف؟ للإجابة على ذلك نقول إن هذه التعديلات لا بد وأن تنعكس تكاليفياً والأمر يحتاج إلى قياس هذا الانعكاس والتأثير. ولكن دعنا نحدد بصورة أوضح التغيرات التي تمت :

شغل الخلية أ<sub>٢</sub> ب<sub>١</sub> بوحدة واحدة يترتب عليه  
التغيرات التالية مجتمعة :

- تخفيض الخلية أ<sub>١</sub> ب<sub>١</sub> بوحدة واحدة
- زيادة الخلية أ<sub>١</sub> ب<sub>٢</sub> بوحدة واحدة
- تخفيض الخلية أ<sub>٢</sub> ب<sub>٢</sub> بوحدة واحدة

ولكن ماهو الانعكاس من ناحية التكاليف لنقرر مما اذا  
كانت المحصلة في صالح هذا التغير ام لا ؟ .

ان الترجمة التكاليفية لهذه التغيرات يمكن حسابها  
كالاتي :

شغل الخلية أ<sub>٢</sub> ب<sub>١</sub> بوحدة واحدة سيؤدي الى زيادة التكلفة  
بمقدار + ٤ جنيه  
تخفيض الخلية أ<sub>١</sub> ب<sub>١</sub> بوحدة واحدة سيؤدي الى تخفيض التكلفة  
بمقدار - ٣ جنيه  
زيادة الخلية أ<sub>١</sub> ب<sub>٢</sub> بوحدة واحدة سيؤدي الى زيادة التكلفة  
بمقدار + ٦ جنيه  
تخفيض الخلية أ<sub>٢</sub> ب<sub>٢</sub> بوحدة واحدة سيؤدي الى تخفيض التكلفة  
بمقدار - ١٠ جنيه  

---

المحصلة النهائية للتغيير - ٣ جنيه

وهذا معناه انه اذا فكرنا في شغل الخلية الفارغة  
أ<sub>٢</sub> ب<sub>١</sub> بمقدار وحدة واحدة فان ذلك سترتب عليه  
انخفاض تكلفة النقل لذلك الحل المبدئي بمقدار ٣ جنيه  
وهذا يعنى ان ذلك الحل المبدئي غير أمثل ، اذ يمكن  
تخفيض تكلفته عن طريق شغل الخلية أ<sub>٢</sub> ب<sub>١</sub> والذي اتضح  
انه من المصلحة ان نقوم بشغلها ، ومن ناحية اخرى اذا  
كان في استطاعتنا توفير ثلاثة جنيهات عن كل وحدة يتم  
نقلها عبر الطريق أ<sub>٢</sub> ب<sub>١</sub> ، فان التوفير في التكلفة  
سيتم تعظيمه لشحن اقصى كمية ممكنة على ذلك الطريق،  
ولكن ماهو الحد الاقصى لعدد الوحدات التي يمكن أن



ننقلها عبر ذلك الطريق ؟ او بمعنى آخر كم عدد الوحدات التي يمكن ان نشغل بها الخلية (١ ب ١) ؟

ان تحديد الكمية ( الحد الاقصى ) التي يمكن ان تنتقل الى الخلية ( ١ ب ٢ ) تتحدد ايضا من خلال حركة التغيرات التي استخدمناها في حساب المحصلة النهائية لتكلفة التغير . فلقد ذكرنا قبل ذلك ان شغل الخلية (١ ب ٢) سيترتب عليه تغييرات في الخلايا الاخرى من تخفيض وزيادة ويمكن ان نعبر عن التخفيض والزيادة باشارة (+) ، اشارة (-) وهذا ما يوضحه الشكل التالي :

		ب ١		ب ٢	
أ ١		٦	+	٣	-
			١٠		٥٠
أ ٢		١٠	-	٤	+
			٦٠		

ومن هذا الشكل يمكن استنتاج ان اضافة اي كمية الى الخلية ١ ب ٢ سيقابلها تخفيض كل من الخليتين ( ١ ب ١ ) ، ( ١ ب ٢ ) بنفس الكمية ، وحيث ان هناك قيودا بعدم السلبية لذا يتعين ان ننقل اقصى كمية الى الخلية ١ ب ٢ شريطة الا يترتب على ذلك ان تصبح كميات احدى الخلايا سالبة ، معنى ذلك انه لا يمكن نقل كمية مقدارها ٦٠ وحدة، لأن ذلك معناه تخفيض الخلية ١ ب ١ بمقدار ٦٠ وحدة، وحيث ان كل الكمية الموجودة بها هي ٥٠ وحدة. اذن ستنقلب تلك الخلية الى كمية سالبة (٥٠ - ٦٠ = - ١٠) وهذا غير صحيح حسب شرط عدم السلبية ، اذن اقصى كمية يمكن نقلها هي تلك الكمية التي لا يترتب عليها ان تتحول اي خلية يتم تخفيضها وفقا للتغيرات التي ستحدث الى كمية سالبة . ومعنى ذلك كله ان كمية الوحدات التي سيتم نقلها الى الخلية عند اعادة التخصيص هي اقل كمية شحن حالية عند الخلايا التي ستخفض ( أي



الخلايا التي علاماتها سالبة في خط السير المرسوم) .

وتطبيقا لهذه القاعدة على المثال المبسط السابق،  
سنجد ان هناك خليتين علامتهما سالبة وهما أ<sub>١</sub> ب<sub>١</sub> ،  
أ<sub>٢</sub> ب<sub>٢</sub> ، كمية الاولى ٥٠ وحدة ، وكمية الثانية ٦٠ وحدة  
اذن الحد الاقصى الذي يمكن نقله الى الخلية أ<sub>٢</sub> ب<sub>١</sub> هو  
٥٠ وحدة . وفيما يلي تصوير للمصفوفة وفقا للاسلوب  
الذي اتبعناه .

٦	٣	١	٢
٦٠	مفر	١	٢
١٠	٤	١	٢
١٠	٥٠	١	٢

٦	٣	١	٢
٥٠ + ١٠	٥٠ - ٥٠	١	٢
١٠	٤	١	٢
٥٠ - ٦٠	٥٠ + مفر	١	٢

تكلفة الجدول بعد التحسين =

$$٦٦٠ = ١٠ \times ١٠ + ٤ \times ٥٠ + ٦ \times ٦٠$$

تكلفة الجدول المبدئي =

$$٨١٠ = ١٠ \times ٦٠ + ٦ \times ١٠ + ٣ \times ٥٠$$

ومن خلال هذه المقارنة نجد ان الحل الثاني قد أدى الى  
انخفاض في اجمالي تكلفة النقل بما قيمته ١٥٠ جنيهه  
(٨١٠ - ٦٦٠) ، وهو تخفيض متوقع ، حيث اننا سنقوم بنقل  
٥٠ وحدة الى الخلية أ<sub>٢</sub> ب<sub>١</sub> والتي تبين من قبل ان أي  
وحدة يتم نقلها عبر تلك الخلية ستعمل على تخفيض  
التكلفة بما قيمته ٣ جنيهات للوحدة الواحدة . اذن اجمالي  
التخفيض المتوقع هو  $٣ \times ٥٠ = ١٥٠$  جنيهه .

هذا المثال البسيط يوضح الخطوات الاساسية في  
اختبار امثلية الحل لمشكلة النقل ، وكذا خطوات تحسين  
الحل اذا ما اتضح ان جدول الحل غير أمثل .

لقد وضع لنا من العرض السابق مفهوم اختبار امثلية  
وتحسين الحل لمشاكل النقل ، ولكن يتعين هنا أن  
نستعرض الطرق التي يمكن استخدامها لاختبار امثلية

حتى يمكن تلمس خطواتها ولامحها ومنهجها واختيار تلك الطريقة التي يمكن ان نعتبرها أسهل وأيسر فـسـي التطبيق ، و يمكن ان يتم اجراء اختبار المثالية لمشاكل النقل باحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الاولى : طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطء)

Stepping Stone Method

الطريقة الثانية: طريقة التوزيع المعـسـدل

Modified Distribution (MODI) Method

وفيما يلي المنهج الذي تبنته كل طريقة في اختبار المثالية .

طريقة نقطة الارتكاز ( حجر الوطء ) :

عندما تكون مشكلة النقل المطلوب حلها واختبار مثالية جولاتها كبيرة بالمقارنة بمشكلة المثال السابق (المكون من أربع خلايا) سنجد ان تصور نمط التفجير المطلوب احداثه لاعادة التخصيص صعبا بعض الشيء، ولهذا توجد بعض الطرق التي تعالج هذا التصور بطريقة أسهل، واحدى هذه الطرق يطلق عليها طريقة نقطة الارتكاز، أو كما يتم ترجمتها في بعض المراجع العربية باسم ( حجر الوطء ) ، وسوف نرى السبب وراء تسميتها بهذا الاسم عند توضيح مفهومها واجراءاتها ،

وقبل ان نستعرض في توضيح عمل طريقة نقطة الارتكاز سنبين أولا مدى التعقيد الذي يصاحب اختبار المثالية وتحسين الحل عندما تكون المشكلة كبيرة نسبيا، ولهذا الغرض سنعود الى مثالنا الاصل الذي بدأنا به مشكلة النقل والذي كان الجدول التالي يمثل الحل المبدئي لها بطريقة الركن الشمالى الشرقى .

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦ ٦٠	١٢ ٩٠	٤ +	٣ +	١٥٠
ب	٨ ٤٠	١٥ ٨٠	٧ ٨٠	٨ ٨٠	١٢٠
ج	٣ ٣٠	١١ ٣٠	٢ ٣٠	٥ ٥٠	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وبفرض أننا نرغب في اختبار مثالية هذا الجدول المبدئي ، فان ذلك يتطلب اختبار مثالية كافة الخلايا الفارغة ( المتغيرات غير الاساسية ) وتقتضي طريقة نقطة الارتكاز ان يتم تقييم تلك الخلايا غير المشغولة وغير المستغلة وذلك بغرض الوقوف على أثر شغل كل منها على التكاليف ، فاذا تبين ان شغل خلية ما بوحدة واحدة مثلا سيترتب عليه خفض تكاليف النقل ، فان جدول النقل يتم اعادة تعديله للاستفادة من ذلك ، وسبق القول ان عملية التقييم هذه تتم من خلال تحديد خط سير الزيادات والتخفيضات ومن ثم المحصلة النهائية ، الا اننا سنواجه عندما تكبر المصفوفة ان هناك صعوبة في تحديد خط السير ، ولذلك هناك بعض الاعتبارات الواجب ملاحظتها عند تحديد خط السير وهي :

١- يجب ان يكون خط السير او ما يطلق عليه مسار الحلقة المغلقة Closed Loop في صورة خطوط افقية ورأسية وليس في صورة متقاطعة أو قطرية ، أي يتعين ان تكون زوايا المسار كلها زوايا قائمة .

٢- ان يمر خط السير بخلايا مشغولة حتى يمكن تصور النقل منها ، ولكن هذا لا يمنع المرور بخلايا

مشغولة دون الانتقاص منها او المرور بخلايا فارغة دون الاضافة اليها وذلك حفاظا على كميات الصفوف والاعمدة .

٣- يراعى دائما الحفاظ على توازن الصفوف والاعمدة ، بمعنى اذا تم شغل خلية معينة فيتعين انقصاص صفها وعمودها بذات الكمية المنقولة اليها لتستمر حالة التوازن التي كانت موجودة قبل اجراء هذا التعديل .

٤- ينبغى ان نلاحظ ان مسار الحلقة المغلقة عبارة عن مضلع مغلق جميع اركانه يتشكل من خلايا اساسية (أي خلايا مشغولة) ، عدا واحدة فقط وهي الخلية التي يراد تقييمها . ويمكن الاثبات والبرهنة على انه يوجد مضلع مغلق واحد لكل خلية غير اساسية ( فارغة ) ، اى لا يكون هناك سوى مسار حلقة مغلقة واحدة لكل خلية غير أساسية فى الحل .

وتفصيلا فان طريقة محور الارتكاز (حجر الوطء) تركز على تقييم الخلايا غير الاساسية وفقا لمفهوم الحلقة المغلقة ، اذ يتم اختبار الاثر المحتمل على قيمة دالة الهدف ( اجمالي تكلفة النقل ) عند تحويل الخلية الفارغة ( غير الاساسية ) والتي نقوم بتقييمها الى خلية اساسية ، ويتم ذلك عن طريق رسم المسار ، وتحديد التغيرات الموجبة والتغيرات السالبة أو ما يطلق عليه سلسلة الزوائد والنواقص (+ ، - ) ، ويمكن ان نقوم بذلك بسهولة عن طريق وضع اشارة (+) فى الخلية المطلوب تقييمها ( لأن اعادة التوزيع اذ تم سينتج عنه اضافة كمية الى تلك الخلية ) ، ثم نبدأ باستكمال المسار وبوضع الاشارة (-) فى اول خلايا المسار ثم نستمر فى استكمال الزوائد والنواقص وفقا لذلك المسار . مع ملاحظة أن اختلاف الاتجاه سواء مع عقارب الساعة أو عكسها لا يؤدى

الى اختلاف النتيجة .

ولتوضيح العمليات السابقة حسابيا وعمليا نعود الى جدول الحل المبدئي السابق ، والذي يتضح منه وجود ستة خلايا غير اساسية ( فارغة ) هي الخلايا :

ا ع ، ا ل ، ب س ، ب ل ، ج س ، ج ص

ويتم تقييم اثر شغل كل خلية من تلك الخلايا على التكلفة ويتم ذلك على خطوتين الاولى تحديد المسار، والثانية حساب صافي التغيرات فى التكلفة ، وفيما يلى تطبيق لهاتين الخطوتين على كل خلية فارغة كالاتي :

الخلية ا ع :

المسار : من ( ب ع ) الى ( ب ص ) الى ( ا ص ) الى ( ا ع )  
صافي التغير فى التكلفة =  $- 7 + 15 - 12 + 4 =$  صفر جنيه

الخلية ا ل :

المسار: من ( ح ل ) الى ( ج ع ) الى ( ب ع ) الى ( ب ص ) الى ( ا ص ) الى ( ا ل ) .  
صافي التغير فى التكلفة =  $- 5 + 2 - 7 + 15 - 12 + 3 =$  - 4 جنيه .

الخلية ب س :

المسار: من ( ا س ) الى ( ا ص ) الى ( ب ص ) الى ( ب س )  
صافي التغير فى التكلفة =  $- 6 + 12 - 15 + 8 =$  - 1 جنيه

الخلية ب ل :

المسار: من ( ب ع ) الى ( ج ع ) الى ( ج ل ) الى ( ب ل )  
صافي التغير فى التكلفة =  $- 7 + 2 - 5 + 8 =$  - 2 جنيه

الخلية ج س :

المسار: من ( ا س ) الى ( ا ص ) الى ( ب ص ) الى ( ب ع ) الى ( ج ع ) الى ( ج س )  
صافي التغير فى التكلفة =  $- 6 + 12 - 15 + 7 - 2 + 3 =$  - 1 جنيه



الخلية ج ص :

المسار : من (ب ص) الى (ب ع) الى (ج ع) الى (ج ص)  
صافي التغير في التكلفة =  $15 - 7 + 2 - 11 = 1$  جنيه

وباستعراض قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا الستة التي تم تقييمها يتضح ان هناك قيما موجبة وقيما صفرية وقيما سالبة وهذا يعنى مايلي :

١- قيمة صافي التغير في التكلفة ذات الاشارة الموجبة تعنى ان النقل الى ذلك الخلية غير ناجح لانه يترتب عليه ارتفاع في التكاليف ، فمثلا يتبين ان الخلية (ج ص) صافي التغير لها هو ١ جنيه ، وهذا يعنى ان اى وحدة يتم نقلها عبر تلك الخلية ستؤدي الى زيادة التكلفة الاجمالية للنقل بمقدار جنيهه ، ومن ثم فانا نرفض النقل على اى خلية يكون صافي التغير لها قيمة موجبة .

٢- قيمة صافي التغير الصفرية تعنى ان النقل عبر تلك الخلية لن يترتب عليه اى تأثير على التكلفة الاجمالية للنقل ولن يعمل على تحسين دالة الهدف . وان كان لهذه القيمة الصفرية معنى ومغزى هام جدا لمتخذ القرار وسنوضحه في موضع لاحق من هذا الفصل .

٣- اما قيمة صافي التغير في التكلفة ذات الاشارة السالبة والتي ظهرت عند الخلايا (ا ل = -٤) ، (ب س = -١) ، (ب ل = -٢) ، (ج س = -١) فانها تعنى ان النقل عبر تلك الخلايا ناجح وسيترتب عليه انخفاض في التكاليف بمقدار صافي التغير لكل وحدة يتم نقلها . ومعنى ذلك انه اذا ظهرت قيما سالبة لصافي التغير لأي خلية فارغة فان ذلك يعنى ان الحـل الحالي غير أمثل .

وبتطبيق هذه القاعدة على الجدول المبدئي السابق

نستطيع ان نقول انه جدول غير أمثل لوجود قيم صافي  
تغير سالبة للخلايا الفارغة ( المتغيرات غير  
الاساسية ) . ومن ثم يتعين تحسين الحل .

### تحسين الحل :

ما الذي يمكن عمله عندما يتبين من اختبار المثالية  
ان الحل غير أمثل ؟ ان مايمكن عمله في تلك الحالة  
ان نقوم بنفس الاجراء الذي اتبعناه عندما تبين أن  
الحل غير أمثل لمشاكل البرمجة الخطية ، أي العمل على  
تحسين ذلك الحل ، وفي مشاكل النقل يكون تحسين الحل  
عن طريق النقل عبر طريقتي (أو خطية) غير مستخدمة فهي  
جدول الحل غير الامثل . ويسير تحسين الحل في الخطوات  
التالية :

- الخطوة الاولى : تحديد المتغير الداخل .
- الخطوة الثانية : تحديد اكبر قيمة للمتغير الداخل .
- الخطوة الثالثة : تعديل نمط النقل بالجدول المبدئي،  
وحساب تكلفته الجديدة .

وفيما يلي العمليات الحسابية لهذه الخطوات .

### الخطوة الاولى : تحديد المتغير الداخل :

بعد ان تبين ان جدول الحل المبدئي غير أمثل،  
اذن يتعين اختبار الخلية الفارغة (المتغير غير  
الاساسي ) التي سيتم اختيارها للنقل من خلالها ( أي  
لتصبح متغيرا أساسيا ) والتي يتم تسميتها بالمتغير  
الداخل اسوة بالبرمجة الخطية التي تسير على نفس  
المنهج ، لقد كان اختيار المتغير الداخل في مشاكل  
البرمجة الخطية ذات هدف التخفيض (اخترنا مشاكل  
التخفيض لانها تعمل في نفس اتجاه دالة الهدف لمشاكل  
النقل ) ، يتم على أساس ذلك المتغير ذات اكبر قيمة  
بشارة سالبة في صف صافي التغير . وهذا هو نفس  
المعيار الذي سيتم وفقا له اختيار المتغير الداخل،

أي ان الخلية التي سيتم اختيارها للنقل من خلالها هي تلك الخلية ذات اكبر قيمة صافي تغير باشارة سالبة لانها الخلية التي ستقدم اقصى توفير ممكن فى التكلفة بالمقارنة بباقي الخلايا التي لها قيمة صافي تغير سالبة .

وبتطبيق هذا المعيار فان الخلية التي سيتم اختيارها كمتغير داخل هي الخلية (آل) ، حيث يبلغ صافي التغير لها (-٤) وهى اكبر قيمة باشارة سالبة .

#### الخطوة الثانية : تحديد اكبر قيمة للمتغير الداخل :

بعد ان تم اختيار الخلية (ال) كمتغير داخل أو طريق رئيسي جديد فان الخطوة التتالي ذلك هي تقرير عدد الوحدات التي يمكن شحنها عبر ذلك الطريق ، لقد سبق القول فى موضع متقدم من هذا الجزء انه يتعين ان ننقل الى تلك الخلية اقصى كمية ممكنة شريطة الا يترتب على هذا التعديل فى نمط الشحن ظهور خلايا بكميات سالبة احتراماً لشرط عدم السلبية ، ومعنى ذلك ان اقصى كمية يمكن أن تنقل عبر الخلية الممثلة للمتغير الداخل (آل) تتحدد على أساس اقل مقدار فى الخلايا التي ينقل منها فى خط السير المحدد بسلسلة الزوائد والنواقص . ولهذا الهدف سيتم كتابة سلسلة الاشارات ( + ، - ) فى الخلايا التي تمثل خط السير لتلك الخلية ، وبالرجوع الى مصفوفة الحل المبدئي ، نجد اننا وضعنا بالفعل سلسلة الزوائد والنواقص ، ويتبين منها ان اقصى كمية يمكن نقلها عبر الخلية (آل) مقدارها خمسون وحدة ، وهى اقل الكميات بالخلايا التي وضعت بها الاشارة السالبة ، وذلك تجنباً لظهور خلايا بكميات سالبة .

#### الخطوة الثالثة : تعديل نمط النقل بالجدول المبدئي ، وحساب

##### تكلفته الجديدة :

بعد اختيار المتغير الداخل من الخطوة الاولى وهو

(ال) ، وبعد تحديد اقصى كمية يمكن نقلها عبر تلك الخلية ( ٥٠ وحدة ) . تأتي الخطوة الثالثة لتعديل نمط النقل الذى كان بالجدول المبدئي لیتضمن هذه التعديلات . وستتضمن هذه الخطوة ما یأتی :

١- اضافة ٥٠ وحدة الى الخلية التى تم اختيارها للنقل عبرها ( ال ) .

٢- خصم واطافة ذات الكمية (٥٠) الى الخلايا الواقعة على مسار سلسلة الزوائد والنواقص . بمعنى عندما نجد ان اشارة الخلية موجبة يتم اضافة ٥٠ وحدة بالاطافة الى الكمية الموجودة بها ، وعندما نجد ان اشارة الخلية موجبة يتم اضافة ٥٠ وحدة بالاطافة الى الكمية الموجودة بها ، وعندما نجد ان الخلية بها اشارة سالبة نخصم من الكمية الموجودة بها خمسون وحدة .

٣- الكميات الموجودة بخلايا غير واقعة على سلسلة الزوائد والنواقص لایلحقها اي تعديل بل تنقل كما هي بالجدول الجديد .

وفيما یلى الجدول الثانى للحل بعد اجراء كافة خطوات تحسين الحل السابقة :

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦- ٦٠	١٢+ ٤٠	٤	٣ ٥٠	١٥٠
ب	٨- ٩٠	١٥+ ٣٠	٧	٨	١٢٠
ج	٣+ ٨٠	١١- ٨٠	٢	٥	٨٠
احتياجات المخزن	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠
				٣٥٠	



وبناءً على تعديل نمط النقل الذى يظهر بالجدول  
الثاني للحل فان تكاليف النقل الكلية طبقا للجدول  
الثاني للحل تحسب كالاتي :

$$\text{تكاليف النقل الكلية} = 2 \times 80 + 7 \times 30 + 10 \times 90 + 3 \times 50 + 12 \times 40 + 6 \times 60 = 2710 \text{ جنيه} .$$

وبمقارنة تلك التكلفة بتكلفة الجدول المبدئي  
الذى تم اعداده بطريقة الركن الشمالى الشرقى نجد أن  
تكلفة الجدول الثاني تقل عن تكلفة الجدول المبدئي  
بمقدار ٢٠٠ جنيه (٢٩١٠-٢٧١٠) ، أي ان تحسين الحل  
وامادة نمط الشحن ادى الى انخفاض فى التكلفة بمقدار  
٢٠٠ جنيه ، وطبعاً هذا التخفيض كان متوقعاً ، حيث انه  
سيتم نقل ٥٠ وحدة الى الخلية (أل) ، وقد تبين من  
اختبار المثالية ان كل وحدة يتم نقلها عبر تلك  
الخلية تعمل على تخفيض فى التكلفة مقداره ٤ جنيه ،  
اذن التخفيض الكلي = ٥٠ وحدة × ٤ جنيه = ٢٠٠ جنيه .

### اختبار مثالية الحل بالجدول الثاني :

بعد التوصل الى الجدول الثاني للحل يبقى السؤال  
مطروحاً . هل الجدول الثاني يقدم الحل الامثل أم يحتاج  
الى تحسين ؟ وهذا يتطلب اختبار مثالية الحل الذى  
يقدمه الجدول الثاني ، ويتم ذلك باتباع الاسلوب  
السابق توضيحه ، وفيما يلى تقييم اثر شغل كل خلية  
من الخلايا غير الاساسية ( الفارغة ) التى ظهرت بالجدول  
الثاني .

### الخلية أ ع :

المسار : من (أص) الى (ب ص) الى (ب ع) الى (أع)  
صافى التغير فى التكلفة = -٧ + ١٥ - ١٢ + ٤ = صفر جنيه

### الخلية ب س :

المسار : من (ب ص) الى (أص) الى (أس) الى (ب س)  
صافى التغير فى التكلفة = -١٢ + ١٥ - ٨ + ٦ = ١ جنيه



الخلية ب ل :

المسار : من ( أ ل ) الى ( أ ص ) الى ( ب ص ) الى ( ب ل )  
صافي التغير في التكلفة =  $3 - 12 + 15 + 8 = 2$  جنيه

الخلية ج س :

المسار : من ( ج ع ) الى ( ب ع ) الى ( ب ص ) الى ( أ ص ) الى  
( أ س ) الى ( ج س ) .

صافي التغير في التكلفة =  $2 - 7 + 15 + 12 - 3 + 6 = 1$  جنيه .

الخلية ج ص :

المسار : من ( ج ع ) الى ( ب ع ) الى ( ب ص ) الى ( ج ص )  
صافي التغير في التكلفة =  $2 - 7 + 15 + 11 = 1$  جنيه

الخلية ج ل :

المسار : من ( أ ل ) الى ( أ ص ) الى ( ب ص ) الى ( ب ع ) الى  
( ج ع ) الى ( ج ل ) .  
صافي التغير في التكلفة =  $3 - 12 + 15 - 7 + 2 + 5 = 4$  جنيه  
وباستعراض قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا  
الستة التي تم تقييمها يتبين ان هناك خليتين لهما  
قيمة صافي تغير سالبة وهذا يعنى ان الجدول الثاني  
غير أمثل ويحتاج الى تحسين .

تحسين الحل :

١- اختيار المتغير الداخل . وسنجد ان كلا من الخليتين  
ذات صافي التغير السالب مرشحتان للدخول . ويمكن  
الاختيار الجزافي بينهما ، او يمكن اختيار الخلية  
التي يمكن ان يتم نقل كمية اكبر اليها وهذا يتضح  
من الخطوة التالية .

٢- اذا تم اختيار الخلية ( ب س ) كمتغير داخل ستكون  
اقصى كمية يمكن ان تنقل فيها هي ٦٠ وحدة ، اما  
اذا تم اختيار الخلية ( ح س ) لتكون هي المتغير

الداخل فيمكن أن يتم نقل عدد ٦ وحدة أيضاً ، أى أنهما متساويان فى كل المعايير هنا يتم الاختيار الجزافى بينهما ، ولنختار الخلية (ج س) ٣- تعديل نمط النقل بالجدول الثانى وفقاً للتغيرات التى استلزمها تحسين الحل ، وعلى ذلك سيظهر الجدول الثالث بالشكل التالى:

طاقة المصنع	ل	ع	ص	س	المخزن المصنع
١٥.	٣	٤	١٢	٦	أ
	٥.		١٠٠		
١٢.	٨	٧	١٥	٨	ب
		٩.	٣.		
٨.	٥	٢	١١	٣	ج
		٢.		٦.	
٣٥. ٣٥.	٥.	١١.	١٣.	٦.	احتياجات المخزن

وتبلغ تكاليف النقل الكلية للجدول التالى =  $١٥ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ١٢ \times ١٠٠$

$$+ ٧ \times ٩ + ٢ \times ٢ + ٣ \times ٦ = ٢٦٥ \text{ جنيه}$$

ومرة أخرى نعود لاختبار مثالية الحل الذى يقدمه الجدول الثالث.

الخلية (أ س) :

المسار : من (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ع) إلى (ج ع) إلى

(ج س) إلى (أ س)

صافى التغير فى التكلفة =  $١٢ - ١٥ + ٧ - ٢ + ٣ - ٦ = ١$  جنيه

الخلية (أ ع) :

المسار : من (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ع) إلى (أ ع)

صافى التغير فى التكلفة =  $١٢ - ١٥ + ٧ - ٤ = ٠$  صفر جنيه

الخلية (ب س) :

المسار : من (ب ع) إلى (ج ع) إلى (ج س) إلى (ب س)

صافى التغير فى التكلفة =  $٧ - ٢ + ٣ - ٨ = ٠$  صفر جنيه

الخلية (ب ل) :

المسار : من (أ ل) إلى (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ل)

صافى التغير فى التكلفة =  $3 - 12 + 10 - 8 = 2$  جنيه

الخلية (ج ص) :

المسار : من (ج ع) إلى (ب ع) إلى (ب ص) إلى (ج ص)

صافى التغير فى التكلفة =  $2 - 7 + 10 - 11 = 1$  جنيه

الخلية (ج ل) :

المسار : من (أ ل) إلى (أ ص) إلى (ب ص) إلى (ب ع) إلى (ج ع)

إلى (ج ل)

صافى التغير فى التكلفة =  $3 - 12 + 10 - 7 + 2 - 5 = 4$  جنيه

ومن هنا يتبين أن جدول الحل الثالث هو الجدول الأمثل حيث أن

قيمة صافى التغير لجميع الخلايا الفارغة إما صفرية أو موجبة .

### طريقة التوزيع المعدل لاختبار المثالية

بالإضافة إلى الطريقة الأولى التى استخدمناها فى اختبار

المثالية وهى طريقة نقطة الارتكاز (حجر الوطء)، توجد طريقة ثانية

لإجراء هذا الاختبار مبنية على استخدام المتغيرات الثنائية Daul

variables يطلق عليها طريقة التوزيع المعدل Modified

Distribution Method واختصاراً تعرف باسم (MODI)، وهى

بالمقارنة بطريقة نقطة الارتكاز تعتبر أسهل وأكفاً ومنطقية لاختبار

مثالية أى حل ممكن لمشكلة النقل، إذ يمكن باستخدامها إجراء اختبار

المثالية دون الحاجة إلى رسم مسارات محور الارتكاز، من ناحية أخرى

فإن قيود الثنائية لمشكلة النقل تتصف بأن لها تكوين خاص يتيح

إجراء اختبار المثالية بسهولة وسرعة .

وقد يكون من المفيد للقارئ أن يقف على الأساس المنطقى

العلمى لهذه الطريقة قبل أن ندخل فى استخدامها فى التطبيق الفعلى

خاصة وأنه قد سبق أن تعرضنا فى الفصل الثالث من هذا الكتاب إلى

مفهوم الثنائية فى البرامج الخطية، ومن ثم سيكون تناول المنطق

العلمى لهذه الطريقة قد سبقه فهم كاف للأساس الرياضى الذى تبينى عليه.

ولتوضيح مقزى ومفهوم طريقة التوزيع المعدل سنستعرض أولاً الصياغة الأولية، والصياغة الثنائية لمشكلة النقل الواردة بالمثال الذى نتعامل معه فى هذا الجزء .

سبق القول فى الفصل الثالث أنه يوجد لكل قيد فى المشكلة الأولية متغير ثنائى يقابله فى المشكلة الثنائية ، لذلك يكون من الافضل قبل الدخول فى تفاصيل هذه الطريقة أن نحدد قيود المشكلة والرموز التى سنستخدمها للتعبير عن المتغيرات الثنائية لها .  
إن قيود المشكلة الأولية بمشكلة النقل تنقسم إلى نوعين من القيود ( راجع الصياغة الرياضية لمشكلة النقل كنوع من مشاكل البرمجة الخطية بمقدمة هذا الفصل ) :

**النوع الأول :** وهو الذى يتعلق بطاقة التوريد أو الانتاج لكل مصنع ( العمود الاخير )

**النوع الثانى :** يتعلق باحتياجات الطلب عند كل مخزن توزيع ( الصف الاخير ) وحيث أن هذا التقسيم سيظل أيضاً هو التقسيم المتبع عند إعداد الصياغة الثنائية لذلك فإننا سنستخدم الرمز ( م و ) كمتغير ثنائى يقابل المصنع ( و ) ، والرمز ( ن ط ) كمتغير ثنائى يقابل المخزن ( ط ) .

وجيث أن القيد الثنائى يقابل متغير قرارى فى المشكلة الأولية ( والمتغير القرارى فى مشكلة النقل هو طريق النقل أو الخلايا ) ، اذن يمكن القول أن كل قيد فى الصياغة الثنائية يقابل خلية من خلايا المصفوفة ، أى يقابل طريق نقل معين ، ويكون الجانب الأيمن من القيد الثنائى عبارة عن مجموع المتغيرين الثنائيين ( م و ) والذى يمثل المصنع ( و ) ، ( ن ط ) والذى يمثل المخزن ( ط ) ، أما الجانب الأيسر للقيد ( ثابت القيد ) فإنه يمثل تكلفة النقل للوحدة من المصنع إلى المخزن

والتي يمكن أن نرمز لها بالرمز (ت و ط) ، ولذلك فإن قيود الثنائية ستأخذ الشكل التالي :

$$م + و + ن \geq ط$$

وهذا القيد الثنائي بهذا الشكل يعنى أن الايراد الحدى الناتج من عملية النقل من المصنع و ( م و ) ، مضافاً اليه الايراد الحدى الناتج من عملية النقل إلى المخزن ط ( ن ط ) أقل من أو يساوى تكلفة النقل للوحدة من المصنع (و) إلى المخزن (ط) ( ت و ط ) .

ويتعين أن نلاحظ خاصية هامة ، وهى أنه عند أى حل ممكن للمشكلة الأولية ( الاصلية ) سنجد أن الفروق بين الجانب الايمن والجانب الايسر لقيود المشكلة الثنائية تعادل تماماً قيم صافى التغير للمتغيرات الأولية ، وحيث أن قيم صافى التغير للمتغيرات الاساسية تكون دائماً مساوية للصفر ، لذلك سنجد أن الجانب الايمن والجانب الايسر لكل قيد ثنائى يقابل متغيراً أساسياً متعادلاً ومتساويان ، وعلى ذلك إذا كان الحل يتضمن عملية نقل من المصنع (و) إلى المخزن (ط) [ أى أنه يمثل متغيراً أساسياً ] ، ومن ثم أخذت المتباينة الثنائية لها الصياغة التالية :

$$م + و + ن \geq ط$$

فانها تصبح معادلة متعادلة الطرفين بسبب أن ذلك القيد الثنائى يقابل متغير اساسى اى خلية مشغولة و تكون المعادلة كالآتى :

$$م + و + ن = ط$$

وهذا الوضع مهم جداً لأنه يسمح لنا مباشرة بايجاد قيم المتغيرات الثنائية .

وفى المقابل لا يمكن معادلة جانبى القيد الثنائى لخلية غير مشغولة لأنها تعتبر متغير غير أساسى وقيمة صافى التغير لها لا تكون مساوية للصفر .

خلاصة ما تقدم أن القيد الثنائى للخلايا المشغولة يتحول إلى معادلة تلقائية لأن صافى التغير لتلك الخلية = صفر ، أما القيد الثنائى



للخلايا الفارغة ( المتغيرات غير الاساسية ) تستمر متباينة ويكون الفرق بين جانبيها يمثل صافى التغير لها. وفيما يلي الصياغة الرياضية لمشكلة النقل التي وردت بالمثال الأصلي ، وسنورد هذه الصياغة بشكلها أى الصياغة الأولية ، والصياغة الثنائية

### أولاً : الصياغة الأولية للمشكلة :

الهدف : تخفيض ٦ أس + ١٢ أم + ٤ أع + ٣ آل + ٨ ب س + ١٥ ب ص  
 + ٧ ب ع + ٨ ب ل + ٢ ج س + ١١ ج ص + ٢ ج ص + ٢ ج ع + ٥ ج ل  
 بشرط أن :

$$\begin{aligned} \text{أس} + \text{أم} + \text{أع} + \text{آل} &\geq ١٥. \text{ ( طاقة المصنع أ )} \\ \text{ب س} + \text{ب ص} + \text{ب ع} + \text{ب ل} &\geq ١٢. \text{ ( طاقة المصنع ب )} \\ \text{ج س} + \text{ج ص} + \text{ج ع} + \text{ج ل} &\geq ٨. \text{ ( طاقة المصنع ج )} \\ \text{أس} + \text{ب س} + \text{ج س} &\geq ٦. \text{ ( احتياجات المخزن س )} \\ \text{أم} + \text{ب ص} + \text{ج ص} &\geq ١٢. \text{ ( احتياجات المخزن ص )} \\ \text{أع} + \text{ب ع} + \text{ج ع} &\geq ١١. \text{ ( احتياجات المخزن ع )} \\ \text{آل} + \text{ب ل} + \text{ج ل} &\geq ٥. \text{ ( احتياجات المخزن ل )} \\ \text{جميع المتغيرات} &\leq \text{صفر} \text{ ( شرط عدم السلبية )} . \end{aligned}$$

### ثانياً : الصياغة الثنائية للمشكلة : ( م المصنع ، ن المخزن )

الهدف : تعظيم ١٥ م ١ + ١٢ م ٢ + ٨ م ٣ + ٦ ن ١ + ١٣ ن ٢ +

$$١١ ن ٣ + ٥ ن ٤$$

بشرط أن :

$$\begin{aligned} \text{م ١} + \text{ن ١} &\geq ٦ \text{ ( أ — س )} \\ \text{م ١} + \text{ن ٢} &\geq ١٢ \text{ ( أ — ص )} \\ \text{م ١} + \text{ن ٣} &\geq ٤ \text{ ( أ — ع )} \\ \text{م ١} + \text{ن ٤} &\geq ٣ \text{ ( أ — ل )} \\ \text{م ٢} + \text{ن ١} &\geq ٨ \text{ ( ب — س )} \\ \text{م ٢} + \text{ن ٢} &\geq ١٥ \text{ ( ب — ص )} \\ \text{م ٢} + \text{ن ٣} &\geq ٧ \text{ ( ب — ع )} \end{aligned}$$

$$٢م + ٤ن \geq ٨ \quad (ب \text{ — } ل)$$

$$٢م + ١ن \geq ٢ \quad (ج \text{ — } س)$$

$$٢م + ٢ن \geq ١١ \quad (ج \text{ — } ص)$$

$$٢م + ٣ن \geq ٢ \quad (ج \text{ — } ع)$$

$$٢م + ٤ن \geq ٥ \quad (ج \text{ — } ل)$$

وفيما يلي شرح توضيحي لكيفية اختبار المثالية بطريقة التوزيع المعدل بالتطبيق على الجدول المبدئي لمشكلة النقل للمثال الذي طرحناه في مقدمة هذا الفصل ، وفيما يلي نعيد تصوير ذلك الجدول المبدئي والذي تم اعداده بطريقة الركن الشمالى الشرقى لنرى كيف يمكن تطبيق اختبار المثالية عليه وفقاً لهذه الطريقة .

طاقة المصنع	ل	ع	ص	س	المخزن المصنع
١٥٠	٣	٤	١٢	٦	أ
			٩٠	٦٠	
١٢٠	٨	٧	١٥	٨	ب
		٨٠	٤٠		
٨٠	٥	٢	١١	٣	ج
	٥٠	٣٠			
٣٥٠ ٣٥٠	٥٠	١١٠	١٣٠	٦٠	احتياجات المخزن

ويتبين من هذا الجدول المبدئي انه سيتم وفقاً له الشحن عبر ستة طرق ، أى أن هذا الجدول المبدئي يحتوى على ستة متغيرات اساسية ( الخلايا المشغولة ) ، والقيود الثنائية المقابلة لتلك المتغيرات الأولية الأساسية هي : ( يلاحظ أن تلك القيود أخذت صورة معادلات متساوية الجانبين بسبب ما ذكرناه من أن قيم صافى التغير لتلك المتغيرات الأساسية تساوى صفر ) .

$$١م + ١ن = ٦ \quad (أ \text{ — } س)$$

$$١م + ٢ن = ١٢ \quad (أ \text{ — } ص)$$

$$٢م + ٢ن = ١٥ \quad (ب \text{ — } ص)$$

$$م ٢ + ن ٢ = ٧ \quad (ب \text{ ————— } ع)$$

$$م ٢ + ن ٢ = ٢ \quad (ج \text{ ————— } ع)$$

$$م ٢ + ن ٤ = ٥ \quad (ج \text{ ————— } ل)$$

ويمكن أن نلاحظ من هذه المعادلات أن عددها ستة معادلات وتحتوى على سبعة متغيرات مجهولة القيمة هي (م ١ ، م ٢ ، م ٣ ، ن ١ ، ن ٢ ، ن ٣ ، ن ٤) ، وحتى يمكن إيجاد قيم تلك المتغيرات الثنائية يتطلب الأمر تحديد قيمة إحدى هذه القيم المجهولة إذ يصبح بعدها من السهل الحصول على قيم المتغيرات الستة الأخرى ، وهذا يعنى أنه لا بد من إفتراض قيمة اختيارية لمتغير واحد من تلك المتغيرات السبعة المجهولة القيمة ، عندئذ يكون هناك تساوى بين عدد المعادلات وعدد المتغيرات المجهولة القيمة الأمر الذى يمكننا من إيجاد هذه القيم ، ولذلك يمكن اختيار أحد المتغيرات الثنائية السبعة وإعطائه تحكيمياً قيمة صفرية (وذلك بصرف النظر عن ذلك المتغير الثنائى الذى سيتم اختياره) .

وبفرض أننا اخترنا أن يكون قيد طاقة المصنع الأول (م ١) = صفر، عندئذ يمكن إيجاد قيم المتغيرات الثنائية الستة المجهولة كالاتى :

$$\text{من المعادلة الأولى} \quad (م ١ + ن ١ = ٦) \text{ ستكون قيمة ن ١} = ٦$$

$$\text{ومن المعادلة الثانية} \quad (م ١ + ن ٢ = ١٢) \text{ ستكون قيمة ن ٢} = ١٢$$

$$\text{ومن المعادلة الثالثة} \quad (م ٢ + ن ٢ = ١٥) \text{ ستكون قيمة م ٢} = ٣$$

$$\text{ومن المعادلة الرابعة} \quad (م ٢ + ن ٣ = ٧) \text{ ستكون قيمة ن ٣} = ٤$$

$$\text{ومن المعادلة الخامسة} \quad (م ٢ + ن ٤ = ٢) \text{ ستكون قيمة م ٢} = -٢$$

$$\text{ومن المعادلة السادسة} \quad (م ٢ + ن ٤ = ٥) \text{ ستكون قيمة ن ٤} = ٧$$

ويمكن إيجاد هذه القيم بصورة عملية مبسطة ومرتبطة - وأن كانت تقوم على نفس الأساس - أثناء جولات الحل وبدلاً من انفصالها عنها كالاتى :

١- طالما اخترنا أن يكون قيد طاقة المصنع الأول = صفر ، إذن يتم أمام صف المصنع الأول وعلى يسار المصفوفة وتحت صف جديد يكون

عنوانه تكلفة الصف وضع القيمة صفر .

٢- يتم إضافة صف جديد أسفل المصفوفة ويكون عنوانه تكلفة العمود .

٣- لايجاد قيم تكاليف الصفوف والاعمدة ( المتغيرات الثنائية ) نطبق

المعادلة التالية :

تكلفة النقل بالخلية المشغولة = تكلفة صف تلك الخلية + تكلفة

عمود تلك الخلية = مجموع تكلفتى صفها وعمودها

وفيما يلى نوضح كيف يمكن ايجاد هذه القيم :

- نبدأ بأول خلية بالصف الأول فإذا كانت مشغولة نطبق عليها المعادلة

السابقة وفعلاً سنجدها مشغولة وبتطبيق المعادلة عليها ينتج

الآتى :

٦ ( تكلفة النقل بتلك الخلية ) = تكلفة صفها + تكلفة عمودها

٦ = صفر + تكلفة عمودها

٦ = تكلفة عمودها

إذن نكتب أسفل العمود س أمام تكلفة العمود القيمة ٦ وهى نفس

القيمة التى حصلنا عليها للمتغير الثانى ن ١ .

- ثم نتحرك للخلية التالية بالصف الأول فنجدها مشغولة فنطبق

عليها المعادلة وتكون العمليات الحسابية كالآتى :

( الخلية أ ص ) ١٢ ( تكلفة النقل بالخلية ) = صفر + تكلفة عمودها

١٢ = تكلفة عمودها

إذن تكلفة العمود الثانى = ١٢ ونكتبها أسفل العمود الثانى ، ونلاحظ

أيضاً أنها نفس القيمة للمتغير الثانى ن ٢

- ثم نتحرك فى نفس الصف الأول سنجد أن باقى الخلايا بذلك الصف

فارغة إذن نتركها وننتقل إلى الصف الثانى فنجد أن أول

خلية به فارغة نتركها أيضاً، بعد ذلك نجد أن الخلية التالية

( ب ص ) مشغولة إذن نطبق المعادلة عليها ( الخلية ب ص ) ١٥

( تكلفة النقل بالخلية = تكلفة صفها + ١٢ ) ( سبق الحصول عليها )

إذن تكلفة الصف الثانى = ٢

- وهكذا حتى يتم استكمال باقى تكاليف الصفوف والاعمدة ، ويظهر ذلك من خلال التعديلات التى أجريناها على الجدول المبدئى  
والذى يظهر على الشكل التالى :

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠	صفر
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠	٣
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠	٢-
احتياجات المخزن	٦	١٣	١١	٥	٣٥٠	٣٥٠
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٧		

٤- يمكن الحصول على قيمة صافى التغير للخلايا الفارغة بفرض  
اختبار مثاليتها من المعادلة التالية :  
قيمة صافى التغير للخلية الفارغة = تكلفة النقل بتلك الخلية -  
( تكلفة صفها + تكلفة عمودها ) .

وفيما يلى نقوم بتطبيق هذه المعادلة للحصول على قيم صافى  
التغير للخلايا الفارغة بالجدول المبدئى ، وبعد حسابها يتم تسجيلها  
داخل الخلية موضوعة فى دائرة لتمييزها عن الكميات المنقولة بالخلايا  
المشفولة :

$$\text{صافى التغير للخلية أ ع} = ٤ - (\text{صفر} + ٤) = \text{صفر}$$

$$\text{صافى التغير للخلية أ ل} = ٣ - (\text{صفر} + ٧) = ٤-$$

$$\text{صافى التغير للخلية ب س} = ٨ - (٦ + ٣) = ١-$$

$$\text{صافى التغير للخلية ب ل} = ٨ - (٧ + ٣) = ٢-$$

$$\text{صافى التغير للخلية ج س} = ٣ - (٦ + ٢-) = ١-$$



صافى التغير للخلية جـ ص = ١١ - ( ١٢ + ٢ - ) = ١

ولو قارنا تلك النتائج بما سبق أن وصلنا اليه من حساب صافى التغير فى التكلفة بطريقة نقطة الارتكاز سنجد أنهما متطابقتان تماماً ، ولذلك فإن قاعدة اختبار المثالية ستكون هى نفسها التى اتبعت فى طريقة نقطة الارتكاز ، أى إذا اتضح أن هناك قيم صافى تغير سالبة لأى خلية من الخلايا الفارغة يكون الحل غير أمثل ويحتاج إلى تحسين، وبتطبيق تلك القاعدة على الخلايا الفارغة بالجدول المبدئى السابق يتضح أن هناك أربعة خلايا منها لها قيم صافى تغير سالبة ، إذن الحل الموجود بالجدول المبدئى السابق يعتبر حل غير أمثل ويتمين العمل فى جولات تالية لتحسين هذا الحل .

ويجدر أن نلفت النظر هنا أن خطوات تحسين الحل هى نفسها التى اتبعناها فى الجزء السابق ، وبإتباع تلك الخطوات فإنه يمكن تحسين جدول الحل الحالى كالتالى :

**تحسين الحل :**

١- تعيين المتغير الداخلى ، وهى الخلية ذات أكبر قيمة بإشارة سالبة من قيم صافى التغير أى أنها الخلية ( أ ل ) .

٢- تحديد أقصى كمية يمكن نقلها بتلك الخلية ، ولهذا الغرض يتم كتابة سلسلة الاشارات ( + ، - ) فى الخلايا التى تمثل خط السير لتلك الخلية [ من ( أ ص ) إلى ( ب ص ) إلى ( ب ع ) إلى ( جـ ع ) إلى ( جـ ل ) إلى ( أ ل ) ] ، وتحديد أقل كمية من الكميات الموجودة بالخلايا التى وضعت بها الاشارة السالبة ، وسنجد أن تلك الكمية هى خمسون وحدة .

٣- تعديل نمط الشحن بالجدول المبدئى بوضع خمسون وحدة بخلية المتغير الداخلى ( أ ل ) ، ثم اضافة نفس الكمية أو خصمها من الكميات الموجودة بخط السير وفقا للإشارة الموضوعة بتلك الخلايا، و أن تبقى الكميات التى توجد بعيداً عن خط السير على ما هى عليه .

وبعد اجراء هذه الخطوات يتم تصوير جدول تحسين الحل وحساب تكلفته واختبار مثاليته باضافة عمود إضافي وصف إضافي لحساب تكلفة الصف وتكلفة العمود تمهيداً لتحديد قيمة صافي التغير للخلايا الفارغة .

المخزن / المصنع	س	هـ	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠	صفر
ب	٨	١٥	٧	٨	١٢٠	٣
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠	٢٠
احتياجات المخزن	٦	١٣	١١	٥	٣٥٠	٣٥٠
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٣		

ويتضح أيضاً أن هذا الجدول لا يمثل الحل الأمثل ، لذا يتم تحسينه وفق الخطوات السابقة، وفيما يلي جدول تحسين الحل :

المخزن / المصنع	س	هـ	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	١	١٢	٤	٣	١٥٠	صفر
ب	صفر	١٥	٧	٨	١٢٠	٣
ج	٦	١١	٢	٥	٨٠	٢٠
احتياجات المخزن	٦	١٣	١١	٥	٣٥٠	٣٥٠
تكلفة العمود	٥	١٢	٤	٣		

وبتفحص قيم صافى التغير للخلايا الفارغة بالجدول الثالث يتبين أنها جميعاً إما موجبة أو صفرية ، وهذا يعنى أن الجدول الثالث يمثل الحل الامثل وتكون تكلفة النقل فى هذا الجدول هى :

$$\text{اجمالى تكلفة النقل} = 2 \times 60 + 7 \times 90 + 10 \times 20 + 2 \times 50 + 12 \times 100 = 2600 \text{ جنيه.}$$

وبمقارنة جدول الحل الامثل واجمالى تكلفته بالجدول الامثل السابق التوصل اليه بطريقة نقطة الارتكاز نجد أنهما متطابقان من حيث نمط الشحن وتكلفة النقل .

مثال محلول :

فيما يلى الجدول المبدئى لمشكلة نقل وقد تم اعداده بطريقة فوجل التقريبية والمطلوب اختبار مثاليته مستخدماً :

١- طريقة محور الارتكاز .

٢- طريقة التوزيع المعدل.

طاقة المصنع	ل	ع	ح	س	المخزن المصنع
١٥٠	٣	٤	١٢	٦	أ
	٥٠	٩٠	١٠		
١٢٠	٨	٧	١٥	٨	ب
			١٢٠		
٨٠	٥	٢	١١	٣	ج
		٢٠		٦٠	
٣٥٠	٥٠	١١٠	١٣٠	٦٠	احتياجات المخزن
٣٥٠					

الحل :

أولاً : استخدام طريقة محور الارتكاز فى اختبار مثالية الجدول السابق :

وفقاً لطريقة محور الارتكاز يتم تقييم أثر شغل كل خلية من

الخلايا الفارغة ويتم ذلك على خطوتين ، الأولى تحديد مسار الخلية ،  
والثانية حساب صافى التغير فى التكلفة . وفيما يلى تطبيق لهاتين  
الخطوتين على الخلايا الفارغة كالاتى :

الخلية ( أ س ) :

المسار : من ( أ ع ) إلى ( ج ع ) إلى ( ج س ) إلى ( أ س )

صافى التغير فى التكلفة =  $-4 + 2 - 3 + 6 = 1$  جنيه

الخلية ( ب س ) :

المسار : من ( ج س ) إلى ( ج ع ) إلى ( أ ع ) إلى ( أ ص ) إلى ( ب ص )  
إلى ( ب س )

صافى التغير فى التكلفة =  $-3 + 2 - 4 + 12 - 10 + 8 = 5$  جنيه

الخلية ( ب ع ) :

المسار : من ( أ ع ) إلى ( أ ص ) إلى ( ب ص ) إلى ( ب ع )

صافى التغير فى التكلفة =  $-4 + 12 - 10 + 7 = 5$  جنيه

الخلية ( ب ل ) :

المسار : من ( أ ل ) إلى ( أ ص ) إلى ( ب ص ) إلى ( ب ل )

صافى التغير فى التكلفة =  $-3 + 12 - 10 + 8 = 7$  جنيه

الخلية ( ج ص ) :

المسار : من ( ج ع ) إلى ( أ ع ) إلى ( أ ص ) إلى ( ج ص )

صافى التغير فى التكلفة =  $-2 + 4 - 12 + 11 = 1$  جنيه

الخلية ( ج ل ) :

المسار : من ( أ ل ) إلى ( أ ع ) إلى ( ج ع ) إلى ( ج ل )

صافى التغير فى التكلفة =  $-3 + 4 - 2 + 5 = 4$  جنيه

وحيث أن كل قيم صافى التغير فى التكلفة لجميع الخلايا  
الفارغة إما موجبة أو صفرية ، إذن يمكن القول أن الحل المبدئى الذى  
تم ايجاده باستخدام طريقة فوجل التقريبية هو الحل الأمثل . ولعله من  
المناسب قبل أن نترك هذه النقطة أن نؤكد مرة أخرى على أن طريقة  
فوجل تعمل دائماً على تقريب الحل المبدئى من الحل الأمثل بعكس الحال

مع طريقة الركن الشمالى الشرقى ، إذ تبين عند اختبار مثالية الحل المبدئى الذى توصلنا اليه باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى أنه حل غير أمثل واحتاج إلى جولتين لتحسين الحل.

ثانياً : اختبار مثالية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل :

سيتم اختبار المثالية وفق هذه الطريقة بتطبيق الخطوات التالية .

١- اعادة كتابة مصفوفة الجدول المبدئى بعد اضافة عمود جديد على يسارها عنوانه تكلفة الصف ، كذلك اضافة صف جديد اسفلها بعنوان تكلفة العمود .

٢- وضع القيمة (صفر) أمام أول صف فى العمود الجديد كتكلفة للصف الاول . ثم يتم إيجاد باقى قيم تكلفة الصفوف وكذلك قيم تكلفة الاعمدة من خلال تطبيق المعادلة التالية :

تكلفة النقل بالخلية المشغولة = مجموع تكلفتى صفها وعمودها .

فمثلاً الخلية أ ص مشغولة وتكلفة النقل بها ١٢ جنيه وتكلفة صفها

صفر إذن تكلفة عمودها = ١٢

١٢ = صفر + تكلفة عمودها

∴ تكلفة العمود الثانى = ١٢ وهكذا لباقى الخلايا المشغولة

٣- حساب قيمة صافى التغير للخلية الفارغة ، ويتم ذلك بتطبيق المعادلة :

صافى التغير للخلية الفارغة = تكلفة النقل بتلك الخيلة - ( مجموع

تكلفتى صفها وعمودها ) فمثلاً صافى التغير للخلية الفارغة أ س =

٦ - ( صفر + ٥ ) = ١

وهكذا بالنسبة لباقى الخلايا الفارغة .

وفيما يلى الجدول المبدئى بعد اعداد العمليات الحسابية

السابقة:



المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ (١)	١٢ ١٠	٤ ٩	٣ ٥	١٥٠	صفر
ب	٨ (صفر)	١٥ ١٢	٧ (صفر)	٨ (٢)	١٢٠	٣
ج	٣ ٦	١١ (١)	٢ ٢	٥ (٤)	٨٠	٢٠
احتياجات المخزن	٦	١٣	١١	٥	٣٥٠ ٣٥٠	
تكلفة العمود	٥	١٢	٤	٣		

ويتضح من الجدول السابق أن قيم صافي التغير للخلايا الفارغة كلها قيم موجبة أو صفرية وهذا يعنى أن هذا الجدول يمثل الحل الأمثل ولا يحتاج الأمر لتحسينه .

### حالات خاصة لمشاكل النقل

عند حل مشكلة النقل قد تواجهنا بعض الحالات الخاصة التي تحتاج إلى إجراء عمل تحويل ما على طريقة وخطوات الحل لتتناسب مع طبيعة الحالة الخاصة ، والجزء التالى سيتناول بعض التعقيدات التي قد تنشأ عن حل مشكلة النقل ، وهذه الحالات إجمالاً هي :

أولاً : حالة تعدد الحلول المثلى .

ثانياً : مشكلة الحل المنتكس .

ثالثاً : مشكلة النقل ذات هدف التعظيم .

رابعاً : حالة عدم توازن العرض الكلى مع الطلب الكلى .

خامساً : حالة الطرق الممنوع النقل عليها .

وفيما يلى مناقشة تفصيلية لكيفية معالجة والتعامل مع كل

واحدة من الحالات السابقة :

## أولاً: حالة تعدد الحلول المثلى: Multiple Optimal Solutions

كما سبق و أوضحنا في الفصل الثاني أنه قد يحدث تعدد في الحلول المثلى لمشاكل البرمجة الخطية ، كذلك فإنه قد يكون هناك أكثر من حل واحد أمثل لمشكلة النقل ، ويمكن التعرف على وجود أكثر من حل واحد أمثل لمشكلة النقل عندما تظهر خلايا غير أساسية ( طرق غير مستغلة ) لها قيمة صافى تغير مساوية للصفر ، لأن هذا يعنى أنه يمكن التوصل إلى حل أمثل آخر باختيار ذلك الطريق غير الرئيس كمتغير داخل ، والدخول في جولة تالية لتحسين الحل ، نصل منها إلى حل أمثل جديد ، ولكن نذكر هنا أن كافة الحلول المثلى المتعددة لذات المشكلة سيكون لها جميعاً نفس قيمة دالة الهدف والا فلا يمكن وصفها بأنها حالة لها تعدد في الحلول المثلى .

ولتوضيح ذلك تطبيقياً وعملياً ، نتناول فيما يلى الجدول المبدئى السابق مباشرة والذي تم اعداده بطريقة فوجل التقريبية والذي يظهر على الشكل التالى ( والذي يظهر فيه قيم صافى التغير للخلايا الفارغة في دوائر ) .

المخزن / المصنع	س	ح	ع	ل	طاقة المصنع
أ	٦ ①	١٢ ١٠	٤ ٩	٣ ٥	١٥٠
ب	٨ صفر	١٥ ١٢	٧ صفر	٨ ٢	١٢٠
ج	٣ ٦	١١ ①	٢ ٢	٥ ④	٨٠
احتياجات المخزن	٦	١٣	١١	٥	٣٥٠ / ٣٥٠

ويتضح من هذا الجدول أنه يمثل الحل الأمثل حيث أن قيم صافى التغير للخلايا الفارغة كلها قيم موجبة أو صفرية . إلا أننا نستطيع الدخول في جولات تالية للحل ليس بفرض تحسينه فهو حل أمثل

ولكنه للوصول منه إلى حلول مثلى أخرى ، فسنجد مثلاً أن قيمة صافى التغير للخلية (ب س) تساوى صفر ، وهذا يعنى أنه إذا تم شغل تلك الخلية والنقل عليها فإن تكلفة الحل ستزيد بمقدار صفر ، أى لن تزيد تكلفة الحل ، وطالما سيتغير نمط الشحن مع زيادة فى التكلفة ، إذن يعتبر النمط الجديد للشحن بمثابة حل أمثل آخر، ونفس الشيء للخلية (ب ع) . وفيما يلى سنوضح كيف يمكن الحصول على حل أمثل آخر باختيار الخلية (ب س) كمتغير داخل والدخول فى جولة تالية للحل نصل منها إلى حل أمثل جديد.

باختيار الخلية (ب س) كمتغير داخل جديد ، إذن يتعين تحديد أقصى كمية يمكن شحنها عبر تلك الخلية ، وهذا يتحدد عن طريق تحديد المسار إلى تلك الخلية ، ان المسار لتلك الخلية هو : - (ج س) ، + (ج ع) ، - (أ ع) ، + (أ ص) ، - (ب ص) ، + (ب س) وحيث أن أقل كمية فى الخلايا ذات الإشارة السالبة على ذلك المسار هى ٦ وحدة والموجودة بالخلية (ج س) . إذن يتم نقل كمية مقدارها ٦ وحدة إلى الخلية (ب س) ، ثم يتم اعداد المصفوفة الجديدة وحساب التكلفة واختبار مثاليتها ، كما هو مبين من الجدول التالى :

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ (١)	٧	٣	٥	١٥٠	صفر
ب	٦	٦	٦	٢	١٢٠	٣
ج	٣ (١)	١١ (صفر)	٨	٥ (٣)	٨٠	١ -
احتياجات المخزن	٦	١٣	١١	٥	٣٥٠ ٣٥٠	
تكلفة العمود	٥	١٢	٤	٣		

$$\text{تكلفة الحل} = ١٢ \times ٧ + ٤ \times ٣ + ٥ \times ٢ + ٣ \times ٥ + ٨ \times ٦ + ١٥ \times ٦ + ٢ \times ٨ = ٢٦٥٠ \text{ جنيه،}$$

وبذلك نكون قد وصلنا إلى حل أمثل ثانى بنفس التكلفة ، ويمكن أن نصل إلى حل أمثل ثالث إذا تم اختيار الخلية ( ب ع ) كمتغير داخل لأن لها قيمة صافى تغير صفرية ، كذلك يمكن إيجاد حل أمثل رابع باختيار الخلية ( ج هـ ) كمتغير داخل لذات السبب . أى أن مشكلة النقل التى نتعامل معها فى هذا المثال لها أكثر من حل أمثل. إن وجود عدة حلول مثلى لنفس المشكلة يعتبر من المعلومات الغاية فى الأهمية لمتخذ القرار ، إذ سيكون لديه عدة حلول تعطيه مرونة كبيرة لاختيار الحل الأمثل الذى يتناسب مع الظروف المتغيرة ، فإذا تبين للإدارة مثلاً وجود اصلاحات على الطريق (ج س ) لا تمكن الإدارة من استخدامه لشحن كميات من المصنع (ج) إلى المخزن ( س ) ، إذن يمكن للإدارة أن تأخذ بالحل الأمثل الثانى الذى يتحاشى المرور عبر هذا الطريق . ولذلك يتعين أن تقف الإدارة على الحل أو الحلول المثلى المتعددة لمشكلة النقل حتى تتخذ القرار ونعط النقل الذى يتواءم ويتلائم مع ما هو موجود وسائد من ظروف عند اتخاذ القرار ومواجهة أى تغيرات تحدث فى تلك الظروف .

### ثانياً : مشكلة الحل المنتكس Degeneracy

سبق أن تناولنا فى الفصل الثانى من هذا الكتاب معنى الحل المعتل أو المنتكس ، وقد تبين أن ما نقصده بالحل المنتكس هو ذلك الحل الذى تكون فيه قيمة أحد المتغيرات الأساسية مساوية للصفر ، أى أنه يشترط لايجاد حل أساسى ممكن وغير منتكس أن يوجد فى الحل عدد من المتغيرات الموجبة ( أكبر من الصفر ) يتساوى مع عدد قيود المشكلة . وفى مشاكل النقل يتعين أن تكون عدد المتغيرات الأساسية ( الخلايا المشغولة ) تعادل ( عدد الأعمدة + عدد الصفوف - ١ ) ، وعليه فإن الحل فى مشكلة النقل يعانى من مشكلة الانتكاس إذا كان عدد الخلايا المشغولة يقل عن هذا الحد ، ويعتبر الانتكاس أو الحل غير الأساسى بمثابة مشكلة تؤدى إلى نوع من التعقيد، إذ أن هذه الحالة تؤدى إلى تعذر تتابع مسار الحلقة المغلقة عند حساب قيم صافى التغير



للخلايا الفارغة ( غير الاساسية ) . ونود أن نشير هنا إلى أن هذه الحالة كثيرة الحدوث في مشاكل النقل ، ولذلك فقد أثرنا ضرورة توضيح كيفية التعامل معها عند حدوثها . وقد يكون من المفيد أولاً أن نفسر السبب الذي يترتب عليه نشأة حالة الانتكاس في مشاكل النقل . الحقيقة إن مشكلة الانتكاس يتسبب في وجودها أحد وضعين هما :

١- تنشأ مشكلة الانتكاس بسبب أن يأخذ شغل الخلايا وفق طريقة الركن الشمالى الشرقى أحياناً اتجاهاً غير معتاد ، بمعنى أن خط السير عند شغل الخلايا لا يأخذ مساراً منكسراً قائم الزوايا بل قد يأخذ اتجاهاً قطرياً، هنا يكمن السبب فى ظهور مشكلة الانتكاس . ولتوضيح ذلك عملياً سنجرى تعديلاً بسيطاً على مثالنا السابق وذلك بأن نجعل طاقة المصنع (ب) أربعون وحدة فقط ، وطاقة المصنع (ج) مائة وستون وحدة . ثم نرى ما يحدث عند ايجاد الجدول المبدئى الممكن باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى وهذا ما يوضحه الجدول التالى .

طاقة المصنع	ل	ع	ح	س	المخزن المصنع
١٥.	٣	٤	١٢	٦	أ
٤.	٨	٧	١٥	٨	ب
١٦.	٥	٢	١١	٣	ج
٣٥. ٣٥.	٥.	١١.	١٣.	٦.	احتياجات المخزن

ويتضح من هذا الجدول أن مسار طريقة الركن الشمالي الشرقي قد أخذ مساراً في اتجاه غير معتاد ، إذ بعد تخصيص عدد ٤٠ وحدة على



الخلية (ب ص) كان يتعين وفقاً للوضع الطبيعي أن نغادر تلك الخلية في اتجاه افقى إلى المخزن التالى إذا كان قد تم استيفاء المخزن السابق (ص) ، أو نغادر الخلية في اتجاه رأسى لأسفل إلى المصنع التالى إذا كان قد تم استيعاب كل طاقة المصنع (ب) ، أما فى الحالة التى أمامنا الآن فقد حدث الوضعين معاً فى وقت واحد ، أى تم استيفاء المخزن (ص) ، واستيعاب كل طاقة المصنع (ب) ، إذن لن نتحرك أفقياً على يسار تلك الخلية ، ولن نتحرك أسفلها ، ومن ثم سنكون مضطرين إلى التحرك قطرياً إلى الخلية (ج ع) مباشرة (أى خليط من الافقى والرأسى) وذلك للوصول إلى المخزن الجديد والمصنع الجديد ، ويتضح أن التخصيص سيسير بعد ذلك سيراً طبيعياً كما هو معتاد ، ونكون بذلك قد أعدنا جدول الحل الممكن ، وهو حل ممكن لأنه لا يتعارض مع قيود الطاقة أو قيود الاحتياجات ، ولكنه جدول منتكس ، لأن عدد الخلايا المشغولة به (٥ خلايا) فى حين أنه يتعين وفقاً لشروط الحل الاساسى أن تكون عدد المتغيرات الاساسية ( الخلايا المشغولة ) ستة خلايا ( عدد الصفوف + عدد الاعمدة - ١ ) . إذن يمكن القول أنه برغم أن هذا الحل المبدئى يعتبر ممكناً  $Solution\ is\ Feasible$  ، إلا أنه حل منتكس  $Degenerate$  .

٢- قد تنشأ حالة الانتكاس بعد اجراء اختبار المثالية ثم تعديل نمط الشحن لتحسين الحل ، فقد يترتب على تعديل هذا النمط أن يتم اضافة خلية يتم النقل عليها باعتبارها متغير داخل وفى نفس الوقت يتم خروج متغيرين معاً مما يترتب عليه أن تكون عدد الخلايا الاساسية غير متوافقة مع شرط الحل الاساسى . ولتوضيح هذا الوضع نعيد جدول الحل المبدئى لذات المثال الذى نتعامل معه فى هذا الجزء مع اجراء تعديلات مقصودة بهدف التوضيح وهى تعديل طاقة المصنع (ب) لتصبح ٩٠ وحدة والمصنع (ج) ليصبح ٨٠ وحدة ، كذلك جعل احتياجات المخزن (ع) ثمانون وحدة وفيما يلى الجدول المبدئى الممكن بعد اجراء هذا التعديل مع تضمينة كافة

الحسابات اللازمة لاختبار مثاليتة:

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠	صفر
ب	٨	١٥	٧	٨	٩٠	٣
ج	٣	١١	٢	٥	٨٠	٢-
احتياجات المخزن	٦	١٣	٨	٥	٣٢	٣٢
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٧		

$$\text{تكلفة الحل} = 0 \times 0 + 2 \times 3 + 7 \times 0 + 10 \times 4 + 12 \times 9 + 6 \times 6 = 270 \text{ جنيه}$$

ويتبين من هذا الجدول أنه حل مبدئي ممكن وأساسى ولكنه ليس حل أمثل لوجود قيم صافى تغير سالبة. لذا سيتم تحسين الحل، واختيار الخلية (أ ل) متغير داخل ويتم شغلها بأقل كمية فى الخلايا السالبة بخط السير وهو  $[- (أ ص) + (ب ص) - (ب ع) + (ج ع)]$ ،  $-(ج ل) + (أ ل)$  أى أن أقصى كمية هى خمسون وحدة (لاحظ أن تلك الكمية موجودة بخليتين أى تعدد فى المتغيرات المرشحة للخروج). وفيما يلى الجدول الثانى للحل:

طاقة المصنع	ل	ع	ح	س	المخزن المصنع
١٥.	٢	٤	١٢	٦	أ
	٥.		٤.	٦.	
٩.	٨	٧	١٥	٨	ب
			٩.		
٨.	٥	٢	١١	٢	ج
		٨.			
٣٢.	٥.	٨.	١٣.	٦.	احتياجات المخزن
٣٢.					

تكلفة الحل =  $2 \times 8 + 15 \times 9 + 3 \times 5 + 12 \times 4 + 6 \times 6 = 250$  جنيه.

ويتبين من هذا الجدول أنه أفضل من حيث التكلفة من الجدول المبدئي ، إلا أنه جدول حل غير أساسي ، إذ يتضح أن عدد الخلايا المشغولة أصبحت فقط خمسة خلايا وهذا يتعارض مع شرط الحل الأساسي (عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١) . وهذا هو السبب الثاني الذي تنشأ عنه ظاهرة الانتكاس . إذ يدخل متغير واحد داخل إلى الحل ويخرج في الوقت نفسه متغيرين خارجين فتقل بذلك عدد الخلايا المشغولة (المتغيرات الأساسية) ويصبح الحل غير أساسي .

### طريقة علاج مشكلة الحل المنتكس :

يمكن علاج حالة الانتكاس في مشاكل النقل باستخدام ما يمكن أن نطلق عليه استخدام التخصيص الوهمي ( الاصطناعي ) Using an Artificial Allocation ، وهذا يعني عمل تخصيص وهمي لعدد من الخلايا الإضافية لكسر حالة الانتكاس ، وهذا العدد المقترح اضافته كتخصيص وهمي يعادل الفرق بين العدد الحالي من الخلايا الأساسية ( المشغولة ) وبين العدد المفروض توافره وفقاً لشرط الحل الأساسي ( عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١ ) ، على أن تعامل تلك الخلايا الإضافية على أنها ضمن الحل الأساسي وأن تكون كمية كل خلية منها صغيرة جداً

تصل إلى الصفر.

ونظراً لأن حالة الانتكاس بالمثال المعروض أمامنا الآن ( سواء الحالة الأولى أو الثانية ) يتطلب شغل خلية واحدة ( وهمياً ) وجعلها ضمن الحل الاساسى ليستقيم الحل ، فإننا سنفترض أننا اخترنا الخلية ( ب ع ) لحالة الانتكاس التى نشأت بسبب الاتجاه غير المعتاد لطريقة الركن الشمالى الشرقى ، واعتبرناها مخصصة ومشغولة بكمية صغيرة جداً ويرمز لها بالرمز (ش) ، وبذلك يظهر جدول الحل المبدئى الممكن كحل أساسى على الشكل التالى :

المخزن / المصنع	س	ص	ع	ل	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦	١٢	٤	٣	١٥٠	صفر
ب	٨	١٥	٧	٨	٤٠	٣
ج	٣	١١	٢	٥	١٦٠	٢-
احتياجات المخزن	٦	١٣	١١	٥	٣٥٠	٣٥٠
تكلفة العمود	٦	١٢	٤	٧		

ان هذا التخصيص الوهمى للخلية ( ب ع ) قد مكنتنا من اجراء اختبار المثالية كما هو واضح بعمود تكلفة الصف ، وصف تكلفة العمود وقيم صافى التغير التى وضعت فى دوائر ، وبدون هذا التخصيص ما كان فى الامكان اجراء اختبار المثالية ، ثم يتم مواصلة السير فى خطوات تحسين الحل كالمعتاد .

**ثالثاً : مشكلة النقل ذات هدف التعظيم :**

### Maximization Problems

بالرغم من أن كل مشاكل النقل التى كانت بالامثلة التى



تناولناها فى الاجزاء السابقة كانت ذات هدف تخفيض اجمالى تكاليف النقل ، إلا أنه توجد مشاكل نقل أيضاً تتسم بأنها تهدف إلى الوصول إلى الحل الأمثل والذي يعمل على تعظيم دالة الهدف ، ولكن فى هذه الحالة لن تكون معاملات الهدف تمثل تكاليف نقل الوحدة من مصدر انتاجى معين إلى مخزن توزيع معين ، ولكنها ستكون معاملات مطلوب تعظيمها أى أرباح أو كفاءة أو فاعلية إلى غير ذلك من الاهداف التى يرى المشروع العمل على زيادتها إلى أقصى حد ممكن .

وبناء على ما تقدم يمكن القول أن نموذج النقل صالح للتطبيق على نوعيات مختلفة من المشاكل سواء كان هدفها تخفيض التكاليف ، أو تعظيم الارباح . طالما أن المشكلة تتسم بسمات وخصائص تمثل متطلبات هذه الطريقة ، ولعل هذا يؤكد ما سبق أن قلناه فى مقدمة هذا الجزء من أن اطلاق اسم «مشكلة النقل» على هذه الطريقة هو غير حقيقى ومضلل ويوحى بأنها حبيسة الاستخدام والتطبيق لمشاكل النقل . وفيما يلى توضيح لكيفية تعامل طريقة النقل والخطوات المتبعة فى حالة ما إذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم دالة الهدف .

مثال :

بفرض أنه توجد احدى الشركات الضخمة التى تعمل فى مجال الانتاج الزراعى ، ولها ثلاثة مزارع ضخمة أحداها فى مديرية التحرير بشمال الاسكندرية ، والثانية بمنطقة الصالحية ، والثالثة بمنطقة الخطارة بمحافظة الشرقية ، وهذه الشركة تباع منتجاتها فى السوق المحلى لجمهورية مصر العربية ، ولبعض الدول العربية ، ولبعض دول حوض البحر الابيض المتوسط ، وأن ادارة الشركة ترغب أن تحدد أفضل طريقة لتخصيص منتجاتها من محصول القمح على تلك الاسواق الثلاثة الرئيسية ، وعلى أن تكون الكميات المخصصة جميعها لاتزيد عن المحصول المتاح بمزارعها الثلاثة ، ولاتزيد أيضاً عن الكميات المطلوبة للأسواق الثلاثة السابقة . علماً بأن ربح الطن الذى يمكن توليده يتوقف على تكلفة الانتاج لذلك المحصول فى كل مزرعة ،



وتكاليف النقل من المزارع إلى الاسواق ، وكذلك سعر السوق الذي يمكن البيع به ( وهذا يختلف باختلاف السوق ) . ويوضح الجدول التالي كمية العرض المتاحة بكل مزرعة والكمية المطلوبة لكل سوق ، وبيع الطن من كل مزرعة إلى كل سوق :

الأسواق المزارع	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض
مديرية التحرير	١٤	٢٠	١٤	١٤٠
الصالحية	١٥	١٩	١٤	١٢٠
القطارة	١٦	١٨	١٢	٤٠
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ ٣٠٠

الحل :

توجد عدة طرق تستخدم في التعامل مع مشاكل النقل ذات هدف التعظيم ، الا أننا سنركز في الجزء التالي على طريقتين فقط ، احدهما تعمل على تحويل المشكلة من مشكلة ذات هدف تعظيم إلى مشكلة مقابلة ذات هدف تخفيض حتى يمكن تطبيق الخطوات العادية لمنهج طريقة النقل عليها دون أي تغيير ، والطريقة الثانية تسير أيضاً في الخطوات العادية على أن يتم خلالها إجراء تعديلين أولهما في طريقة اختبار المثالية وثانيهما تعديل في مرحلة تحسين الحل . وفيما يلي شرح تفصيلي للطريقتين السابقتين ..

**الطريقة الأولى : تخفيض تكاليف العرض :**

**Minimizing Opportunity Costs** وتهدف هذه الطريقة إلى تحويل مشكلة النقل ذات هدف التعظيم إلى مشكلة تخفيض حتى يمكن السير في نفس الخطوات المعتادة لحل مشكلة النقل ومن ثم تبسيط العمل إلى

أدنى حد ممكن ، ولكن كيف يتم اجراء عملية التحويل هذه ؟ الحقيقة أنه يمكن بسهولة تحويل مشكلة النقل ذات هدف التعظيم إلى مشكلة تخفيض ، عن طريق جعل المعاملات الموجودة بالمصفوفة لا تمثل إرباحاً ، بل تمثل هدفاً يراد تخفيضه ، وليكن هذا الهدف هو تكاليف فرص ، أى بدل أن تمثل تلك المعاملات أرباح نجعلها تمثل تكاليف فرص ، عندئذ يصبح الهدف هو العمل على تخفيض تكاليف الفرص أى استطعنا تحويلها إلى مشكلة ذات هدف تخفيض. فبالنظر للمصفوفة الاصلية سنجد أن أفضل خلية ذات أعلى أرباح هي الخلية التى تمثل شحن القمح من مديرية التحرير إلى أسواق الدول العربية حيث يصل الربح إلى أقصى حد له ( ٢٠ جنيه للطن ) ، ولكن ماذا لو أننا لم نستغل هذا الطريق ؟ ان ذلك معناه أننا سنضطر إلى الشحن عبر خلايا أخرى أقل ربحية وبذلك تكون قد ضاعت فرصة مقدارها الفرق بين أعلى ربح ( ٢٠ جنيه ) وربح أى خلية أخرى ، وبناء على هذا المفهوم فإنه يمكن تحويل مشكلة النقل ذات هدف التعظيم إلى مشكلة تخفيض عن طريق طرح أرباح كل طرق خلايا النقل من أكبر ربح بالمصفوفة ، وحيث أن أكبر ربح بالمصفوفة هو ٢٠ جنيه ، وهو يمثل ربح الطن من مبيعات مزرعة مديرية التحرير إلى الدول العربية ، وبعد اتمام هذا الاجراء ، فإن القيم الناتجة تمثل تكاليف الفرص لأنها تقابل اختلافات الربح المتولد عن كل خلية .

وبعد تنفيذ هذا الاجراء والحصول على تكاليف الفرص ، تكون المشكلة التى أمامنا هي تخفيض تلك التكاليف ، ومن ثم نسير بعد ذلك فى نفس الخطوات التى اتبعناها فى مشاكل النقل ذات هدف تخفيض التكلفة . الا أنه يجدر أن ننوه هنا أن هناك اختلاف بسيط فى السير بخطوات الحل العادية وهذا الاختلاف هو عند حساب أرباح الحل لكل جدول ، إذ عند حساب أرباح الحل يتم التعامل مع الأرباح الاصلية بالمصفوفة الاصلية ، وليس مع تكاليف الفرص بجدول الحل . وسنبين ذلك فى حينه .

وسنسير الآن فى خطوات الحل لهذا المثال . والجدول التالى  
يمثل جدول الحل المبدئى بطريقة الركن الشمالى الشرقى وخطوات  
اختبار مثاليته من حيث تكلفة الصف وتكلفة العمود ، وصافى التغير  
للخلايا الفارغة .

الجدول المبدئى

السوق المزرعة	السوق المنطلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	٦ ١٠٠	صفر ٤٠	٦ ①	١٤٠	صفر
الصالحية	٥ ②	١ ٦٠	٦ ٦٠	١٢٠	١
الخطارة	٤ ⑤	٢ ①	٨ ٤٠	٤٠	٣
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ ③	
تكلفة العمود	٦	صفر	٥		

الارباح وفقاً للحل المبدئى =  $14 \times 6 + 12 \times 6 + 2 \times 4 + 12 \times 100$

$$= 12 \times 4 = 48 \text{ جنيه}$$

(ويلاحظ انه عند حساب ربح الحل تم ضرب كمية كل خلية x

ربحها الاصلى من المصفوفة الاصلية وقبل تحويلها إلى تكلفة فرصة ) .

ويتضح من الجدول المبدئى أنه حل غير أمثل ويحتاج إلى

تحسين ، وتتبع نفس خطوات تحسين الحل من حيث تعيين المتغير

الداخل ، وتحديد اقصى كميته تنقل عبر خلية المتغير الداخل ، ثم اعادة

نمط الشحن . وفيما يلى الجدول الثانى لتحسين الحل :

الجدول الثاني

السوق / المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	٦	صفر	٦ ①	١٤٠	صفر
الصالحية	٥ ②	١ ٢٠	٦ ١٠٠	١٢٠	١
الخطارة	٤ ④	٢ ⑤	٨ ⑥	٤٠	٢ -
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ ٣٠٠	
تكلفة العمود	٦	صفر	٥		

الأرباح وفقاً للجدول الثاني =  $١٦ \times ٤٠ + ١٤ \times ١٠٠ + ١٩ \times ٢٠ + ٢٠ \times ٨٠ + ١٤ \times ٦٠ = ٤٨٦$  جنيهه

الجدول الثالث

السوق / المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديرية التحرير	٦	صفر	٦ ①	١٤٠	صفر
الصالحية	٥ ②	١ ٢٠	٦ ١٠٠	١٢٠	١ -
الخطارة	٤ ④	٢ ⑤	٨ ③	٤٠	٢ -
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠ ٣٠٠	
تكلفة العمود	٦	صفر	٧		

الأرباح وفقاً للجدول الثالث =  $٤٠ + ١٤ \times ١٠٠ + ١٥ \times ٢٠ + ٢٠ \times ١٠٠ + ١٤ \times ٤٠ = ١٦ \times ٤٩٠$  جنيهه



## الجدول الرابع

السوق المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديونية التحرير	٦	١٠٠	٤٠	١٤٠	صفر
المالية	٥	١	٦٠	١٢٠	صفر
الخطارة	٤	٢	٨	٤٠	١ -
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠	٣٠٠
تكلفة العمود	٥	صفر	٦		

الأرباح وفقاً للجدول الرابع =  $١٦ \times ٤٠ + ١٤ \times ٦٠ + ١٥ \times ٦٠ + ١٤ \times ٤٠ + ٢٠ \times ١٠٠ = ٤٩٤٠$  جنيه

وواضح أن الجدول الرابع هو جدول الحل الأمثل . وبذلك نكون قد تغلبنا على مشكلة النقل ذات هدف التعظيم وذلك باتباع مدخل تكاليف الفرص .

**الطريقة الثانية : تعديل اختبار المثالية : Revising the Optimality Check** والطريقة الثانية التي يمكن اتباعها للتعامل مع مشكلة النقل ذات هدف التعظيم ، هي طريقة تعديل اختبار المثالية ، ومضمون هذه الطريقة أنه يتم التعامل مع تلك النوعية من المشاكل بذات الخطوات التي اتبعت في مشكلة النقل ذات هدف التخفيض مع اختلاف واحد بسيط ، وهذا الاختلاف يتركز في خطوة اختبار مثالية الحل ، فنحن نعلم أنه في مشاكل النقل ذات هدف التخفيض عند تحسين الحل يتم اختيار الخلية ذات أكبر قيمة صافي تغير بإشارة سالبة ليتم شغلها في جولة تالية للحل ، إذن من المنطقي أن نأخذ بعكس هذا الاتجاه في مشاكل التعظيم أي يتم اختيار الخلية ذات أكبر صافي تغير بإشارة موجبة لتكون هي المتغير الداخل ، خلاصة القول أن الحل يسير على نفس المنوال في الخطوات العامة



لمشاكل النقل ما عدا خطوة اختبار المثالية التي يتم إجراؤها وفق التعديل المشار اليه . وفيما يلي جداول الحل الخاصة بالشركة الزراعية السابقة مستخدمين طريقة تعديل اختبار المثالية .

الجدول المبدئي ( الركن الشمالي الشرقي )

السوق / المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصنف
مديرية التحرير	١٤	٢٠	١٤	١٤٠	صفر
الصالحية	١٥	١٩	١٤	١٢٠	١-
الخطارة	١٦	١٨	١٢	٤٠	٣-
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠	٣٠٠
تكلفة العمود	١٤	٢٠	١٥		

إجمالي الأرباح =  $١٤ \times ٤٠ + ١٩ \times ٦٠ + ١٤ \times ١٠٠ + ٢٠ \times ٤٠ = ١٦٨$

٤٦٦ جنيه

الجدول الثاني

السوق / المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصنف
مديرية التحرير	١٤	٢٠	١٤	١٤٠	صفر
الصالحية	١٥	١٩	١٤	١٢٠	١-
الخطارة	١٦	١٨	١٢	٤٠	٢
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠	٣٠٠
تكلفة العمود	١٤	٢٠	١٥		

إجمالي الأرباح =  $١٤ \times ٦٠ + ١٩ \times ٢٠ + ١٤ \times ١٠٠ + ١٦ \times ٤٠ = ٤٨٦$  جنيه

## الجدول الثالث

السوق / المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديونية التحرير	١٤	٢٠	١٤	١٤٠	صفر
الصالحية	١٥	١٩	١٤	١٢٠	١
الخطارة	١٦	١٨	١٢	٤٠	٢
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠	٣٠٠
تكلفة العمود	١٤	٢٠	١٤		

إجمالي الأرباح =  $١٤ \times ٤٠ + ١٤ \times ١٠٠ + ١٥ \times ٢٠ + ٢٠ \times ١٠٠ + ١٤ \times ٤٠ = ٤٩٠٠$  جنيه

## الجدول الرابع

السوق / المزرعة	السوق المحلي	الدول العربية	حوض البحر المتوسط	العرض	تكلفة الصف
مديونية التحرير	١٤	٢٠	١٤	١٤٠	صفر
الصالحية	١٥	١٩	١٤	١٢٠	صفر
الخطارة	١٦	١٨	١٢	٤٠	١
الطلب	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٣٠٠	٣٠٠
تكلفة العمود	١٥	٢٠	١٤		

إجمالي الأرباح =  $١٤ \times ٤٠ + ١٤ \times ٦٠ + ١٥ \times ٦٠ + ١٤ \times ٤٠ + ٢٠ \times ١٠٠ = ٤٩٤٠$  جنيه

ويمثل الجدول الرابع الحل الأمثل وسنجد أن نمط الحل وأرباحه هي نفس النتيجة التي سبق التوصل اليها باستخدام الطريقة الاولى وهي طريقة تكلفة الفرص.

#### رابعاً : حالة عدم تعادل العرض والطلب Unbalanced Supply and Demand

لقد تضمنت الامثلة التي أوردناها في مشكلة النقل افتراض أنه يوجد دائماً تعادل وتوازن بين كمية العرض وكمية الطلب ، فقد وجدنا في أمثلتنا السابقة جميعها أن مجموع طاقات المصانع أو المزارع متعادلة ومتطابقة مع احتياجات المخازن أو طلبات الاسواق ، ولكن الواقع والحقيقة أن هذا الوضع لا يحدث إلا في القليل النادر ، ففي الحياة العملية والواقع التطبيقي نجد أن الكميات المعروضة ليست متعادلة تماماً مع الكمية المطلوبة ، اذ غالباً ما نجد أن طاقة الشركات أكبر من متوسط الطلب ، حيث أن بناء الطاقة في الاساس يتم على أساس مقابلة ذروة الطلب، وفي أحيان أخرى تكون طاقة الشركة مساوية لمتوسط مستويات الطلب ، أى أن الشركة تقوم ببناء مخزون من سلعها التامة ، أثناء فترات انخفاض الطلب لمواجهة فترات ذروة الطلب ، وهذه أمور تؤدي إلى أن العرض يكون غير متوازن في خلال بعض الفترات .

وحيث أن منهج الحل وفقاً لطريقة النقل يتطلب وجود تعادل بين العرض والطلب ، بمعنى أنها مبنية على فرض وجود هذا التعادل ، لذلك فإنه عند مواجهة مشكلة نقل لا يتحقق فيها هذا التعادل بمعنى أن يكون العرض أكبر من الطلب أو العكس ، فإن الأمر يستلزم لامكان تطبيق خطوات منهج طريقة النقل أن نحقق هذا الافتراض ولو وهمياً ، ولهذا فإنه يتم التعامل مع هذه الحالة ويقصد ايجاد ذلك التعادل عن طريق اضافة نقطة توريد وهمية Dummy Supply Point أى اضافة صف وهمى ليعبر مثلاً عن مصنع وهمى له طاقة تمثل الفرق بين الطلب والعرض ومن ثم تتعادل الكميتان ، أو عن طريق اضافة نقطة

طلب وهمية Dummy demand point ، أى إضافة عمود وهمى ليعبر مثلاً عن مخزن وهمى له احتياجات تمثل الفرق بين العرض والطلب ومن ثم نعود لحالة التعادل بين العرض والطلب ، أى أن نقطة التوريد الوهمية ، أو نقطة الطلب الوهمية بمثابة الزيادة فى العرض عن الطلب ، أو الزيادة فى الطلب عن العرض ، فمثلاً إذا كان إجمالى الطلب يزيد عن العرض المتاح بمقدار ٥٠ وحدة ، فإنه ينبغي إضافة نقطة عرض وهمية بطاقة مقدارها خمسون وحدة ، وبالمثل إذا كان إجمالى العرض يزيد عن الطلب بمقدار ١٠٠ وحدة ، فإنه يمكن ببساطة إضافة نقطة طلب وهمية مقدارها ١٠٠ وحدة . ويكون السؤال المطروح الآن ، إذا ما تم إضافة صف وهمى أو عمود وهمى فما هى مقدار التكلفة (أو الأرباح) للوحدة الواحدة والتي ستوضع فى خلايا هذا الصف أو ذلك العمود ؟ للإجابة على ذلك نقول : حيث أنه لن يتم شحن أو نقل من أو إلى تلك الخلايا فإنه لا يهم مقدار التكاليف (أو الأرباح) التي يتم تحديدها لتلك الطرق الوهمية ، ولهذا فإننا نفضل أن نستخدم دائماً تكلفة مقدارها ( صفر ) ، أو أرباح مقدارها أيضاً ( صفر ) لتلك الطرق الوهمية . ولقد عاملنا كافة الخلايا الوهمية معاملة واحدة فجميعها يأخذ قيمة تكلفة ( أو أرباح ) واحدة حيث أنه لا يتعين تفضيل خلية على غيرها ، ثم اخترنا القيمة الصفرية تسهيلاً للعمليات الحسابية التي تتطلبها خطوات حل مشكلة النقل .

وبعد إضافة الخلايا الوهمية إلى المشكلة الأصلية فإنه يتم حلها بذات الخطوات العادية المتبعة فى حل مشكلة النقل ، ويتم معاملة تلك الخلايا الوهمية كما وأنها خلايا حقيقية وبلا أدنى تفرقة . وبفرض التوضيح نسوق المثال التالى :

مثال :

الجدول التالى موضح به تكاليف النقل من المصانع إلى المخازن ، والكميات المتاحة فى كل مصنع والكميات المطلوبة لكل مخزن :

البيان	الكميات المتاحة	تكاليف نقل الطن		
		المخزن س	المخزن ص	المخزن ع
المصنع أ	٩٥ طن	٦ جنيه	٩ جنيه	١٢ جنيه
المصنع ب	٦٥ طن	٣ جنيه	١ جنيه	٣ جنيه
الكميات المطلوبة للمخازن		٤٥ طن	٦٠ طن	٩٠ طن

أوجد جدول الشحن الذى يخفض جملة التكاليف ويحقق احتياجات المخازن فى ضوء ما هو متاح من كميات .  
الحل :

يتبين من هذا المثال أن مجموع الكميات المتاحة بالمصنعين =  $٩٥ + ٦٥ = ١٦٠$  طن ، كما يتبين أن مجموع الكميات المطلوبة للمخازن الثلاثة =  $٩٠ + ٦٠ + ٤٥ = ١٩٥$  طن ومعنى ذلك عدم وجود تعادل بين العرض والطلب ، إذ أن العرض يقل بمقدار ٣٥ طن عن مجموع الاحتياجات (  $١٩٥ - ١٦٠ = ٣٥$  ) ، لذا يتعين لإيجاد هذا التعادل أن يتم إضافة صف جديد يمثل مصنع وهمى طاقته ٣٥ طن وأن نجعل جميع خلايا هذا الصف تكلفة كل منها = صفر .

وبعد اجراء التعديلات السابقة يتم السير فى خطوات الحل المعتادة كما هو مبين بجداول الحل التالية :



## الجدول المبدئي

المخازن / المصانع	س	ص	ع	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٦ ٤٥	٩ ٥٠	١٢ ١	٩٥	صفر
ب	٣ ٥	١ ١٠	٣ ٥٥	٦٥	٨-
جـ وهمي	٥	٢	صفر ٣٥	٣٥	١١-
احتياجات المخزن	٤٥	٦٠	٩٠	١٩٥	١٩٥
تكلفة العمود	٦	٩	١١		

تكلفة النقل بالجدول المبدئي =  $٦ \times ٤٥ + ٩ \times ٥٠ + ١ \times ١٠ + ٣ \times ٥٥$

$$+ ٣٥ \times . = ٨٩٥ \text{ جنيه}$$

ويتبين من الجدول المبدئي أن صافى التغير للخلايا الفارغة جميعها موجبة . أى أن الحل المبدئي هو الحل الأمثل ، ويمكن توضيح نتيجة الحل كالاتى :

من الجدول المبدئي يتضح أنه سيتم الوفاء باحتياجات المخازن

كالآتى :

- الوفاء باحتياجات المخزن (س) بالكامل ومن المصنع (أ).

- الوفاء باحتياجات المخزن (ص) بالكامل منها خمسون طن من

المصنع (أ) وعشرة أطنان من المصنع (ب).

- الوفاء بجزء فقط من احتياجات المخزن ع مقداره عدد ٥٥ طن

من المصنع (ب) ، وباقى احتياجاته يأخذها من المصنع الوهمي (جـ)

وهذا طبعاً اشباع غير حقيقى . أى أن هناك عجز مقداره عدد (٣٥) طن

لن يمكن الوفاء بها للمخزن (ع) نظراً لعدم التوازن بين العرض

والطلب مقداره (٣٥) طن كما سبق القول .

مثال:

المصفوفة التالية تمثل مشكلة نقل ، والمطلوب ايجاد الحل الأمثل  
والذي يعمل على تخفيض اجمالي تكلفة النقل الى أدنى حد لها .

طاقة المصنع	ع	ص	س	المخزن المصنع
٥٠	٨	٥	٧	أ
٧٠	٤	٦	٢	ب
٦٠	٦	١١	٧	ج
١٨٠ ١٦٠	٣٠	٥٠	٨٠	احتياجات المخزن

الحل :

يتبين من المصفوفة السابقة أن مجموع طاقات المصانع يزيد عن  
مجموع احتياجات المخازن بعدد ٢٠ وحدة . لذا يتعين أولاً وقبل السير في  
خطوات الحل المعتادة أن تحدث التعادل ، ويتم ذلك عن طريق اضافة عمود  
وهي يمثل مخزن تبلغ إحتياجاته ٢٠ وحدة ونضع تكلفة نقل للوحدة  
بكل من خلايا ذلك العمود مقدارها صفر ، وبعد اجراء هذا التعديل سيظهر  
جدول الحل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى كالآتى :

( الجدول المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى )

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل وهى	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٧	٥	٨	صفر ١٠-	٥٠	صفر
ب	٢	٦	٤	صفر ٥-	٧٠	٥-
ج	٧	١١	٦	صفر ٢٠	٦٠	١٠-
احتياجات المخزن	٨٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٨٠ ١٨٠	
تكلفة العمود	٧	١١	١٦	١٠		

اجمالى تكلفة الحل =  $٧ \times ٥٠ + ٢ \times ٣٠ + ٦ \times ٤٠ + ١ \times ١٠ + ٦ \times ٢٠ + ٢ \times ٥٠ = ٨٤٠$  جنيهه

ويتبين أن جدول الحل المبدئى غير أمثل ، لذا سيتم اختيار الخلية (أل) لشغلها ( على الرغم من أنها خلية وهمية ) بذات الاسلوب المتبع .  
وفيما يلى الجدول الثانى :

الجدول الثانى

المخزن المصنع	س	ص	ع	ل وهى	طاقة المصنع	تكلفة الصف
أ	٧	٥	٨	صفر ٢٠	٥٠	صفر
ب	٢	٦	٤	صفر ٥-	٧٠	٥-
ج	٧	١	٦	صفر ١٠	٦٠	١٠-
احتياجات المخزن	٨٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٨٠ ١٨٠	
تكلفة العمود	٧	١١	١٦	صفر		

تكلفة النقل بالجدول الثانى =  $٧ \times ٣٠ + ٦ \times ٢٠ + ٢ \times ٥٠ + ٢ \times ٥٠ + ٧ \times ٢٠ + ١ \times ٣٠ = ٦٤٠$  جنيهه

ويتبين من الجدول الثانى أنه يحتاج الى تحسين باختيار الخلية ( أ ع ) كمتغير داخل ، ويتم اعداد الجدول الثالث للحل وسنترك للقارئ أن يقوم بذلك بنفسه ليرى ماذا يحدث للجدول الثالث وما هى السمة أو الصفة التى يتصف بها وكيف يتعامل معها .

**خامساً : حالة الطرق الممنوع النقل عليها Prohibited**

### **Routes**

من الحالات الخاصة الأخرى التى قد تواجه بها عند التعامل مع مشكلة من مشاكل النقل ، هى تلك الخاصة بوجود واحد أو أكثر من طرق المصفوفة ( الخلايا ) تعتبر طرقاً ممنوعة ، أو مكروهة ، أو غير مفضلة للنقل عليها ، ففى مجالات النقل المادى للسلع هناك عدة أسباب قد تجعل طريقاً ما غير مرغوب استخدامه فى عملية النقل منها : سوء الاحوال الجوية على ذلك الطريق ، الحمولة المسموح بها على تلك الطرق من حيث الوزن أو الحجم ، القيود البيئية المفروضة على نقل المواد الخطرة كالمتفجرات والمواد سريعة الاشتعال ، و المواد الملوثة للبيئة ، مخاطر الطريق ،...الى آخر تلك الاسباب.ولكن كيف يتم التعامل مع المشاكل من تلك النوعية ؟ ان التطبيق المباشر لخطوات طريقة النقل قد يترتب عليها أن نجد أن جدول الحل الامثل ظهرت به كميات تنقل عبر طريق غير مرغوب فيه ، لذلك يتعين اجراء تعديل ما يمنع حدوث ذلك . بمعنى أنه يتعين أن نقوم بعمل تعديل على المصفوفة قبل تطبيق الخطوات المعتادة بحيث يضمن لنا هذا التعديل استحالة النقل على تلك الطرق الممنوعة .

ان التعديل المطلوب اجراؤه هو جعل ذلك الطريق او تلك الطرق غير المرغوب النقل عليها ذات تكلفة نقل عالية جداً بالمقارنة بتكاليف باقى الخلايا (اذا كانت المشكلة ذات هدف تخفيض ) أو ذات ربح سالب كبير ( اذا كانت المشكلة ذات هدف تعظيم ) . وهذا الاجراء كفيل بعدم اختيار ذلك الطريق أو تلك الطرق ضمن جدول الحل الامثل .

**تطبيق طريقة النقل على مجالات ادارية أخرى :**

هناك بعض المجالات الادارية الأخرى التى لا تندرج تحت مفهوم الانتقال المادى للسلع والبضائع من مكان لآخر ، ورغم ذلك تصلح



طريقة النقل للتطبيق عليها وبكفاءة كبيرة ، ومن هذه المجالات الهامة :  
تخطيط الانتاج ، تخصيص الاعمال والمهام للتشغيل على الآلات ، تحليل  
المواقع لتحديد الموقع الأمثل ، ومجالات أخرى كثيرة لا داعي لحصرها  
وانما عندما يجد القارئ ان المشكلة التى يقابلها يمكن وضعها على  
الصورة العامة لمشكلة النقل فليس هناك ما يمنع من تطبيق طريقة  
النقل عليها.

وفيما يلى نتناول بالتوضيح كيفية تطبيق طريقة النقل على  
تلك المجالات ، حتى نقرب من ذهن القارئ طبيعتها التى تعيننا على  
هذا الاستخدام .

#### ١- تخطيط الانتاج : Production planning :

يمكن وضع مشاكل تخطيط الانتاج على صورة مشاكل النقل ،  
إذ يمكن اعتبار أن طاقة المصنع الانتاجية خلال فترات زمنية مثلها  
مثل نقاط التوريد ، كذلك يمكن أن تعتبر المبيعات المتوقعة خلال تلك  
الفترات الزمنية بمثابة احتياجات الطلب ، وفى هذه الحالة فإن  
تكاليف النقل ستكون فى حالة تخطيط و مراقبة الانتاج هى تكاليف  
الانتاج ، وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون ، والمصفوفة التالية مثلاً تعتبر  
تكويناً مبسطاً لمشكلة تخطيط الانتاج متضمنة مستوى مخزون أول  
المدة ومستوى مخزون آخر المدة .

الانتاج الشهري	مستوى مخزون آخر المدة	مارس	فبراير	يناير	تقديرات المبيعات نقاط التوريد
١٢٠	٦	٤	٢	صفر	مخزون أول المدة
١٠٠	١٦	١٤	١٢	١٠	انتاج شهر يناير
١١٠	١٤	١٢	١٠	—	انتاج شهر فبراير
١٢٠	١٢	١٠	—	—	انتاج شهر مارس
	١٠	١٥٠	١٠٠	١٢٠	الطلب



وهذه المصفوفة تعكس تماماً نمط مشكلة تخطيط الانتاج وهى لفترة زمنية ربع سنوية تمثل شهر يناير ، شهر فبراير ، شهر مارس ، ويمكن أن نتبين من هذه المصفوفة ( وهو دائماً النمط المعتاد ) أنه يمكن الوفاء باحتياجات الطلب والمبيعات لأى شهر من شهور السنة كالآتى :

أ - من انتاج ذلك الشهر .

ب - انتاج شهور سابقة مع تخزينه حتى يتم الحاجة اليه .

ج - السحب من مخزون أول المدة .

كذلك يتضح من تلك المصفوفة أن الطاقة الانتاجية لأى شهر معين يتم التصرف فيها كالآتى :

أ- تستخدم للوفاء بطلب ذلك الشهر .

ب - يتم الاحتفاظ به كمخزون لمقابلة الطلب لبعض الشهور التالية .

ج- الاحتفاظ به كمخزون حتى نهاية الفترة للوفاء بالمستوى الموضوع لمخزون آخر المدة . ومن ناحية أخرى فإنه يتضح من هذه المصفوفة أن تكاليف التوزيع والتخصيص الموضحة بها هى بمثابة تكاليف الانتاج للوحدة الواحدة فهى مثلاً عشرة جنيهاً للوحدة الواحدة ، كذلك تتضمن التكلفة نصيب الوحدة من تكلفة الاحتفاظ بالمخزون لمدة شهر واحد والتي تبلغ جنيهاً ، فإذا تم الوفاء بالطلب من خلال انتاج نفس الشهر تكون تكلفة الوحدة عشرة جنيهاً (حيث لا يتم تخزين تلك الوحدات ومن ثم لا توجد تكاليف احتفاظ بالمخزون) . أما إذا تم الوفاء بالطلب فى شهر فبراير من انتاج شهر يناير فإن تكلفة الوحدة فى شهر فبراير = تكلفة الانتاج فى شهر يناير + تكلفة الاحتفاظ بالوحدة لمدة شهر =  $10 + 2 = 12$  ، يضاف إليها ٢ جنيه إذا كانت تلبى احتياجات الطلب فى شهر مارس .

وبعد هذا التوضيح فإن المصفوفة السابقة كما تم صياغتها فى الجدول السابق يمكن حلها باستخدام طريقة النقل العادية مع ملاحظة مايلى :

- أن هناك طرقاً ممنوعة فى تلك المصفوفة والواقعة فى الجزء الايمن الاسفل إذ أنها تمثل خلايا لا ينبغي شغلها إذ أنها تمثل الاحتمالات

غير ممكنة كبداية في الخطة الانتاجية ، فلا يمكن مثلاً الوفاء بطلب شهر يناير من انتاج شهور لاحقة كشهر فبراير وشهر مارس ، وكذلك لا يمكن الوفاء بطلب شهر يناير وفبراير من انتاج شهر مارس ( إلا اذا افترضنا استعداد المستهلك للانتظار ) .

- يتم اضافة عمود وهمي ( الطاقة غير المستخدمة ) حيث يتضح أن اجمالي الطلب المتوقع هو ٣٨ وحدة وهو يقل عن حجم العرض وهو ٤٥ وحدة بمقدار ٧ وحدة ، وحيث أن اسلوب النقل الاصلى يتطلب وجود تعادل بين العرض والطلب إذن يتعين اضافة هذا العمود الجديد بمقدار الفرق .

وبذلك يمكن اعداد جدول الحل المبدئي كالاتى :

الجدول المبدئي ( الركن الشمالى الشرقى )

تقديرات المبيعات نقاط التوريد	يناير	فبراير	مارس	مستوى مخزون آخر المدة	الطاقة غير المستخدمة	الطاقة المتاحة	تكلفة الصف
مخزون اول المدة	صفر ١٢.	صفر ٢	صفر ٤	صفر ٦	صفر ٦	١٢.	صفر
انتاج شهر يناير	ش ١٠.	صفر ١٢	صفر ١٤	صفر ١٦	صفر ٤-	١٠٠	١٠
انتاج شهر فبراير	صفر ٤٢	ش ١٠.	صفر ١٢	صفر ١٤	صفر ٢-	١١٠	٨
انتاج شهر مارس	صفر ٤٤	صفر ٥٠	صفر ٥٠	صفر ١٢	صفر ٧.	١٢.	٦
الطلب	١٢.	١٠٠	١٥٠	١٠	٧.	٤٥. ٤٥.	
تكلفة العمود	صفر	٢	٤	٦	٦-		

ويتبين من الجدول المبدئي أن اجمالي التكلفة وفقاً للحل الوارد به =

$$= ١٢ \times \text{صفر} + ١٢ \times ١٠٠ + ١٢ \times ١١٠ + ١٠ \times ٤٠ + ١٠ \times ١٠ + ١٢ \times ٧ + ٧ \times \text{صفر}$$

٣٠٤٠ جنيه، إلا أنه يتبين أنه حل منتكس ( غير اساسى ) لذلك تم شغل

خليتين بكمية وهمية مقدارها ( ش ) ، ثم يتم اختيار مثالية هذا

الجدول بالطريقة المعتادة ، فمثلاً سيتم اختيار الخلية ذات أكبر قيمة  
بإشارة سالبة لنعتبرها متغير داخل . وفيما يلي جدول تحسين الحل :  
الجدول الثانى

تكاليف الصف		الطاقة المتاحة	الطاقة غير المستخدمة	مستوى مخزون آخر المدة	مارس	فبراير	يناير	تقديرات المبيعات نقاط التوريد
صفر	١٢٠	صفر	٦	٤	٢	صفر	صفر	مخزون اول المدة
		(١٠)	صفر	صفر	صفر	صفر	١٢٠	
١٠	١٠٠	صفر	١٦	١٤	١٢	١٠	١٠	انتاج شهر يناير
		٧٠	صفر	صفر	٣٠	ش		
٨	١١٠	صفر	١٤	١٢	١٠	٥٠	٥٠	انتاج شهر فبراير
		(٢)	صفر	٤٠	٧٠	(٤٢)		
٦	١٢٠	صفر	١٢	١٠	٥٠	٥٠	٥٠	انتاج شهر مارس
		(٤)	١٠	١١٠	(٤٢)	(٤٤)		
٤٥٠ ٤٥٠		٧٠	١٠	١٥٠	١٠٠	١٢٠		الطلب
		١٠-	٦	٤	٢	صفر		تكلفة العمود

التكلفة الاجمالية بالجدول الثانى =  $١٢٠ \times \text{صفر} + ١٢ \times ٣٠ + ٧٠ \times ٧٠ + \text{صفر} + ٧٠$   
 $١٠ \times ١١٠ + ١٢ \times ٤٠ + ١٠ \times ١١٠ + ١٢ \times ١٠ = ٢٧٦٠$  جنيه .

أى هناك وفر عن الجدول المبدئى بما قيمته ٢٨٠ جنيه ( ٢٧٦٠ - ٢٠٤٠ )  
ويتبين من اختبار مثالية هذا الجدول أنه يمثل جدول الحل الأمثل  
حيث أن كل قيم صافى التغير موجبة ، وهذا معناه عدم امكانية اجراء  
أى تخفيض على التكاليف وهذا الحل يتلخص فى الاتى :

- يتم تلبية طلب شهر يناير من مخزون أول المدة .
- يتم تلبية طلب شهر فبراير عن طريق ٣٠ وحدة من انتاج شهر يناير ،  
٧٠ وحدة من انتاج شهر فبراير .
- يتم تلبية طلب شهر مارس عن طريق ٤٠ وحدة من انتاج شهر  
فبراير ، ١١٠ وحدة من انتاج شهر مارس .
- يتم الوفاء بمستوى مخزون آخر المدة من انتاج شهر مارس .

- الطاقة غير المستغلة تتكون من ١٠ وحدات من مخزون أول المدة ، ٧٠ وحدة من انتاج شهر يناير.

مثال :

باستخدام المعلومات التالية عن الطلب ومستوى الطاقة والمخزون والتكاليف ، ضع المشكلة فى شكل يسمح باستخدام طريقة النقل فى الوصول الى الخطة المثلى للانتاج .

#### الفترة

(١)	(٢)	(٣)
الطلب ( بالوحدة )	١٤٠	١٧٠
الطاقة ( بالوحدة ) :	١٠٠	١٠٠
الوقت الاصلى	١٠٠	١٠٠
الوقت الاضافى	٥٠	٥٠
من الغير	١٠	٢٠

وكان مخزون أول المدة ٢٠ وحدة وتكاليف الانتاج للوحدة خلال الوقت الاصلى ١٠ جنيهاً، وفى الوقت الاضافى ١٥ جنيهاً ، ومن الغير ١٢ جنيهاً ، وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون بواقع ٢ جنيه للوحدة لمدة شهر.

الحل :

قبل وضع المشكلة على صورة طريقة النقل يتعين احداث بعض التعديلات لتتوافق عند حلها مع الخطوات العادية لمشكلة النقل وهذه التعديلات تشمل :

أ- ايجاد التوازن بين العرض والطلب ، فكمية الطلب خلال الفترات الثلاث مجموعها ٤٦٠ وحدة فى حين أن مجموع العرض عن الفترة نفسها ٥١٠ وحدة ، ويتم ذلك من خلال اضافة عمود وهمى يمثل الطاقة غير المستغلة وبكمية مقدارها ٥٠ وحدة .

ب- الخلايا غير المرغوب فى شغلها لأنها بدائل غير ممكنة ويستحيل شغلها منطقياً وهى الخلايا فى الركن الأيمن الى أسفل وضعت بها تكلفة عالية جداً حتى لا يتم التخصيص عليها فى الحل الأمثل .

بعد اجراء التعديلات السابقة ستظهر المصفوفة متضمنة الحل

المبدئى على الصورة التالية :



الطاقة المتاحة	الطاقة غير المستخدمة	مارس	فبراير	يناير	الشهور	
					نقاط التوريد	
٢٠	صفر	٤	٢	صفر	٢٠	مخزون اول المدة
١٠٠	صفر	١٤	١٢	١٠	١٠٠	الوقت الاصلى
٥٠	صفر	١٩	١٧	١٥	٢٠	الوقت الاضافى
١٠	صفر	١٦	١٤	١٢	١٠	من الغير
١٠٠	صفر	١٢	١٠	٥٠	١٠٠	الوقت الاصلى
٥٠	صفر	١٧	١٥	٥٠	٢٠	الوقت الاضافى
١٠	صفر	١٤	١٢	٥٠	١٠	من الغير
١٠٠	صفر	١٠	٥٠	٥٠	١٠٠	الوقت الاصلى
٥٠	صفر	١٥	٥٠	٥٠	٢٠	الوقت الاضافى
٢٠	صفر	١٢	٥٠	٥٠	٢٠	من الغير
٥١٠	٥١٠	٥٠	١٥٠	١٧٠	١٤٠	الطلب المتوقع

## ٢- تخصيص الأعمال على الآلات :

من المجالات النفسية الاخرى التى يمكن أن تطبق عليها طريقة النقل هى تلك الخاصة بتخصيص المهام أو الاعمال أو الوظائف على مجموعة الآلات المتاحة بالمصنع ، أو على مجموعة العاملين ، أو على مراكز العمل ، علماً بأنه لا توجد قيود على تجزئة الأعمال على أكثر من آلة أو أكثر من موظف ، كما أن الموظف أو الآلة يمكنه القيام بأكثر من



مهمة ( أما اذا كانت التجزئة ممنوعة لطبيعة المشكلة فهذا ما سنتناوله فى الجزء الثانى عند تناول مشاكل التخصيص ) ، ويتوقف التعامل مع تلك النوعية من المشاكل على أنها مشاكل نقل ضرورة أن تكون كافة مدلولات الموارد والاستخدامات بمدلول واحد مشترك كالساعات النمطية أو غير ذلك .

مثال :

يريد أحد المصانع تخصيص عدد من المهام تفصيلاتها كالاتى :

المهمة ( أ ) وعددها (٢٠) مهمة	كل منها تتطلب	٢ ساعة
المهمة (ب) وعددها (٥٠) مهمة	كل منها تتطلب	١ ساعة
المهمة (ج) وعددها (١٤٠) مهمة	كل منها تتطلب	$\frac{1}{2}$ ساعة

هذه المهام يراد تخصيصها للانتهاء منها على أربع أنواع من الآلات هى س ، هـ ، ع ، ل متاح من كل منها آلة واحدة طاقتها كالاتى على الترتيب ٣ ، ٥ ، ٤ ، ٤ ساعة . فإذا علمت أن تكلفة تشغيل كل آلة فى الساعة تختلف باختلاف المهمة التى ستقوم بتنفيذها، والجدول التالى يوضح تكلفة تشغيل الساعة لكل آلة فى كل مهمة :

المهمة (أ)	المهمة (ب)	المهمة (ج)	
٥	٧	٩	الآلة (س)
١١	١٠	١٣	الآلة (هـ)
٧	٨	٥	الآلة (ع)
١٤	١٤	١٦	الآلة (ل)

والمطلوب تخصيص المهام للتشغيل على الآلات بحيث تصل تكلفة التنفيذ الى حدها الأدنى :

الحل :

سيتم وضع المشكلة السابقة على شكل الصورة العامة لمشكلة النقل بعد تحويل المهام من عدد من المهام الى عدد ساعات حيث أن الآلات معبراً عن طاقتها بالساعات كذلك تكلفة التشغيل محسوبة بالساعة . لذلك يتعين توحيد وحدة القياس وهى الساعة. وبعد هذا الاجراء ستظهر المصفوفة متضمنة الجدول المبدئى واختبار المثالية

على الشكل التالي :

المهمة الألة	المهمة (أ)	المهمة (ب)	المهمة (ج)	الطاقة المعروضة بالساعات	تكلفه الصف
س	٥ ٣.	٧ ٣	٩ ٨	٣.	صفر
ص	١١ ١.	١٠ ٤.	١٣ ٦	٥.	٦
ع	٧ ٢-	٨ ١.	٥ ٣.	٤.	٤
ل	١٤ ٦-	١٤ ٥-	١٦ ٤.	٤.	١٥
الطاقة المطلوبة بالساعة	٤.	٥.	٧.	١٦. ١٦.	
تكلفة العمود	٥	٤	١		

اجمالي التكاليف وفقاً للحل المبدئي =

$$= ١٥٣٠ \text{ جنيه} = ١٦ \times ٤. + ٥ \times ٣. + ٨ \times ١. + ١. \times ٤. + ١١ \times ١. + ٥ \times ٣.$$

ويتبين من اختبار مثالية الجدول المبدئي أنه جدول غير أمثل ويحتاج إلى تحسين ، ويتم السير في اجراءات التحسين المعتادة وصولاً للحل الأمثل ، مع ملاحظة أن الحل الأمثل لن يكون بعدد المهام المخصصة على كل آلة ولكن بعدد ساعات كل مهمة ومن ثم يمكن بقسمة عدد الساعات المخصصة على زمن كل مهمة أن نحصل على عدد المهام التي ستخصص للتنفيذ على كل آلة .

### ٣- تحليل الموقع Location Analysis

يمكن الاستفادة من طريقة النقل في اختيار موقع المشروع خصوصاً بعد مرحلة التصفية الأولية للمواقع ، وتحديد المواقع الممكن إقامة المشروع عليها Feasible Alternative sits ، إذ أن هذه الطريقة تعمل على تحديد المواقع التي تصل بالتكاليف إلى حدها الأدنى .

ونؤكد مرة أخرى على أن تكلفة النقل تعتبر بمثابة أحد العوامل التي ستأخذها الإدارة في اعتبارها في اتخاذ مثل هذا القرار .

ويرتكز هذا الأسلوب على قياس تكلفة النقل بحيث يفضل البديل الذي يحقق أقل تكلفة ممكنة . وفيما يلي نوضح كيف يمكن ترشيد هذا القرار باستخدام طريقة النقل .  
مثال :

ترغب إحدى الشركات الصناعية في إنشاء مصنع جديد لها بجانب المصنعين الحاليين اللذين تملكهما وذلك بسبب زيادة الطلب على السلعة التي تنتجها في إنتاجها ، وفيما يلي البيانات الخاصة بالطلب والطاقة الانتاجية :

- متوسط الطلب المتوقع على مناطق السوق المختلفة كالآتي :

٦٠٠٠٠ وحدة في منطقة القاهرة

٣٠٠٠٠ وحدة في منطقة الجيزة

٥٠٠٠٠ وحدة في منطقة الاسكندرية .

- متوسط الطاقة الحالية للمصنعين الحاليين كالآتي :

٥٠٠٠٠ مصنع القليوبية

٢٠٠٠٠ مصنع العاشر من رمضان

- المصنع الجديد المقترح انشاؤه ستبلغ متوسط طاقته الانتاجية ٧٥٠٠٠ وحدة

- هناك موقعين مرشحين لاقامة المصنع المقترح وهما : مدينة ٦ أكتوبر ، مدينة السادات.

ستبلغ تكلفة النقل للوحدة الواحدة من كل مصنع الى مراكز الاستهلاك كالآتي : ( التكلفة بالجنيه )

مركز القاهرة	مركز الجيزة	مركز الاسكندرية
٥	٦	١٠
٨	٧	١٥
٣	٤	١٢
٧	٥	٦
مصنع القليوبية	مصنع العاشر من رمضان	مصنع ٦ أكتوبر
مصنع مدينة السادات		

والمطلوب تحديد الموقع الأمثل للمصنع الجديد والذي يعمل على

الوصول باجمالى تكلفة النقل الى حدها الادنى .  
الحل .

حيث أن المطلوب اختيار بديل واحد من بين البديلين المقترحين وهما إما اقامة المصنع فى مدينة ٦ أكتوبر ، أو اقامته بمدينة السادات . اذن يتعين ان نقوم بتقييم البديلين من حيث اجمالى تكاليف النقل المحققة بكل منهما واختيار البديل الذى يصل بالتكلفة الى حدها الادنى .

تقييم البديل الأول : اقامة المصنع الجديد بمدينة ٦ أكتوبر  
سنقوم أولاً بتقييم البديل الأول وذلك من خلال تحديد اجمالى تكاليف النقل التى ستتحملها الشركة فى حالة انشاء المصنع الجديد بمدينة ٦ أكتوبر ، ولهذا الغرض سيتم اعداد مصفوفة النقل التى ستعمل على الوصول الى تلك النتيجة ، ويلاحظ من تلك المصفوفة أننا أضفنا عمود وهمى ليمثل منطقة استهلاك وهمية حيث أن طاقة المصانع الثلاثة تزيد عن تقديرات الطلب فى مراكز الاستهلاك الثلاثة ، وفيما يلى مصفوفة النقل بعد ايجاد جدول الحل المبدئى واختبار مثاليته.

الجدول المبني

الموقع	السوق	القاهرة	الجيزة	الاسكندرية	وهي	طاقه المصنع بالالف	تكلفه الصف
القليوبيه	٥٠٠	٥	٦	١٠	٢	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	١٠٠	٨	٧	١٥	٣	٢٠٠	٣
مدينه ٦ اكتوبر	٢٠٠	٢	٤	١٢	٥	٧٥٠	صفر
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٥٠٠	٥٠٠	١٤٥٠	١٤٥٠
تكلفه العمود	٥	٤	١٢	صفر			

إجمالي التكلفة = ١.٨٠٠ ألف جنيه

الجدول الثاني

الموقع	السوق	القاهرة	الجيزة	الاسكندرية	وهي	طاقه المصنع بالالف	تكلفه الصف
القليوبيه	٥٠٠	٥	٦	١٠	٢	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	١٠٠	٨	٧	١٥	٣	٢٠٠	٣
مدينه ٦ اكتوبر	٢٠٠	٢	٤	١٢	٥	٧٥٠	صفر
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٥٠٠	٥٠٠	١٤٥٠	١٤٥٠
تكلفه العمود	٥	٤	١٢	٢			

إجمالي التكلفة = ١.٦٥٠ ألف جنيه



الجدول الثالث

الموقع	السوق	القاهرة	الجيزة	الاسكندرية	وهي	طاقة المصنع بالاف	تكلفه الصنف
القليوبيه	٥٠٠	٥	٦	١٠	١	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	٢	٨	٧	١٥	٥	٢٠٠	١
مدينه ٦ اكتوبر	١٠٠	٣	٤	١٢	٢	٧٥٠	٢-
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٥٠٠	٥٠٠	١٤٥٠	١٤٥٠
تكلفه العمود	٥	٦	١٤	١-			

إجمالي التكلفة = ١.٤٥٠ ألف جنيه

الجدول الرابع

الموقع	السوق	القاهرة	الجيزة	الاسكندرية	وهي	طاقة المصنع بالاف	تكلفه الصنف
القليوبيه	٤	٥	٦	١٠	٥	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	٢	٨	٧	١٥	٥	٢٠٠	٥
مدينه ٦ اكتوبر	٦٠٠	٣	٤	١٢	٣	٧٥٠	٢
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٥٠٠	٥٠٠	١٤٥٠	١٤٥٠
تكلفه العمود	١	٢	١٠	٥-			

إجمالي التكلفة = ٨٤٥٠ ألف جنيه

ويتبين أن الجدول الرابع هو جدول الحل الامثل ، فاذا تم اختيار أن يكون موقع المصنع الجديد بمدينة ٦ أكتوبر فستكون اجمالي تكلفة النقل ٨٤٥ ألف جنيه .

**تقييم البديل الثاني : إقامة المصنع الجديد بمدينة السادات :**  
وسيتم تعديل بسيط في المصفوفة الاصلية اذ يتم احلال موقع المصنع ليكون بمدينة السادات بدلاً من مدينة ٦ أكتوبر وتوضع تكاليف نقل الوحدة المصاحبة لهذا التعديل وبعد اجراء جولات الحل المختلفة بالطريقة المعتادة سيكون جدول الحل الامثل كالآتي -

السوق الموقع	القاهرة	الجيزة	لاسكندريا	وهي	طاقه المصنع بالاف	تكلف الصف
القليوبيه	٥ ٥٠٠	٦ ٢	١٠ ٥	٣ ٢	٥٠٠	صفر
العاشر من رمضان	٨ ١٠٠	٧ ٥٠	١٥ ٧	٥ ٥	٢٠٠	٢
مدينة السادات	٧ ١	٥ ٢٥٠	٦ ٥٠٠	٣ ٢	٧٥٠	١
الطلب (بالالف)	٦٠٠	٢٠٠	٥٠٠	٥٠	١٤٥٠	١٤٥٠
تكلفه العمود	٥	٤	٥	٣-		

إجمالي التكلفة = ٧٨٠٠ ألف جنيه.

وبمقارنة تكلفة البديلين يتبين أن البديل الثانى أقل تكلفة ، اذ فى حين تبلغ اجمالى التكلفة للبديل الاول ٨٤٥٠ الف جنيه ، فإنها ٧٩٠٠ الف جنيه للبديل الثانى ، أى بفرق مقداره ٥٥٠ الف جنيه لصالح البديل الثانى . اذن القرار الافضل اختيار أن ينشأ المصنع فى مدينة السادات لأنه أوفر فى تكلفة النقل من انشائه بمدينة ٦ اكتوبر .

ومن هذا التحليل يتبين أنه أمكن باستخدام طريقة النقل أن نتعامل مع مشاكل تحليل واختيار موقع المصنع ، الا أنه يجدر أن ننوه هنا أن اختيار موقع المصنع لا ينبغي فقط على الموقع الأقل تكلفة لنشاط النقل ولكن هناك العديد من الاعتبارات والعوامل التى ينبغي أن تكون محل تحليل وتدقيق، وأن تكاليف النقل هى احدى تلك العوامل ولا يمكن أن تكون بديلاً عنها ، خلاصة القول أنه يمكن استخدام طريقة النقل لتعطينا فكرة واضحة عن تكاليف النقل النسبية للمواقع المحتملة ، ومن ثم سيكون لذلك أثر هام فى اختيار الموقع .

## أسئلة وتطبيقات:

١- الجدول التالي يوضح تكاليف نقل الطن من المصانع الى المخازن والكميات المتاحة في كل مصنع وكذا الكميات المطلوبة لكل مخزن:

بيان	المخزن (س)	المخزن (ص)	المخزن (ع)	طاقة المصنع
المصنع (أ)	٦ جنيه	٩ جنيه	١٢ جنيه	٣٠٠ وحدة
المصنع (ب)	٣ جنيه	١ جنيه	٣ جنيه	٣٦٠ وحدة
إحتياجات المخازن	٤٥٠ وحدة	٦٠ وحدة	٩٠ وحدة	

والمطلوب: ايجاد جدول الشحن الأمثل الذي يصل باجمالى تكلفة النقل الى أدنى حد لها.

٢- شركة لانتاج الأسمدة الكيماوية لها ثلاثة مصانع تمد خمسة مخازن مركزية باحتياجاتها من الأسمدة وقد تبين أن مخزون الأسمدة بهذه المصانع الثلاثة لهذا الاسبوع كما يلي:

المصنع	الكمية بالطن
(١)	٢٠٠
(٢)	١٠٠
(٣)	١٥٠

وقد تبين من خلال سجلات الشركة أن تكلفة نقل الطن من كل مصنع الى كل مخزن كما هو موضح فيما يلي (بالجنيهات):

مخزن	مخزن	مخزن	مخزن	مخزن	
(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)	
٥	١	٦	٣	١	مصنع (١)
٢	٣	٤	٥	٤	مصنع (٢)
٤	٢	٣	٢	٣	مصنع (٣)

وتحتاج المخازن الى كميات الأسمدة التالية للأسبوع القادم:

المخزن	الاحتياجات
(أ)	٨٠ طن
(ب)	٩٠ طن
(ج)	١٠٠ طن
(د)	٧٠ طن
(هـ)	٦٠ طن

أوجد جدول الشحن للأسبوع القادم والذي يعمل على تخفيض جملة تكاليف النقل ويحقق احتياجات كل مخزن من المخازن الخمسة.

٣- أعطيت البيانات التالية والخاصة بالمطلوب انتاجه من السلع ١، ٢، ٣ وطاقات الآلات الانتاجية، وكذلك التكاليف التي يتحملها المصنع نتيجة استخدام آلة معينة لانتاج سلعة معينة، وطلب منك مدير تخطيط ومراقبة الانتاج توزيع انتاج السلع على الآلات بحيث تكون اجمالى تكلفة الانتاج عند حدها الأدنى

البيانات	تكلفة انتاج الوحدة على كل آلة				المطلوب انتاجه (بالألف)
	أ	ب	ج	د	
السلعة ١	٢٠	٣١	٢٩	٤٨	١٥
السلعة ٢	٦٩	٣٧	٣٧	٣٩	٣٠
السلعة ٣	٤٥	٦٠	٦٧	١٨	٤٥
طاقة الآلة (بالألف)	٢٥	٣٠	٣٠	٣٥	

٤- تمتلك هيئة النقل العام ثلاثة جراجات بمنطقة شمال القاهرة متاح بكل منها أعداد الاتوبيسات الآتية:

جراج (أ)	١٠	أتوبيس
جراج (ب)	٢٢	أتوبيس
جراج (ج)	١٨	أتوبيس

وهذه الاتوبيسات مطلوبة عند بداية ثلاثة خطوط هي س، ص، ع كالآتى:



خط (س) ٦ أتوبيس

خط (ص) ٣٠ أتوبيس

خط (ع) ١٤ أتوبيس

فما هو العدد الأمثل من الاتوبيسات التي تخرج من الجراجات الى بداية الخطوط والذي يجعل اجمالي المسافات المقطوعة أقل ما يمكن علما بأن المسافات بين كل جراج وبداية كل خط كانت كالاتي (بالكيلو متر):

ع	ص	س	
١٥	١٠	٦	أ
١٦	٦	٤	ب
٨	٥	١٢	ج

٥- باستخدام المعلومات التالية، ضع مشكلة تخطيط الانتاج في شكل يمكن معه استخدام طريقة النقل في الوصول الى خطة الانتاج، وحلها للوصول الى أفضل خطة إنتاجية.

الفترة			بيان
(٣)	(٢)	(١)	
٦٥٠	٧٠٠	٥٠٠	الطلب
٥٠٠	٥٠٠	٥٠٠	الطاقة الأصلية
٥٠	٥٠	٥٠	الطاقة الإضافية
٤٠٠	١٢٠	١٢٠	توفير من عند الغير
		١٠٠	مخزون أول المدة

تكاليف انتاج الوحدة في الوقت الأصلي ٦٠ جنيه للوحدة.

تكاليف انتاج الوحدة في الوقت الاضافي ٨٠ جنيه للوحدة.

تكاليف الحصول على الوحدة من الغير ٩٠ جنيه للوحدة.

تكاليف تخزين الوحدة ١ جنيه للوحدة / شهر.

٦- تبحث شركة الحائر عن أفضل طريقة لتخطيط انتاجها للأربعة شهور القادمة (سبتمبر ، أكتوبر، نوفمبر، ديسمبر) وتسير الادارة العليا على سياسة ثبات حجم العمالة والذي يبلغ الآن ٢٠٠ عامل يعملون عشرون يوما في الشهر بواقع ثمان ساعات يوما، وبأجر خمسة جنيهات في الساعة وتبلغ طاقة الوقت الاضافي ٢٠٪ من طاقة الوقت الاصلى، ويزيد أجر الساعة بمعدل ٥٠٪ خلال الوقت الاضافي وتنتج الشركة عدة نماذج من المنتج يتطلب كل منها ٢٠ ساعة عمل وما يعادل ٥٠ جنيه من المواد المباشرة، وتبلغ تكلفة الاحتفاظ بوحدة من المخزون لمدة شهر عشرة جنيهات، وكان المخزون في نهاية أغسطس ٥٠٠ وحدة وترغب الشركة في الاحتفاظ بمخزون قدره ١٠٠٠ وحدة في نهاية ديسمبر، وتدفع الشركة ما يعادل ٥٠٠ جنيه كغرامة عن كل وحدة لا يمكن تليبيتها.

وقد تبين ان الطلب المتوقع (في شكل عدد ساعات عمل) كان كالاتى:

سبتمبر	٤٠,٠٠٠
أكتوبر	٤٠,٠٠٠
نوفمبر	٤٥,٠٠٠
ديسمبر	٤٥,٠٠٠

والمطلوب: وضع المشكلة السابقة في شكل يمكن عن طريقه استخدام طريقة النقل للوصول الى الحل الامثل.

٧- تستعد إدارة التجنيد بالقوات المسلحة لاستقبال ١٠٠٠٠٠٠ مجند من نوعيات مختلفة يقدر توزيعها النسبي على النحو التالى: ٢٠٪ مؤهلات عليا، ٣٠٪ مؤهلات متوسطة، ٥٠٪ بدون مؤهل.

ويراد توزيع هؤلاء المجندين للوفاء باحتياجات أفرع القوات المسلحة المختلفة كالاتى:

المشاة ٢٠٠٠٠، الدفاع الجوى ٢٠٠٠٠، المركبات ٣٠٠٠٠، القوات الجوية ١٠٠٠٠، القوات البحرية ٢٠٠٠٠.

وتقوم إدارة التجنيد على ضوء الخبرات السابقة وبالتشاور مع قادة الأسلحة المختلفة بأعداد جدول يوضح كفاءة كل نوعية من المؤهلات على كل فرع من أفرع القوات المسلحة، وقد كانت مؤشرات الكفاية وفقا للأسلحة المختلفة على النحو التالي:

المشاه	مؤهلات عليا	مؤهلات متوسطة	بدون مؤهل
١	٣	٢	
٥	٢	١	
٣	٢	١	
٣	٢	١	
٢	٢	١	

وترغب إدارة التجنيد في توزيع المجندين بشكل يحقق احتياجات الأسلحة المختلفة، وفي نفس الوقت الحد الأقصى من الفاعلية الاجمالية.

والمطلوب: أن تعد توزيعا يمكن ان تسترشد به إدارة التجنيد.

٨- أعلنت إحدى الشركات الكبرى عن عدد من الوظائف الشاغرة لديها وكانت نوعية تلك الوظائف والأعداد المطلوبة منها كالآتي:-

(٥) وظيفة مالية، (٧) وظيفة تسويقية، (٤) وظيفة محاسبية، (٤) وظيفة علاقات عامة، و(٢) وظيفة تخطيط اقتصادي.

وقد تقدم عدد من خريجي كليات التجارة لشغل هذه الوظائف، وفيما يلي بيانا بعدد المتقدمين وتخصصاتهم: (٢٠) إدارة أعمال، (٢٠) محاسبة، (١٠) إقتصاد، و (١٠) تأمين.

ولما كانت الشركة تهدف إلى شغل هذه الوظائف بأنسب تخصص لذلك تم اعداد جدول يمثل مدى كفاءة كل تخصص لكل نوعية من أنواع الوظائف ولقد أخذ هذا الجدول الصورة التالية:

## مالية تسويقية محاسبية علاقات تخطيط

### عامة اقتصادى

٦	٨	٧	١٠	٩	تخصص إدارة الأعمال
٤	X	١٠	٦	١٠	تخصص المحاسبة
١٠	٧	X	٦	٦	تخصص الاقتصاد
X	٦	٧	٥	٧	تخصص التأمين

(X) هذه الإشارة تعنى عدم الرغبة فى شغل تلك النوعية من الوظائف بهذا التخصص.

والمطلوب: أن تساعد إدارة شئون العاملين بالشركة فى التوصل الى التوزيع الأمثل للمتقدمين لشغل هذه الوظائف الشاغرة.

٩- تمتلك إحدى الشركات أربعة مراعى لتربية الابقار لانتاج الألبان هى (س١)، (س٢)، (س٣)، (س٤) وتقوم بنقل منتجاتها الى خمسة مراكز توزيع هى (ص١)، (ص٢)، (ص٣)، (ص٤)، (ص٥).

فإذا علمت ان تكلفة نقل الجالون من الألبان من كل مركز انتاج الى مركز توزيع وكذلك الكميات المتوقعة انتاجها من كل مزرعة والاحتياجات المتوقعة لكل مركز توزيع كانت كالاتى:

مراكز التوزيع المراعى	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	الانتاج بالجالون
س١	١٤	١٤	١٦	١٨	١٦	٦٠٠
س٢	١٦	١٢	١٢	١٥	١٧	٨٠٠
س٣	١٨	١٧	١٦	١٤	١٤	٧٦٠
س٤	١٧	١٧	١٦	١٢	١٣	٦٠٠
الطلب	٥٠٠	٧٠٠	٦٤٠	٦٠٠	٣٢٠	

المطلوب: ايجاد التوزيع الأمثل لانتاج المراعى الاربعة لتلبية احتياجات مراكز التوزيع الخمسة.



١٠- تقوم إحدى شركات النقل الجوي بجدولة رحلاتها الجوية الى بعض عواصم الدول الاجنبية بالاضافة الى بعض خطوط شبكتها الجوية وذلك عن طريق تحديد عدد الرحلات الجوية التى سيتم تشغيلها فى الموسم السياحى القادم وكذلك تحديد طراز الطائرة الذى سيتم تشغيله على كل من هذه الخطوط الجوية، ومن المعروف لدى القائمون بتخطيط الرحلات الجوية أن الربح المحقق من كل رحلة جوية على كل خط جوى يتوقف بالاضافة الى كثير من الاعتبارات الى اعتبار أساسى لايمكن تجاهله وهو طراز الطائرة. والجدول التالى يوضح ربح تشغيل كل رحلة جوية على كل خط جوى باستخدام كل طراز من طراز الطائرات المملوكة للشركة (الربح بالآلاف جنيه):

طراز الطائرة	الخط الجوى (س)	الخط الجوى (ص)	الخط الجوى (ع)	الخط الجوى (ل)	الخط الجوى (م)
بوينج ٧٠٧	٤٠٠	٣٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٠٠
بوينج ٧٣٧	٣٨٠	٣٦٠	x	١٨٠	٨٠
بوينج ٧٤٧	٦٠٠	٥٢٠	٩٠٠	x	x
ايرباص	٥٣٠	٥٠٠	٨٥٠	x	x

(x) هذه الاشارة تغنى ان طراز الطائرة لا يصلح للتشغيل على ذلك الخط الجوى لأسباب فنية خاصة بمدى الطائرة.

فاذا علمت أن متوسط عدد الرحلات المتاحة من الطراز ٧٠٧ هي ١٢٠ رحلة، ومن الطراز ٧٣٧ ٣٠٠ رحلة، ومن الطراز ٧٤٧ عدد ٢٢٠ رحلة، ومن الطراز الايرباص عدد ١٩٠ رحلة، كذلك تبلغ الرحلات المطلوب تشغيلها على كل خط جوى للوفاء بحركة الطلب على كل خط جوى كالتالى:

الخط الجوى (س)	٢٥٠	رحلة
الخط الجوى (ص)	١٥٠	رحلة
الخط الجوى (ع)	١٠٠	رحلة
الخط الجوى (ل)	٨٠	رحلة
الخط الجوى (م)	٦٠	رحلة



فاوجد بطريقة النقل الجدولة المثلّى لطراز الطائرات للتشغيل على خطوط الشبكة الجوية.

١١- تمتلك احدى الشركات ٣ مصانع أ١، أ٢، أ٣ ذات طاقة انتاجية ٢٠٠، ٢٥٠، ٤٠٠ ألف وحدة على الترتيب، كما تمتلك أيضا ثلاثة مراكز توزيع ذات طاقة استيعابية ٣٥٠، ٣٠٠، ٢٠٠ ألف وحدة على الترتيب. وقد استدعيت لابداء رأيك في كيفية توزيع انتاج المصانع الثلاثة على مراكز التوزيع المختلفة بهدف تخفيض اجمالي تكاليف النقل الى أدنى حد لها، علما بأن جميع الوحدات المنتجة متماثلة تماما، وأن تكاليف نقل الوحدة من كل مصنع الى كل مركز توزيع كانت كالآتي:

من المصنع (أ١) : ٥٠ قرشاً الى المركز ب١، ٧٠ قرشاً الى المركز ب٢، ١٠٠ قرشاً الى المركز ب٣.

من المصنع (أ٢) : ٩٠ قرشاً الى المركز ب١، ٨٠ قرشاً الى المركز ب٢، ٥٠ قرشاً الى المركز ب٣.

من المصنع (أ٣) : ٦٠ قرشاً الى المركز ب١، ١٠٠ قرشاً الى المركز ب٢، ٥٠ قرشاً الى المركز ب٣.

والمطلوب: أوجد جدول الشحن الأمثل على أن تقدم جدولاً مبدئياً يتم اعداده باستخدام:

- طريقة الركن الشمالى الشرقى.
- طريقة أدنى تكلفة فى الصف.
- طريقة أدنى تكلفة فى العمود.
- طريقة أدنى تكلفة فى المصفوفة.
- طريقة فوجل التقريبية.
- طريقة رسل التقريبية.

# **"تابع" الفصل الخامس**

## **مشكلة التخصيص**

**\* مقدمة**

**\* الطريقة المجرية للتخصيص**

**\* طريقة الفرع والحد**

**\* معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص**



## مشكلة التخصيص

### The Assignment Problem

#### مقدمة

كما هو الحال بالنسبة لمشكلة النقل ، فإن مشكلة التخصيص تعتبر أيضاً حالة خاصة أخرى من مشاكل البرمجة الخطية ، وإن كانت فى حقيقة الأمر لا تخرج عن كونها حالة من الحالات الخاصة لمشكلة النقل ، أى أننا يمكن أن نعتبرها مشكلة نقل ولكن ذات خصائص معينة مما يجعلنا نعاملها على أنها حالة خاصة تنتمى الى مشكلة النقل ، ولعل هذه الخاصية هى التى جعلتنا نجمع بينهما فى فصل واحد ، وتتمثل أهمية مشكلة التخصيص بأن لها مدى واسع فى معالجة المشاكل ومجال رحب للتطبيق فى مجال اتخاذ القرارات الادارية ، وهذا هو السبب وراء اهتمامنا بتحليل وعرض مفهوم وطبيعة هذه المشكلة والاسباب فيها طالما أنها تفيد فى معالجة كثيراً من المشاكل اليومية والتخطيطية التى تواجه متخذى القرارات فى كافة أنواع المؤسسات على اختلاف طبيعتها وحجمها ومجال تخصصها .

وتقوم مشكلة التخصيص على مفهوم اساسى يتلخص فى العمل على تخصيص عدد من العناصر المفردة (أى ليست كميات ولكنها الوحدة الواحدة) على عدد من الأغراض أو الاستخدامات الفردية أيضاً بحيث يخصص مصدر معين على غرض معين ، وهذا المفهوم هو الذى جعل مشكلة التخصيص تعتبر حالة خاصة من مشاكل النقل، إذ أنه فى حين تتعامل مشكلة النقل مع اشباع احتياجات غرض معين بكميات معينة من مصدر أو عدة مصادر متاح بها تلك الكميات ، فإن مشكلة التخصيص تعمل على تخصيص مورد مفرد معين بالذات لاشباع حاجة مفردة معينة بالذات .

ورقق هذا المفهوم فإن مشكلة التخصيص تهدف مثلاً - من بين ما تهدف اليه - الى الوصول الى أقل تكلفة - وقد يكون لها هدف

تخصيص الافراد على مختلف المهام ، أو تخصيص رجال البيع على المناطق البيعية ، أو تخصيص عقود الانشاءات على عدد من المقاولين ومجالات أخرى متعددة وكثيرة طالما كان من الممكن صياغتها بشكل يتفق مع طبيعة هذه المشكلة وأصبحت مشكلة التخصيص مفيدة في حل الكثير من المشاكل الفرعية لمعظم مشاكل بحوث العمليات الكبيرة والمعقدة جداً .

وبهدف توضيح طبيعة مشكلة التخصيص وطبيعة المشاكل التي تتعامل معها والفرق بينها وبين مشكلة النقل ، سنسوق هنا مثلاً مبسطاً بفرض التوضيح وتحقيق هدف التبسيط والتوضيح معاً .

بفرض أن أحد مكاتب الاستشارات الادارية والبحوث قد تعاقد مع ثلاثة من العملاء كل منهم ينبغي أن يتولى مكتب الاستشارات القيام بدراسة تسويقية لمنتجاته ، ويريد مكتب الاستشارات أن يخصص مستشاراً علمياً لكل دراسة من الدراسات الثلاثة . وبفرض أنه يوجد حالياً ثلاثة مستشارين بالمكتب الاستشاري يعتبروا قد انتهوا من اعمال سبق تكليفهم بها وأنهم متاحون فعلاً لتولى مسئولية أى من تلك الدراسات الثلاثة . أى أنه يمكن تكليف كل منهم للقيام بمسئولية دراسة معينة ، فالمستشارون متاحون ثلاثة ، والدراسات المطلوبة ثلاثة اذن يمكن أن يتولى مستشار معين القيام ببحث معين ، لو كان الامر بهذه البساطة ما وجدت مشكلة ، ولكن الامر ذات بعد أهم وهدف ينبغي تحقيقه وليس مجرد توزيع أعمال، ان توزيع العمل يتعين أن يستهدف ليس مجرد اسناد عمل لكل شخص بل الهدف أن تكون عملية التوزيع هذه تهدف الى الانتهاء من الاعمال على خير وجه وهذا هو الفرق بين مجرد انجاز العمل وبين الرغبة في بلوغ الكفاءة في الانجاز. ولذلك فإن ادارة المكتب الاستشاري وبما لديها من خبرة وسابق معرفة بالمستشارين الثلاثة المتاحين حالياً ، تعرف وتدرک تماماً أن الوقت الذي سيستغرقه كل منهم في تنفيذ أى من تلك الدراسات الثلاثة سيختلف من دراسة لأخرى وفقاً للمقدرة



أى ان المشكلة التى تواجه ادارة المكتب الاستشارى هى الكيفية التى يتم بها تخصيص المستشارون الثلاثة المتاحين على تلك الدراسات الثلاثة بشرط أن يكون مجموع الوقت المستغرق للانتهاء منها جميعاً أدنى حد ممكن .

وحتى يمكن تبسيط تلك المشكلة ، فإنه من الافضل أن نحدد أولاً كافة البدائل المتاحة أمام الادارة ، أو بمعنى آخر أن نقف أولاً على كافة التخصيصات الممكنة بشرط أن يخصص مستشار واحد فقط لتنفيذ دراسة واحدة فقط والا يقوم بالدراسة الواحدة أكثر من مستشار واحد .

حيث أنه يوجد ثلاثة مستشارون فقط وثلاثة بحوث ، فإن الحلول البديلة والممكنة للتخصيص هى ٦ حلول ( $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ )  
فإذا رمزنا للمستشارون بالرموز أ ، ب ، ج ، وللدراسات

بالرموز س ، ص ، ع

فإن كافة التخصيصات المحتملة يمكن حصرها كالآتى :

١- أ س ، ب ص ، ج ع

٢- أ ص ، ب ع ، ج س

٣- ب س ، أ ص ، ج ع

٤- ب ص ، أ ع ، ج س

٥- ج س ، ب ع ، أ ص

٦- ج س ، ب ص ، أ ع

إن هذه الحلول هى بمثابة حصر شامل لكافة الحلول البديلة ( التخصيصات البديلة ) لمشكلة مكتب الاستشارات الادارية . ولكن التساؤل الهام هو : على أى اساس يتم اختيار الحل الأمثل ؟ اذا كان الهدف هو مجرد اسناد اعمال الى اشخاص فإن الاختيار الجزافى العشوائى يكفى ، أما اذا كان مكتب الاستشارات الادارية يهدف من وراء البحث عن التخصيص الأمثل أن يكون مجموع الوقت المستغرق للانتهاء من الدراسات الثلاثة أقل ما يمكن ، فإن الاختيار الجزافى لا يكون فى صالح تحقيق هذا الهدف ، ومعنى ذلك ان معيار اختيار التخصيص الأمثل هو تحقيق الهدف المراد بلوغه ، وحيث أن الهدف فى

لذا يتعين ان نتعرف على الزمن الذى يستغرقه كل مستشار فى انجاز كل دراسة . وبفرض أن مكتب الاستشارات الادارية قد أعد الجدول التالى للأزمته المقدرة لالنتهاء من كل دراسة اذا ما قام بانجازها كل مستشار :

المستشار	الازمنه التقديرية لالنتهاء (باليوم)		
	(س)	(ص)	(ع)
(أ)	٢٠	٣٠	١٨
(ب)	١٨	٣٦	١٠
(ج)	١٢	٢٨	٦

ولتوضيح مغزى الأزمنة الواردة بهذا الجدول نقول أنه بالنظر الى عمود الدراسة (س) يتبين أن المستشار (أ) يستطيع انجاز هذه الدراسة فى مدة قدرها عشرون يوماً ، أما اذا قام بنفس الدراسة المستشار (ب) فيمكن الالنتهاء منها فى زمن مقداره ١٨ يوماً ، فى حين أن المستشار (ج) يمكنه فى ١٢ يوماً فقط من اتمام هذه الدراسة . هذه الاختلافات فى الفترة الزمنية التقديرية راجعة كما أسلفنا الى اختلاف خبرة ومقدرة كل مستشار على انجاز دراسة معينة . وطالما أن الفترة الزمنية لانجاز نفس الدراسة تختلف باختلاف من يؤديها ، إذن يتعين عند تخصيص هذه الدراسات أن يتم توزيعها بطريقة علمية تضمن لنا حسن التخصيص الأمثل .

لقد حددنا قبل ذلك حصر شامل لكافة الحلول البديلة أو كافة التخصيصات البديلة ، إذن يتعين علينا الآن وبعد الوقوف على الأزمنة التقديرية الواردة بالجدول السابق ان نقوم بتقييم الحلول البديلة لاختيار الحل الأمثل الذى يعمل على الوصول بمجموع زمن الالنتهاء من الدراسات الثلاثة الى الحد الأدنى .

ويوضح الجدول التالى أزمنة الالنتهاء من كل دراسة بالنسبة لكافة التخصيصات البديلة الممكنة :

المستشار	الحلول البديلة للتخصيص					
	البديل الاول	البديل الثاني	البديل الثالث	البديل الرابع	البديل الخامس	البديل السادس
أ	٢٠ س	٢٠ س	٣٠ ص	١٨ ع	٣٠ ص	١٨ ع
ب	٣٦ ص	١٠ ع	١٨ س	١٨ س	١٠ ع	٣٦ ص
ج	٦ ع	٢٨ ص	٦ ع	٢٨ ص	١٢ س	١٢ س
مجموع الاثمنة	٦٢	٥٨	٥٤	٦٤	٥٢	٦٦

أدنى وقت ممكن

ومن هذا الجدول يتضح أن البديل الأمثل هو البديل الخامس ،  
ووفقاً لهذا الحل يتم تخصيص المستشار ( أ ) لتنفيذ الدراسة (ص) ،  
ويعهد للمستشار (ب) القيام بالدراسة (ع) ، أما الدراسة (س)  
فيخصص لها المستشار (ج) ، ويكون اجمالي الوقت المقدر لانتهاء من  
تلك الدراسات الثلاثة ٥٢ يوماً .

ان المثال المبسط الذي عالجنه في الجزء السابق يوضح مفهوم  
مشكلة التخصيص وماذا تهدف اليه ، إلا أن المدخل الذي استخدمناه في  
الحل والذي كان يستند الى حصر كافة الحلول البديلة للتخصيص ثم  
اختيار أفضلها ، قد يكون مدخلاً مناسباً للتعامل والتطبيق مع تلك  
المشاكل من نوعية المثال الذي طرحناه في هذا الجزء ، أى يكون مناسباً  
مع تلك المشاكل الصغيرة والبسيطة والتي لا تتجاوز كافة حلولها  
البديلة عن ستة حلول فقط ، إلا أنه يعتبر غير مناسب بل ومعقد وغير  
عملي عندما يستخدم أو نفكر في استخدامه للتعامل مع المشاكل  
الكبيرة التي هي السمة الغالبة في دنيا الاعمال في عصرنا الحديث .

فمثلاً اذا كانت المشكلة التي قمنا بحلها تتضمن أربعة  
مستشارين وأربعة ابحاث ففي هذه الحالة تكون عدد الحلول البديلة  
الممكنة والواجب تقييمها لاختيار أفضلها ٢٤ بدلاً (  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  ) ، أما  
اذا كانت المشكلة هي تخصيص ثمانية افراد على ثمانية مهام فسيوجد  
لها ٤٠٣٢٠ حلاً ممكناً (٨!) ، وطبيعى أنه من غير العملي ومن غير

المقبول أن نحاول حل مثل تلك المشكلة حلاً يدوياً ، وإن كان ذلك غير  
عسير باستخدام الحاسبات الآلية طالما أن عدد الموارد  $\geq 15$  . أما أكثر من  
ذلك فإنها مضيعة للوقت ومكلفة حتى باستخدام الحاسب الآلى .

كما يجب أن نوضح هنا لماذا ذكرنا فى مقدمة هذا الجزء أن  
مشكلة التخصيص تعتبر حالة خاصة من مشكلة النقل ؟ إن ذلك كان  
بسبب أنه يمكن حل مشكلة التخصيص باستخدام طريقة النقل ،  
ويمكن فيما يلى أن نوضح كيف يمكن وضع مشكلة التخصيص التى  
كانت موضع مثالنا فى هذا الجزء على الصورة العامة لمشكلة النقل  
وكيفية محاولة حلها باستخدام منهج طريقة النقل.

المعيار	س	ص	ع	المعيار
أ	٢٠	٣٠	١٨	١
ب	١٨	٣٦	١٠	١
ج	١٢	٢٨	٦	١
المطلوب	١	١	١	٣

ويمكن ايجاد الحل المبدئى لتلك المشكلة باستخدام طريقة الركن  
الشمالى الشرقى كما هو واضح من الجدول السابق والذى يتبين منه  
أن الفترة الزمنية اللازمة لانتهاء من الدراسات الثلاثة وفقاً للحل  
المبدئى هي  $1 \times 20 + 1 \times 36 + 1 \times 6 = 62$  يوماً  
وهذا الحل المبدئى هو نفسه الحل الممكن الأول الذى توصلنا اليه  
من طريقة الحصر الشامل لكافة الحلول البديلة .

إلا أنه بالنظر الى الجدول المبدئى السابق يتبين أنه حل غير  
اساسى لأن عدد الخلايا المشغولة به ( المتغيرات الاساسية ) يقل عن  
[ ( عدد الاعمدة + عدد الصفوف ) - ١ ] . ولذلك وحتى يمكن اجراء  
تحسين على الحل المبدئى لابد أن نطبق الاسلوب الذى اتبعناه فى حالة  
انتكاس أو اعتلال مشكلة النقل ، أى أن نخيف الى الخلايا المشغولة  
خليتان ونشغلها بكمية صفرية نرمز لها بالرمز ( ش ) ، وذلك حتى



نتغلب على مشكلة الاعتلال ومن ثم حلها بالطريقة العادية وصولاً للحل الأمثل .

مما سبق يتضح أنه يمكن التعامل مع مشكلة التخصيص بأسلوب حصر كافة الحلول الممكنة، إلا أن هذا الأسلوب لا يصلح إلا لحل المشاكل الصغيرة وحتى لو لجأنا للحل عن طريق الحاسب الالى فإنه مضيعة للوقت والتكلفة . كذلك فقد تبين أن حل مشكلة التخصيص باستخدام طريقة النقل إلا أنه سيؤدي حتماً بانتكاس الحل بداية من الجدول الأول ووصولاً لجدول الحل الأمثل وهذا يتطلب بطبيعة الحال المزيد من العمليات الحسابية التى تستلزمها طبيعة الحل المنتكس .

وآزاء تلك الصعوبات ، فقد تبلورت أساليب جديدة حديثة أسهل وأسرع فى التعامل مع مشكلة التخصيص وهذا ما سنتناوله فى الجزء التالى ، إذ سنتناول بالمزيد من الشرح والتحليل لطريقتين من أهم الطرق المستخدمة لحل مشكلة التخصيص وهما :

١- الطريقة المجرية للتخصيص .

٢- طريقة الفرع والحد .

وفيما يلى كيفية استخدام هاتين الطريقتين فى معالجة مشاكل التخصيص:

### أولاً: الطريقة المجرية للتخصيص Hungarian Method of Assingnment

وهذه الطريقة تعرف فى بعض الأحيان بطريقة التخصيص Assingment Method أو أسلوب التدفق (أو الفيضان) Flood's technique، وهذه الطريقة تمتاز بأنها سريعة وفعالة جداً فى التعامل مع مشاكل التخصيص .

وتسير الطريقة المجرية لحل مشاكل التخصيص فى ثلاثة خطوات أساسية سنقوم بشرحها وتحليلها بالتتابع فيما يلى :

**الخطوة الأولى : اعداد جدول تكلفة الفرصة :**

**Opportunity- cost .**

وتقوم الطريقة المجرية للتخصيص على تطبيق مفهوم تكلفة الفرصة ، وهذا المفهوم يعنى بصورة اجمالية موجزة أن تكلفة أى قرار



او أى موقف يتضمن حتماً تكلفة تلك الفرص التى تم التضحية بها عندما أخذنا ذلك الموقف أو أصدرنا ذلك القرار . ويلعب هذا المفهوم دوراً كبيراً عند التعامل مع العمليات الحسابية لحل مشكلة التخصيص . أما كيفية استخدام تكلفة الفرصة فى خطوات الحل بالطريقة الجبرية للتخصيص فإنه من المفيد أن نعرض مرة أخرى لجدول الأزمنة التقديرية لنفس المثال الذى تعرضنا له فى مقدمة هذا الجزء والخاص بمكتب الاستشارات الادارية والذى كان على الصورة التالية :

(س)	(ص)	(ع)
( أ )	٢٠	١٨
( ب )	١٨	١٠
( ج )	١٢	٦

فإذا فرض وقررنا أن يتولى المستشار ( أ ) القيام بالدراسة ( س ) فإنه يمكنه أن ينتهى منها فى مدة مقدارها عشرون يوماً ، ولكن بالنظر الى عمود الدراسة (س) نجد أن المدير (ج) كان فى مكانه الانتهاء من هذه الدراسة (س) فى مدة أقل مقدارها ١٢ فقط ، لذلك يمكن القول أن تخصيص المستشار (أ) للدراسة (س) قرار غير أمثل ، لأنه سيؤدى الى التضحية بفرصة مقدارها ٨ يوماً اذا ما خصص المستشار (أ) على الدراسة ( س ) وبتضحية مقدارها ٦ يوماً اذا ما خصص المستشار (ب) على نفس الدراسة . أى أنه بالنسبة للعمود ( س ) فإن أفضل من يتولى هذا البحث هو المستشار (ج) أما اذا تولاه أى من (أ) ، (ب) فإن هناك تكلفة فرصة مقدارها ٨ يوماً بالنسبة للمستشار (أ) و ٦ يوماً بالنسبة للمستشار (ب) .

وعلى ذلك يمكن القول أننا لو قمنا بطرح أقل رقم فى العمود (س) من جميع الأزمنة بذلك العمود فإننا سنحصل على تكلفة الفرصة للدراسة ( س ) بالنسبة للمستشارين الثلاثة ، وبتكرار نفس العمل على العمود (ص) والعمود (ع) نحصل على جدول يمثل تكلفة الفرصة للدراسات الثلاثة بالنسبة للمستشارين الثلاثة .

من ناحية أخرى فكما كان لكل عمود تكلفة فرصة ، فإن لكل صف تكلفة فرصة أيضاً . فمثلاً يمكن للمستشار (أ) أن يقوم بتنفيذ أى من الأبحاث والدراسات الثلاثة ، إلا أنه بالنظر الى صف المستشار (أ) نجد أنه أفضل قيامه بالدراسة (ع) لأنه سيستغرق فيها زمناً مقداره ١٨ يوماً ، أما اذا خصصناه للقيام بالدراسة (س) فإننا بذلك نكون قد فقدنا فرصة مقدارها ٢ يوم ، وتكون تكلفة الفرصة ١٢ يوماً اذا خصصناه على الدراسة (ص) .

أى أنه اذا كانت هناك تكلفة فرصة للأعمدة فأيضاً هناك تكلفة فرصة للصفوف . وحيث أن الخطوة الأولى فى الطريقة المجرية هى اعداد جدول تكلفة الفرصة ، فإنه يتعين إذن لتنفيذ هذه الخطوة أن نحسبها للصفوف والأعمدة ، وهذا يستلزم أن تمر الخطوة الأولى على مرحلتين هما :

١- طرح أقل رقم بكل صف من جميع أرقام ذلك الصف وذلك بالنسبة لكل الصفوف الموجودة بالمشكلة: وبتطبيق هذه المرحلة على جدول المشكلة التى نعالجها تكون النتيجة بعد العمليات الحسابية كالاتى :

(ع)	(ص)	(س)	
صفر	١٢	٢	(أ)
صفر	٢٦	٨	(ب)
صفر	٢٢	٦	(ج)

٢- طرح أقل رقم بكل عمود ( من الجدول الناتج من المرحلة السابقة وليس الجدول الاصلى) من أرقام ذلك العمود وذلك بالنسبة لكل الأعمدة الموجودة بالجدول : ويظهر الجدول الجديد بعد تلك العملية الحسابية على الصورة التالية :

(ع)	(ص)	(س)	
صفر	صفر	صفر	(أ)
صفر	١٤	٦	(ب)
صفر	١٠	٤	(ج)

وهذا الجدول الذى توصلنا اليه بعد المرحلة الأولى والثانية يمثل جدول تكلفة الفرصة للمستشارين ( صفوف ) وللدراسات ( أعمدة ) ، أى أنه يمثل تكلفة الفرصة لكامل المشكلة .

وبطبيعة الحال فإننا نريد أن نصل الى ذلك التخصيص الذى يصل بتكلفة الفرصة الى ( صفر ) لأن معنى ذلك أن هذا التخصيص هو الأمثل حيث تصل تكلفة الفرصة الى أدنى حد لها وهو الصفر . وحتى يستطيع القارئ أن يتابع هذا المفهوم والخطوات التالية وكيف اننا نسعى الى الوصول الى تكلفة فرصة صفورية لنتمكن من تحديد الحل الأمثل . سنعيد فيما يلى الحلول الممكنة التى سبق استعراضها عند حصر كافة الحلول ولكن لن نضع آزمونها الحقيقية بل نستبدلها بالآزمة الواردة بجدول تكلفة الفرص الناتج من المرحلة الثانية :

البديل الأول = أ س ، ب ص ، ج ع = صفر + ١٤ + صفر = ١٤

البديل الثانى = أ س ، ب ع ، ج ص = صفر + صفر + ١٠ = ١٠

البديل الثالث = أ ص ، ب س ، ج ع = صفر + ٦ + صفر = ٦

البديل الرابع = أ ع ، ب س ، ج ص = صفر + ٦ + ١٠ = ١٦

البديل الخامس = أ ص ، ب ع ، ج س = صفر + صفر + ٤ = ٤

البديل السادس = أ ع ، ب ص ، ج س = صفر + ١٤ + ٤ = ١٨

لقد سبق القول أن البديل الخامس كان هو الحل الأمثل وكما هو واضح أيضاً وصلت تكلفة الفرصة له الى أقل حد بالمقارنة بالحلول الأخرى البديلة ، ولكن هدفنا بعد اجراء هذه الخطوة أن نستمر فى تخفيض مصفوفة تكلفة الفرصة حتى نصل بقيمة أحد الحلول الى الصفر ، وطالما لا يوجد عنصر سالب فى المصفوفة فإن الحل الذى قيمته صفر يكون هو الحل الأمثل . ويمكن الاستمرار فى تخفيض مصفوفة تكلفة الفرصة وصولاً الى الحل الأمثل باتتباع الخطوات التاليتين :

**الخطوة الثانية : تغطية جميع القيم الصفورية بالمصفوفة :**

ونتعامل فى هذه الخطوة مع المصفوفة الناتجة من الخطوة الأولى التى تعبر عن مصفوفة تكلفة الفرصة . وتتمثل الخطوة

الثانية فى تغطية جميع القيم الصفرية بها بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة الافقية أو الرأسية أو كلاهما معاً ( ممنوع الخطوط القطرية ) ، ونؤكد مرة أخرى أن التغطية بالخطوط المرسومة يتعين أن يتوافر فيها شرطان هما :

١- أنها خطوط أفقية أو رأسية أو كلاهما .

٢- أن يتم التغطية بأقل عدد ممكن منها .

فإذا اتضح أن أقل عدد ممكن من تلك الخطوط والتي أمكن بها تغطية جميع القيم الصفرية عددها يساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمدة بالجدول ، نكون بذلك قد وصلنا الى الحل الأمثل ويبقى فقط تحديده وتعيينه ، أما اذا كان عدد تلك الخطوط أقل من عدد الصفوف (أو عدد الأعمدة) فإننا لم نصل بعد الى الحل الأمثل ويتطلب الأمر أن نسير الى الخطوة الثالثة فى الحل .

ويتطابق تلك الخطوة على مصفوفة تكلفة الفرصة : نجد أننا تمكنا من تغطية جميع القيم الصفرية بخطين فقط ( كما هو مبين بالمصفوفة أدناه ) ، وهذا يعنى أننا لم نصل بعد الى جدول الحل الأمثل حيث أن عدد الصفوف (أو عدد الأعمدة) ثلاثة :

	(ع)	(ص)	(س)
(أ)	مفر	مفر	مفر
(ب)	مفر	١٤	٦
(ج)	مفر	١٠	٤

أمكن تغطية جميع الخلايا الصفرية بخطين فقط.

### الخطوة الثالثة : تحسين الحل

تبين من خلال اختبار المثالية الذى اجريناه فى الخطوة الثانية أن مصفوفة تكلفة الفرصة السابقة لا تمثل مصفوفة الحل الأمثل ، لذلك سيتم فى هذه الخطوة العمل على تحسين الحل والذى يتم فى مراحل متتالية كالآتى :

١ - تعيين أقل قيمة غير مغطاه فى المصفوفة كلها ( بالنظر الى الجدول السابق يتبين أن أقل قيمة غير مغطاه هى القيمة (٤) .



٢- يتم طرح أقل قيمة غير مغطاه من جميع القيم غير المغطاه ( وهى القيم ٦ ، ١٤ ، ٤ ، ١٠ ، وبعد الطرح تصبح تلك القيم على الترتيب ٢ ، ١٠ ، صفر ، ٦ ) .

٣- اضافة أقل قيمة غير مغطاة ( وهى القيمة ٤ ) الى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة ( سنجد أن التقاطع فقط عند الخلية أ ع ، اذن القيمة الصفرية عند التقاطع بعد اضافة القيمة ٤ اليها تصبح ٤ ) .

٤- باقى القيم المغطاة وغير الواقعة عند تقاطعات لايجرى عليها أى تعديل بل تكتب فى الجدول التالى كما هى دون تغيير .

وبعد تطبيق العمليات الحسابية السابقة على المصفوفة الناتجة من الخطوة الثانية ستظهر المصفوفة الجديدة على الصورة التالية :

( س )	( ص )	( ع )	
صفر	صفر	٤	( أ )
٢	١٠	صفر	( ب )
صفر	٦	صفر	( جـ )

بعد اتمام تلك الخطوة نعود مرة أخرى لتكرار الخطوة الثانية وهى خطوة اختبار المثالية ، والتى تتضمن تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط الافقية والرأسية ، وفيما يلى إعادة تصوير المصفوفة بعد اجراء التغطية:

( س )	( ص )	( ع )	
صفر	صفر	٤	( أ )
٢	١٠	صفر	( ب )
صفر	٦	صفر	( جـ )

أقل عدد من الخطوط التى استخدمت لتغطية جميع القيم الصفرية

وبالنظر الى المصفوفة السابقة نجد أنه أمكن تغطية جميع القيم الصفرية بها بعدد ثلاثة خطوط وهو أقل عدد أمكن التغطية به ، وطبقاً لقاعدة المثالية فحيث أن عدد الخطوط المرسومة تساوى عدد الصفوف (أو الأعمدة) فإننا نكون بذلك قد وصلنا الى مصفوفة الحل



الأمثل ويتبقى فقط تعيين ذلك الحل الأمثل ( التخصيص الأمثل ) . ان الحل الأمثل للتخصيص وفق هذه الطريقة هو ذلك الحل الذى يكون مجموع تكلفة الفرصة له صفراً من واقع مصفوفة الحل النهائية .

ولكن يبقى سؤال وهو كيف يمكن تعيين الحل الأمثل من المصفوفة النهائية ؟

للتوصل الى ذلك نبحث عن ذلك الصف الذى يوجد به ( صفر ) واحد فقط ، فمثلاً الصف (أ) به قيمتين صفريتين ، اذن نتركه وننتقل الى الصف (ب) فسنجد أن به قيمة صفرية واحدة وهى الواقعة عند الخلية (ب ع) ، اذن يتم تخصيص المستشار (ب) للدراسة (ع) ، ثم نعود مرة أخرى للبحث عن صف به (صفر) واحد فقط سنجد أن الصف (أ) مازالت به قيمتين صفريتين ، والصف (ب) تم تخصيصه وانتهى الأمر ، والصف (ج) يوجد به ظاهراً قيمتين صفريتين ، بينما الحقيقة أنه توجد به قيمة صفرية واحدة ، لأن الدراسة (ع) قد تم تخصيصها للمستشار (ب) فكان العمود (ع) حذف مع صف (ب) ، وباستبعادهما من المصفوفة يكون الصف (ج) به قيمة صفرية واحدة وهى عند الخلية (ج س) ، لذا يتم تخصيص المستشار (ج) للدراسة (س) . ثم نعاود الكرة مرة أخرى لنبحث عن صف به قيمة صفرية واحدة ، سنجد أنه لم يعد أمامنا إلا الصف (أ) ، وهو فعلاً به قيمة صفرية واحدة ( وذلك بعد استبعاد العمود س والصف جـ ) واقعة عند الخلية (أ ص) لذلك يتم تخصيصها أى يخصص المستشار (أ) للدراسة (ص) .

وتلخيصاً للحل الأمثل تظهر المصفوفة التالية التخصيص

الأمثل وفقاً للخطوة الثالثة :

(س)	(ص)	(ع)	التخصيص الأمثل	تكلفة الفرصة
(أ) صفر	صفر	٤	(أ ص)	صفر
(ب) ٢	١٠	صفر	(ب ع)	صفر
(ج) صفر	٦	٦	(ج س)	صفر
<hr/>				
صفر				

ويكون الوقت المستغرق للانتهاء من الدراسات الثلاثة أقل زمن ممكن وفقاً لهذا التخصيص ، ولحساب ذلك الزمن يتطلب العوده الى القيم الموجودة بالمصفوفة الاصلية لتحديد زمن كل تخصيص ، و من ثم الزمن الكلى للتخصيص الأمثل للمشكلة كلها ، اذ من الجدول الاصلى يمكن حساب الزمن كالاتى :

(أ ص) ٢٠ يوم

(ب ع) ١٠ يوم

(ج س) ١٢ يوم

---

٥٢ يوماً

وهى نفس النتيجة التى توصلنا اليها سابقاً عند تطبيق طريقة الحصر الشامل للحلول البديلة .

مثال محلول :

مطلوب تخصيص ثلاثة مهام هي أ، ب ، ج للتشغيل على ثلاثة آلات هي س ، ص ، ع . بحيث تخصص مهمة واحدة فقط لكل آلة ، ولا تقوم الآلة الا بتشغيل مهمة واحدة فقط ، علماً بأن التكلفة التقديرية لتشغيل كل مهمة على كل آلة هي كالاتى :

(س)	(ص)	(ع)	
٢٥	٢١	٣٥	( أ )
١٥	٢٠	٢٤	( ب )
٢٢	١٩	١٧	( ج )

الحل :

قد يكون من الافيد بفرض المراجعة والتطبيق العملى أن نقوم  
بحل تلك المشكلة بكلتا الطريقتين السابقتين :

(١) الحل بطريقة حصر كافة الحلول البديلة :

حيث أن عدد المهام المطلوب تخصيصها على الآلات هي ثلاثة  
مهام ، وحيث أن عدد الآلات المطلوب تخصيص عليها أيضاً ثلاثة آلات  
أذن العدد الكلى لكافة الحلول البديلة الممكنة (١٢) أى  $3 \times 2 \times 1 = 6$  حلول  
بديلة وهذه الحلول البديلة وتكلفتها كالاتى :

البديل الأول = أ س ، ب ص ، ج ع =  $25 + 20 + 17 = 62$  — الحل الأمثل

البديل الثانى = أ ص ، ب س ، ج ع =  $31 + 15 + 17 = 63$

البديل الثالث = أ ع ، ب س ، ج ص =  $22 + 19 + 20 = 61$

البديل الرابع = أ س ، ب ع ، ج ص =  $25 + 24 + 19 = 68$

البديل الخامس = أ ص ، ب ع ، ج س =  $31 + 24 + 22 = 77$

البديل السادس = أ ع ، ب ص ، ج س =  $22 + 20 + 25 = 67$

أى ان التخصيص الأمثل هو :

تخصيص المهمة (أ) للتشغيل على الآلة (س) وبتكلفة ٢٥

تخصيص المهمة (ب) للتشغيل على الآلة (ص) وبتكلفة ٢٠

تخصيص المهمة (ج) للتشغيل على الآلة (ع) وبتكلفة ١٧

٦٢

تكلفة التخصيص

(ب) الحل باستخدام الطريقة الجبرية :

سنعيد فيما يلى تصوير المصفوفة الأصلية للمشكلة تمهيداً لاجراء  
خطوات الحل عليها وفقاً للطريقة الجبرية للتخصيص :

(ع)	(ص)	(س)	
٢٥	٢١	٢٥	( أ )
٢٤	٢٠	١٥	( ب )
١٧	١٩	٢٢	( ج )

### الخطوة الأولى : اعداد جدول تكلفة الفرصة :

ويتم اعداد هذا الجدول على مرحلتين :

١- طرح أقل قيمة فى كل صف من أرقام الصف

(ع)	(ص)	(س)	
١٠	٦	صفر	( أ )
٩	٥	صفر	( ب )
صفر	٢	٥	( ج )

٢- طرح أقل قيمة فى كل عمود من أرقام العمود ( على المصفوفة

السابقة )

(ع)	(ص)	(س)	
١٠	٤	صفر	( أ )
٩	٢	صفر	( ب )
صفر	صفر	٥	( ج )

### الخطوة الثانية : اختبار المثالية :

وتتم عن طريق ايجاد أقل عدد من الخطوط المستقيمة ( الأفقية

أو الرأسية أو كلاهما ) واللازمة لتغطية كل القيم الصفرية بالمصفوفة

السابقة :

(ع)	(ص)	(س)	
١٠	٤	صفر	( أ )
٩	٢	صفر	( ب )
صفر	صفر	٥	( ج )

ويتبين من الخطوط المرسومة أن عددها اثنين فقط فى حين ان

عدد الصفوف أو الأعمدة ثلاثة وهذا يعنى أن الحل غير أمثل ويحتاج

الى تحسين

## الخطوة الثالثة : تحسين الحل :

وتتم عن طريق:

- ١- تحديد أقل قيمة غير مغطاه (٣) .
- ٢- طرح هذه القيمة من جميع القيم غير المغطاه .
- ٣- إضافة هذه القيمة الى القيمة الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة .
- ٤- باقى القيم المغطاة غير الواقعة فى تقاطعات تنقل بدون تغيير، وبعد اجراء هذه العمليات الحسابية ستظهر المصفوفة على الشكل التالى :

(ع)	(ص)	(س)	
٧	١	صفر	(أ)
٦	صفر	صفر	(ب)
صفر	صفر	٨	(ج)

## الخطوة الرابعة : اختبار المثالية :

سيتم تغطية جميع القيم الصفرية بالمصفوفة السابقة بأقل عدد ممكن من الخطوط ومن ثم ستظهر المصفوفة بعد التغطية كالتالى :

(ع)	(ص)	(س)	
٧	١	صفر	(أ)
٦	صفر	صفر	(ب)
صفر	صفر	٨	(ج)

ومن هذه التغطية يتضح أننا قد وصلنا الى الحل الأمثل وسيتم تحديده و تعيينه كالاتى:

١- البحث عن صف به صفر واحد فقط سنجد أنه الصف (أ) إذن يتم

تشغيل المهمة (أ) على الآلة (س).

٢- البحث عن صف آخر به صفر واحد فقط سنجد أنه

الصف (ب) وذلك بعد أن تم إستبعاد العمود (س) لتخصيصه قبل



ذلك، إذن يتم تشغيل المهمة (ب) على الآلة (ص).

٢- الصفرة الوحيد الأخير هو بالصف (ج) إذن سيتم تشغيل المهمة (ج) على الآلة (ع).

وتلخيصاً لما تقدم فإن التخصيص الأمثل و تكلفته كالاتى:

تخصيص المهمة (أ) للتشغيل على الآلة (س) بتكلفة قدرها ٢٥

تخصيص المهمة (ب) للتشغيل على الآلة (ص) بتكلفة قدرها ٢٠

تخصيص المهمة (ح) للتشغيل على الآلة (ع) بتكلفة قدرها ١٧

إجمالي تكلفة التخصيص الأمثل ٦٢

وهذا التخصيص الأمثل هو نفسه الذى توصلنا اليه من تطبيق طريقه  
حصر كافة الحلول الممكنة.

مثال (٢):

أعلنت شركة النصر لصناعة الأجهزة المنزلية عن مناقصة عامة  
بين المقاولين الانشائيين لتنفيذ عدد أربعة خطوط إنتاج كل منها  
يستخدم لانتاج نوعيه معينه من السلع، وكانت سياسة الشركة تسير  
على عدم إسناد أكثر من خط إنتاج واحد للمقاول وذلك للاسراع فى  
الانتهاء من التنفيذ، وكذلك عدم تجزئة تنفيذ خط الإنتاج بين أكثر من  
مقاول تحديداً للمسؤولية، وقد تلقت الشركة عروضاً للتنفيذ من  
أربعة موردين، وبعد تفريغ العروض المقدمة أمكن تلخيص كافة  
المعلومات فى الجدول التالى :

(الأرقام بالآلاف جنيه)

خط الإنتاج / المقاول	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
الأول	٢٠	٣٦	٣١	١٧
الثاني	٢٤	٤٣	٤٠	١٢
الثالث	٢٢	٤٠	٣٨	١٨
الرابع	٣٦	٣٩	٣٥	١٦

و المطلوب: أن ترشد المسؤولين بالشركة الى التخصيص الأمثل لتنفيذ خطوط الإنتاج على المقاولين الأربعة والذي يعمل على تخفيض إجمالي تكاليف التنفيذ الى أدنى حد ممكن و بشرط التقيد بسياسات الشركة المقررة في هذا الخصوص .

### الحل

برغم أن المشكله التي نحن بصدد حلها الآن مكونه من أربعة صفوف و أربعة أعمدة أى أنها ليست كبيره بالمقارنه بغيرها من المشاكل التي يذخر بها عالم الأعمال في تلك الأيام، إلا أن إستخدام طريقة حصر الحلول البديله ستكون صعبه الى حد كبير اذا ما قورنت بإستخدام طريقة تكلفه الفرصه و حتى يقف القارئ على تلك الحقيقه سنقوم بحل هذا المثال بإستخدام الطريقتين و نترك له الحكم على أى الطريقتين أقدر في كفاءتها في التعامل مع المشاكل الكبيره وذلك أخذاً في الاعتبار أن تلك المشكله بمقاييس اليوم ليست من ذلك النوع من المشاكل الكبيره الواقعيه.

(١) الحل بإستخدام طريقة حصر الحلول الممكنة:

حيث أن المشكله مكونه من أربعة صفوف وأربعة أعمدة، إذن

مجموع الحلول الممكنة البديله لتلك المشكله =  $4!$  أى  $X_1 X_2 X_3 X_4 = 1$  ٢٤ حلاً. و سنقوم بإعداد حصر شامل لكافة تلك الحلول البديله وحساب تكلفة التنفيذ لتلك الحلول ومن ثم إختيار الحل الذى يعطى أقل تكلفه إجمالية لتنفيذ خطوط الانتاج الأربعة.

و الجدول التالى يوضح حصراً بتلك الحلول البديله (٢٤ حلاً) و تكلفة كل حل ، ثم تعيين الحل الأمثل من بينها ، مع ملاحظة أننا رمزنا للمقاولون على الترتيب بالرموز أ ، ب ، ج ، د ، و رمزنا لخطوط الانتاج بالرموز س ، ص ، ع ، ل ، على التوالى :

الحلول البديله	المقارن				اجمالي تكلفه التنفيذ بالالف جنيه
	أ	ب	ج	د	
١	س (٢٠)	ص (٢٤)	ع (٢٨)	ل (١٦)	١.٨
٢	س (٢٠)	ص (٢٤)	ل (١٨)	ع (٢٥)	١.٧
٣	س (٢٠)	ع (٤٠)	ص (٤٠)	ل (١٦)	١١٦
٤	س (٢٠)	ع (٤٠)	ل (١٨)	ص (٢٩)	١١٧
٥	س (٢٠)	ل (١٢)	ص (٤٠)	ع (٢٥)	١.٧
٦	س (٢٠)	ل (١٢)	ع (٢٨)	ص (٢٩)	١.٩
٧	ص (٢٦)	س (٢٤)	ع (٢٨)	ل (١٦)	١١٤
٨	ص (٢٦)	س (٢٤)	ل (١٨)	ع (٢٥)	١١٣
٩	ص (٢٦)	ع (٤٠)	س (٢٢)	ل (١٦)	١١٤
١٠	ص (٢٦)	ع (٤٠)	ل (١٨)	س (٢٦)	١٣٠
١١	ص (٢٦)	ل (١٢)	س (٢٢)	ع (٢٥)	١.٥
١٢	ص (٢٦)	ل (١٢)	ع (٢٨)	س (٢٦)	١٢٢
١٣	ع (٢١)	س (٢٤)	ص (٤٠)	ل (١٦)	١١١
١٤	ع (٢١)	س (٢٤)	ل (١٨)	ص (٢٩)	١١٢
١٥	ع (٢١)	ص (٢٤)	س (٢٢)	ل (١٦)	١.٣
١٦	ع (٢١)	ص (٢٤)	ل (١٨)	س (٢٦)	١١٩
١٧	ع (٢١)	ل (١٢)	س (٢٢)	ص (٢٩)	١.٤
١٨	ع (٢١)	ل (١٢)	ص (٤٠)	س (٢٦)	١١٩
١٩	ل (١٧)	س (٢٤)	ص (٤٠)	ع (٢٥)	١١٦
٢٠	ل (١٧)	س (٢٤)	ع (٢٨)	ص (٢٩)	١١٨
٢١	ل (١٧)	ص (٢٤)	س (٢٢)	ع (٢٥)	١.٨
٢٢	ل (١٧)	ص (٢٤)	ع (٢٨)	س (٢٦)	١٢٥
٢٣	ل (١٧)	ع (٤٠)	س (٢٢)	ص (٢٩)	١١٨
٢٤	ل (١٧)	ع (٤٠)	ص (٤٠)	س (٢٦)	١٢٣

الحل الامثل

من إستعراض الجدول السابق فإنه فى إعتقادنا أن القارىء قد وقف بنفسه على الحقيقة التى ذكرناها وهى أن الحل بطريقة حصر الحلول الممكنة تزداد تعقيداً كلما كبرت حجم المشكلة، ولعل هذا ما جعلها طريقة مهجورة فى الإستخدام فى وقتنا الحاضر إلا إذا كانت لمشكلة صغيرة ويمكن التعامل معها يدوياً. كما أن هذا يؤكد من ناحية أخرى السبب الرئيسى وراء إنتشار طريقة تكلفة الفرصة فى حل مشاكل التخصيص.

#### (ب) الحل بطريقة تكلفة الفرصة:

نعيد فيما يلى المصفوفة الأصلية للمشكلة لإجراء خطوات تلك الطريقة عليها

(س)	(ص)	(ع)	(ل)	
( ا )	٢٠	٣٦	٣١	١٧
( ب )	٢٤	٢٤	٤٠	١٢
( ح )	٢٢	٤٠	٣٨	١٨
( د )	٣٦	٢٩	٣٥	١٦

#### الخطوة الأولى : إعداد جدول تكلفة الفرصة:

ويتم إعداد هذا الجدول على مرحلتين :

المرحلة الأولى : جدول تكلفة الفرصة للمصفوف : وذلك عن طريق طرح أصغر رقم فى كل صف من جميع أرقام هذا الصف ،وبإجراء هذه العملية الحسابية يظهر جدول تكلفة الفرصة للمصفوف كالاتى :

(س)	(ص)	(ع)	(ل)
( ا )	٣	١٩	١٤ صفر
( ب )	١٢	٢٢	٢٨ صفر
( ح )	٤	٢٢	٢٠ صفر
( د )	٢٠	٢٣	١٩ صفر

المرحلة الثانية: جدول تكلفة الفرصة للأعمدة: ويتم ذلك عن طريق طرح أصغر رقم فى كل عمود من جميع أرقام العمود وذلك بالنسبة للمصفوفة التى وصلنا إليها من المرحلة الأولى، وبإجراء تلك



العملية الحسابية ستظهر مصفوفة تكلفة الفرصة للصقوف والأعمدة كالآتي :

(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ) صفر	صفر	صفر	صفر
(ب) ٩	٣	١٤	صفر
(ج) ١	٣	٦	صفر
(د) ١٧	٤	٥	صفر

الخطوة الثانية: اختبار المثاليه

وتعنى التأكد عما اذا كنا وصلنا الى الحل الأمثل أم لا ؟ وهذا يستلزم القيام بتغطية جميع القيم الصفريه بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمه (الأفقيه أو الرأسية أو هما معاً). و ستظهر المصفوفه بعد عملية التغطية على الشكل الآتى:

(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ) صفر	صفر	صفر	صفر
(ب) ٩	٣	١٤	صفر
(ج) ١	٣	٦	صفر
(د) ١٧	٤	٥	صفر

ويظهر من تلك المصفوفه أنه أمكن تغطيه كافة القيم الصفريه بعدد خطين فقط ، و حيث أن عدد الصفوف ( أو الأعمدة ) أربعة ، إذاوفقاً لقاعدة الأمثليه فإن المصفوفه الحاليه لا تقدم الحل الأمثل بل يتعين العمل على تحسين الحل ومواصلة اجراءات التحسين و صولا للحل الأمثل .

**الخطوة الثالثة** :يتم طرح أصغر قيمة غير واقعه على أى من الخطوط المرسومة من كل قيمةبين قيم المصفوفه التى لم تغطيها الخطوط المرسومة، وإضافه نفس تلك القيمه لتلك القيم الواقعه عند تقاطعات الخطوط المرسومة،و تبقى باقى القيم الأخرى كماهى دون

تغيير.

ومن المصفوفة التى إنتهينا اليها مباشرة نجد أن أصغر قيمة غير واقعه على أى من الخطوط المرسومة هى القيمة (١)، لذلك يتم طرح تلك القيمة من كل القيم الأخرى غير الواقعة على الخطوط و إضافة القيمة (١) ذاتها الى القيمة (صفر) وهى القيمة الواقعة عند تقاطع الخطين المرسومين، و بإنتهاء تلك الخطوة نكون قد وصلنا الى المصفوفة التالية بعد تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط.

	(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	صفر	صفر	صفر	صفر
(ب)	٨	٢	١٣	صفر
(ج)	صفر	٢	٥	صفر
(د)	١٦	٣	٤	صفر

ومن هذه المصفوفه يتضح أنه أمكن تغطية كافة القيم الصفرية بعدد ثلاثة خطوط مستقيمة وهو أقل عدد من الخطوط كافى لتغطية تلك القيم. و معنى ذلك أننا لم نصل بعد الى الحل الأمثل لأن المطلوب فى هذه المشكلة أن تكون عدد الخطوط المستقيمة التى تغطى جميع الأصفار أربعة لأن عدد الأعمدة (٤) و أيضاً عدد الصفوف أربعة، و هذا يستلزم أن نكرر الخطوة الثالثة مرة أخرى، أى نحدد أصغر قيمة غير واقعه على أى من الخطوط المرسومة و سنجد أنها القيمة (٢)، و يتم طرح تلك القيمة من كل القيم الغير مغطاة بخطوط و إضافة نفس القيمة الى القيم الموجودة عند تقاطعات الخطوط. و بتطبيق تلك الخطوة نكون قد وصلنا الى المصفوفة التالية بعد تغطية جميع القيم الصفرية بأقل عدد من الخطوط.

(س)	(ص)	(ع)	(ل)
(أ)	صفر	صفر	صفر
(ب)	٦	صفر	١١
(ج)	صفر	صفر	٣
(د)	١٤	١	٢
			صفر

ومن هذه المصفوفة يتضح أنه أمكن تغطية جميع القيم الصفرية بعدد أربعة خطوط ومعنى ذلك أننا وصلنا الى الحل الأمثل ويبقى فقط تعيين ذلك الحل .

— إيجاد الصف الذى توجد به قيمة صفرية واحدة وتخصيص المقاول على ذلك المشروع وسنجد أن صف المقاول (د) هو الصف الوحيد الذى توجد به قيمة صفرية واحدة لذلك يتم تخصيص المقاول (د) لتنفيذ المشروع (ل).

— بتخصيص المقاول (د) للمشروع (ل) يكون العمود (ل) قد أغلق ثم نبحث عن الصف الآخر الذى به قيمة صفرية واحدة بعد إغلاق العمود (ل) سنجد أن ذلك الصف هو صف (ب) و القيمة الصفرية الموجودة به توجد عند تقاطعه مع العمود (ص) وذلك يعنى أن يتم تخصيص المقاول (ب) لتنفيذ المشروع (ص).

— بعد إغلاق العمود (ل) و العمود (ص) نبحث عن الصف الذى توجد به قيمة صفرية واحدة نجد أنه الصف (ج) و القيمة الصفرية توجد عند تقاطعه مع العمود (س) إذن يتم تخصيص المقاول (ج) لتنفيذ المشروع (س).

— بعد إغلاق الأعمدة (س، ص، ل) لم يعد لدينا الا عمود واحد هو عمود المشروع (ع) ولم يعد لدينا الا مقاول واحد هو المقاول (أ) وسنجد أن نقطة التقاطع بين الصف (أ) و العمود (ع) = صفر . إذن يتم تخصيص المقاول (أ) لتنفيذ المشروع (ع) .

∴ الحل الأمثل لتخصيص المقاولون على المشروعات هو:

يخصص المفاضل (أ) لتنفيذ المشروع (ع) بتكلفة مقدارها ٢١ ألف جنيه  
يخصص المفاضل (ب) لتنفيذ المشروع (ص) بتكلفة مقدارها ٢٤ ألف جنيه  
يخصص المفاضل (ج) لتنفيذ المشروع (س) بتكلفة مقدارها ٢٢ ألف جنيه  
يخصص المفاضل (د) لتنفيذ المشروع (ل) بتكلفة مقدارها ١٦ ألف جنيه

إجمالي تكلفة تنفيذ المشروعات الأربعة ١٠٣ ألف جنيه  
وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام طريقة  
حصص الحلول البديلة.

تلخيص للطريقة الجبرية لمشاكل التخصيص.

١- تعيين جدول تكلفة الفرص كالتالي:

أ- يتم اختيار أقل تكلفة في كل صف ويتم طرحها من كل تكلفة في  
ذلك الصف

ب - يتم استخدام المصفوفة الناتجة من الخطوة ( ١ ) واختيار أقل تكلفة  
في كل عمود ويتم طرحها من كل تكلفة في ذلك العمود .

٢- يتم تحديد عما إذا قد وصلنا إلى الحل الأمثل أم لا ويتم ذلك عن  
طريق رسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة (الأفقية أو الرأسية)  
التي تغطي جميع القيم الصفرية بالمصفوفة، فإذا إتضح أن عدد  
تلك الخطوط أقل من عدد الأعمدة (أو من عدد الصفوف) فإن الحل  
الأمثل لم نحصل إليه بعد ويلزم الأمر التحرك إلى الخطوة  
التالية.

٣- إجراء تعديل على مصفوفة تكلفة الفرصة التي وصلنا إليها في  
الخطوة الثانية:

أ- اختيار أصغر رقم من مجموعة الأرقام التي لا تغطيها  
الخطوط المرسومة وطرح ذلك الرقم من كل رقم غير مغطى  
بالخطوط المرسومة.

ب - إضافة نفس ذلك الرقم إلى أي رقم يقع في تقاطع الخطوط  
المرسومة أما باقي القيم المغطاة وغير الواقعة على تقاطعات  
تستمر كما هي دون تعديل .

٤- يتم تكرار الخطوة الثانية حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

## ثانياً: طريقة الفرع والحد Branch and-Bound Method

إن الأمثلة التى أوردناها فى الجزء المتقدم وخاصة عند تطبيق طريقة حصر الحلول الممكنة كانت أمثلة صغيرة بمعنى أن كافة الحلول الممكنة لأى منها يمكن حصره و تحديده و التعامل معه بيسر وسهولة لانخفاض عددها. ولذلك كان من المناسب إستخدام تلك الطريقة لحل تلك الأمثلة الصغيرة و من ثم إنتقاء ذلك الحل (البديل) الأمثل ( الأقل تكلفة مثلاً). ولقد نتج عن تطوير الحاسبات الآلية و ما لها من سرعة عالية فى إيجاد نتائج حل المشاكل الكبيرة ان أعتقد البعض أن تطبيق طريقة حصر الحلول الممكنة كطريقة لحل مشاكل التخصيص إنها عملية فى مثل تلك الحالات ،والحقيقة أن هذا إعتقاد خاطئ ويكفى أن نبرهن على خطأ ذلك الأعتقاد عندما نرى التضخم الرهيب لعدد الحلول الممكنة عندما تزيد حجم المشكله عندئذ سنتأكد أن تطبيق طريقه حصر الحلول الممكنه عمليه مستحيله أو على الأقل غير عمليه إقتصادياً فعلى سبيل المثال اذا كانت المشكله تتضمن عشرة متغيرات وكل منها له عشرة قيم ممكنه فقط (مثلاً تخصيص عدد عشرة أفراد على عشرة أبحاث) ، فى هذه الحالة سيوجد عدد من الحلول الممكنه يساوى  $10! = 3,628,800$  حلاً ممكناً و بطبيعة الحال فإن إستخدام الحاسب الآلى فى إجراء العمليات الحسابية وحصر كل الحلول الممكنه لمشكلة فى مثل هذا الحجم عمليه مكلفه و مستهلكه للوقت.

و نتيجة لما تقدم فقد ظهر تقدم كبير فى التعامل مع مشكله التخصيص فقد ظهرت طريقة أو أسلوب حديث فى هذا المجال أطلق عليه طريقة الفرع و الحد  $Branch - and - bound method$  وعلى الرغم من أن هذا الأسلوب يستخدم حصر الحلول الممكنه الا إنه فعال جداً بسبب انه لا يتعامل مع كل تلك الحلول الممكنه ولكنه يختبر فقط جزء صغير جداً من العدد الكلى للحلول الممكنه و الحقيقة أن ما كتب فى ذلك



الموضوع مازال قليل نسبياً وذلك على الرغم من الزيادة السريعة فى تطبيقاته على مجالات متنوعة. و ليس المهم الآن أن نقوم بشرح كافة التعديلات الدقيقة لذلك الأسلوب ولكن سنكتفى بتوضيح كيفية تطبيقه لحل مشاكل التخصيص.

إن المفهوم الأساسى الذى يركز عليه هذا الأسلوب هو أنه يعمل على تقسيم منطقة الحلول الممكنة الى أجزاء أصغر فأصغر الى أن نصل الى الحل الواحد (الأمثل) الذى يعمل على تخفيض (أو تعظيم) دالة الهدف الموضوعة (سبق أن تعرضنا لمفهوم منطقة الحلول الممكنة فى تناولنا للطريقة البيانية فى البرمجة الخطية).

ولتوضيح كيفية حل مشاكل التخصيص بإستخدام أسلوب الفرع والحد سنفترض المثال التالى.

بفرض أنه يراد تخصيص مجموعة من المهام على عدد من الآلات بحيث تصل تكلفة ذلك التخصيص الى حدها الأدنى ( اقل تكلفة ممكنه ) ، والجدول التالى يبين تكلفة أداء كل مهمة على كل آلة:

تكلفة تنفيذ كل مهمة على كل آلة

الآلة \ المهمة	١	٢	٢	٤
أ	٩٠	٥	٤٨	٧٣
ب	٦٩	١٤	٨٢	٨٦
ج	٥٧	٩٣	٢	٧٩
د	٧	٧٧	٧٥	٢٣

## الحل

لحل هذه المشكلة بإستخدام طريقة الفرع و الحد سنسير فى الخطوات الأربع التالية.

**الخطوة الأولى:** برغم أن تلك المشكلة التى أمامنا لها ٢٤ حلاً ممكناً (١٤) إلا أننا فى الخطوة الأولى سنوجد الحد الأدنى Alower Bound للتكلفة الأجمالية للتخصيص وبصرف النظر عن تلك الحلول الممكنة وعما إذا كان ذلك الحل ذات الحد الأدنى للتكلفة يقدم حلاً ممكناً أم لا ، إنما الشرط الوحيد المطلوب مراعاته فى تلك الخطوة ان نعين ذلك الحل ذات الحد الأدنى للتكلفة والذي لايمكن أن تهبط التكلفة عنه إطلاقاً و مرة أخرى نقول ان التخصيص الذى يحقق هذا الحد الأدنى للتكلفة ليس من الضروري أن يكون حلاً ممكناً Feasible solution إذ ربما يتضمن هذا الحل تخصيص أكثر من مهمة على آلة واحدة و الحقيقة إنه عند هذه النقطة قد يتساءل القارئ وما أهمية تعيين ذلك الحل طالما إنه قد يكون غير ممكن ؟ للإجابة على ذلك نقول إن الفرض الوحيد من حساب أقل حد ممكن هو مجرد إيجاد أدنى مستوى للتكلفة لا يمكن أن تنخفض بعده و هذا سيكون نقطة إنطلاق لخطوات تالية.

و أسرع وسيلة لإيجاد أقل تكلفة ممكنة هى ببساطة جمع أقل تكلفة فى كل عمود من أعمدة المصفوفة و أيضاً بصرف النظر عن كون ذلك حل ممكن أم لا.

وفى العمود الأول نجد أن أقل تكلفه به هى ٧ (تخصيص د للآلة ١)  
وفى العمود الثانى نجد أن أقل تكلفه به هى ٥ (تخصيص أ للآلة ٢)  
وفى العمود الثالث نجد أن أقل تكلفه به هى ٢ (تخصيص ج للآلة ٣)  
وفى العمود الرابع نجد أن أقل تكلفه به هى ٢٣ (تخصيص د للآلة ٤)

دائما حل ممكن ، اذ يتبين ان أدنى تكلفه فى المثال السابق (٣٧) هو حل غير ممكن لأن المهمة (د) قد تم تخصيصها على آلتين (١، ٤) فى حين أن المهمة (ب) لم يتم تخصيصها ، لذلك فإن الأمر يتطلب أن نواصل السير لنجد الحل الممكن ذات أقل تكلفه.

**الخطوة الثانية:** وفى تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول ، ويتم ذلك على أساس أن نفترض أننا سنخصص كل قيمة على التوالى على الآلة (١) ، و نحسب الحد الأدنى لتكلفة التخصيص فى كل حالة وعما اذا كان الحل ممكنا أم لا والجدول التالى يوضح نتيجة اجراء تلك الخطوة.

الحد الأدنى لتكلفة التخصيص عند تخصيص كل مهمة على التوالى على الآلة (١)

التخصيص	الحد الأدنى لتكلفه	ملاحظات
المهمة (أ) تنفذ على الآلة ١	$١٢٩ = ٢٣ + ٢ + ١٤ + ٩٠$	الحل ممكن
المهمة (ب) تنفذ على الآلة ١	$٩٩ = ٢٣ + ٢ + ٥ + ٦٩$	الحل ممكن
المهمة (ج) تنفذ على الآلة ١	$١٣٣ = ٢٣ + ٤٨ + ٥ + ٥٧$	الحل غير ممكن
المهمة (د) تنفذ على الآلة ١	$٨٧ = ٧٣ + ٢ + ٥ + ٧$	الحل غير ممكن

وقد تم إعداد ذلك الجدول كالاتى:

١- حيث إننا افترضنا فى الصف الأول ان المهمة (أ) سيتم تنفيذها على الآلة (١) ، لذلك نبحث عن تكلفة ذلك التخصيص فى المصفوفة الأصلية فنجدها ٩٠ وبما إننا افترضنا تخصيص المهمة (أ) لتنفذ على الآلة (١) ، إذن فهى لن تخصص على أى من الآلات الأخرى أى أن الصف الأول بالمصفوفة الأولى قد أغلق ، وكذلك

حيث أن الآله (١) هي التي ستنفذ المهمة (أ) إذن فهي لن تقوم بتنفيذ أى من المهام الأخرى (ب ، ج ، د ) أى أن العمود الأول من المصفوفة الأصلية أغلق هو الآخر.

٢- يتم البحث عن أقل تكلفه فى العمود الثانى بإستثناء الرقم الأول (لأنه يقع فى الصف الأول الذى أغلق) و سنجد أن أقل تكلفه هي ١٤ ( أى تنفيذ المهمة ب على الآله ٢ ) ، يتم أخذها فى الاعتبار وإضافة تلك التكلفة عند حساب تكلفه التخصيص.

٣- يتم البحث عن أقل تكلفه فى العمود الثالث بإستثناء الرقم الأول و سنجد أن أقل تكلفه هي (٢) وهي تمثل تخصيص المهمة (ج) للتنفيذ على الآله (٣)

٤- يتم البحث عن أقل تكلفه فى العمود الرابع بإستثناء الرقم الأول نجد أن أقل تكلفة بذلك العمود هي (٢٣) والتي تمثل المهمة (د) للتنفيذ على الآله (٤) إذن بجمع الحدود الدنيا للتكلفة بكل عمود وذلك اذا ما تم تخصيص المهمة (أ) على الآله (١) يكون الحد الأدنى للتكلفة:

٩٠	تخصيص المهمة (أ) على الآله (١)
١٤	تخصيص المهمة (ب) على الآله (٢)
٢	تخصيص المهمة (ج) على الآله (٣)
٢٣	تخصيص المهمة (د) على الآله (٤)

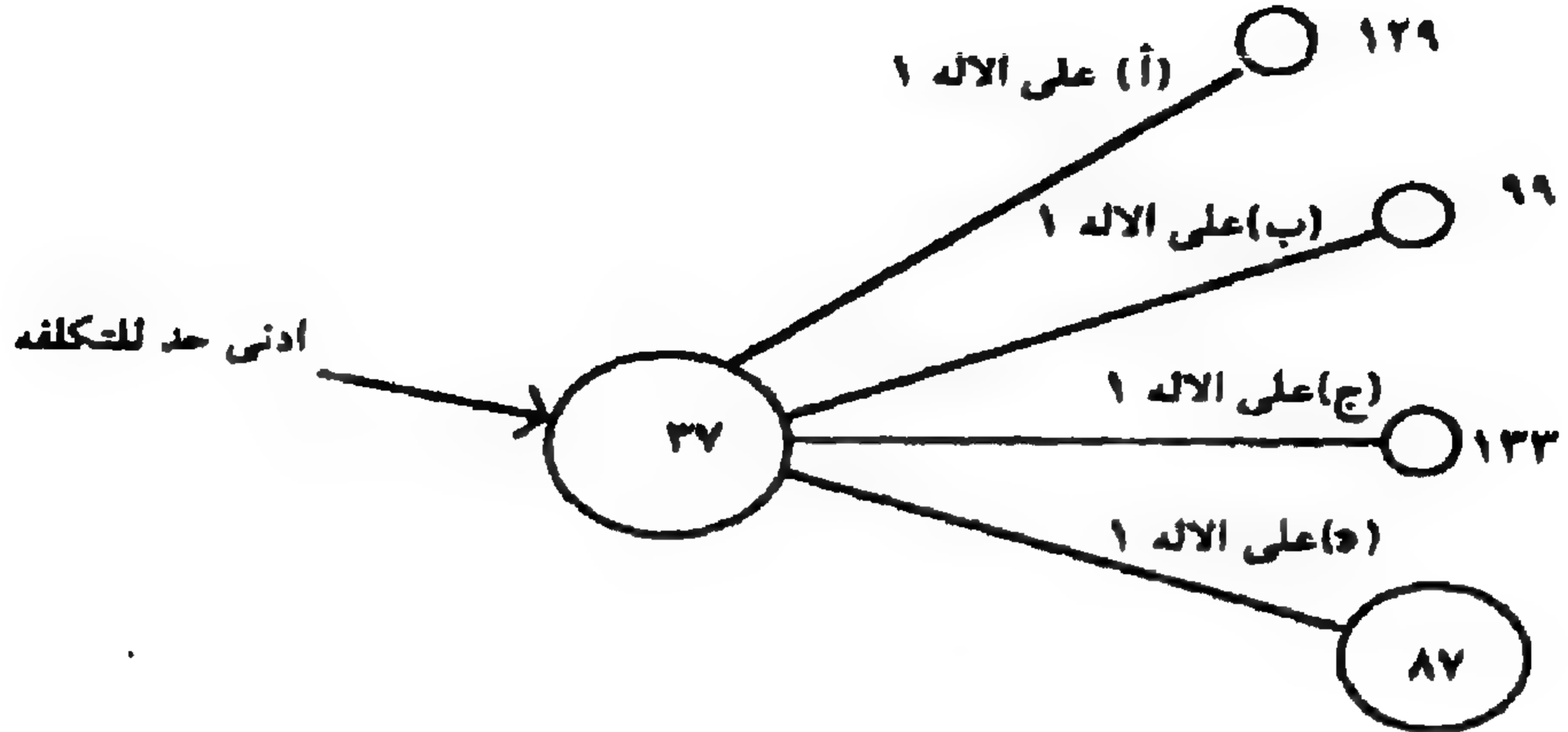
#### الحد الأدنى للتكلفة ١٢٩

وهذا التخصيص لو دققنا وأمعنا النظر فيه سنجد أنه حل ممكن . و الحقيقة إننا ما قصدنا فى هذه المرحلة ان نبحث عن حل ممكن ، و لكن كنا نبحث عن الحد الأدنى للتكلفة . كذلك الحال سنجد أن الحل الثانى بالمصادفه كان حلاً ممكناً بخلاف الحال فى التخصيص الثالث و الرابع فهما حلان غير ممكنان . و مرة أخرى نقول إن محور تركيزنا هو تحديد الحد الأدنى للتكلفة بصرف النظر عن كون الحل ممكن أو غير ممكن لأننا سنواصل السير بعد ذلك لتحديد الحل الممكن والأمثل

والذى يصل بالتكلفه الى حدها الأدنى .

و يمكن تمثيل الخطوتين الأولى و الثانية فى صورة فروع

شجرة كالاتى:



و نلاحظ أن القيمة ٣٧ بالدائرة فى بداية الشجرة تمثل الحل الذى يصل بالتكلفه الى أدنى حد لها و الذى تم التوصل اليه من الخطوة الأولى ( يلاحظ أننا لم تأخذ به لأنه حل غير ممكن ) ، و كذلك فإن الحلول الأربعة التى تم التوصل اليها فى الخطوة الثانية تم تمثيلها كفروع منبثقة من قيمة الحل بالخطوة الأولى مع ملاحظة أننا وضعنا أصفر قيمه من تلك الحلول الأربعة داخل دائرة .

### الخطوة الثالثة:

بنفس المنطق الذى أخذنا به فى الخطوات السابقة فإن تركيزنا سينصب فقط على فرع الشجرة الأقل تكلفه و الناتج من الخطوة السابقة مباشرة ( الخطوة الثانية ) والذى يتمثل فى تخصيص المهمة (د) على الآله (أ) و مع العلم ان هذا الفرع ذو أقل تكافه (٨٧) لا يمثل تخصيصاً ممكن Feasible assignment إلا أن ذلك لا يمنعنا من البحث عن حلول أخرى أقل تكلفه تنبثق من ذلك الفرع وعلى أن تكون ممكنه فى الوقت نفسه .

تبدأ تلك الخطوة بالفرع الذى يعطى أقل تكلفة وهو (٨٧) و الذى يمثل تخصيص المهمة (د) على الآله (أ) (من الخطوة الثانية) ،



و على ذلك ففي هذه الخطوة نقوم بتخصيص كلا من المهام الثلاث  
الباقية (أ،ب،جـ) على الآله (٢) بالتناوب ثم نقوم بجمع أقل تكلفه في  
كل من العمودين الآخرين بصرف النظر عما إذا كان التخصيص الناتج  
ممكن أم لا . و فيما يلي كيفية إجراء العمليات الحسابية لتلك الخطوة .  
الفرع الأول:

أقل تكلفة

٧	من الخطوة الثانية تم تخصيص المهمة (د) على الآله (١)
٥	يتم التخصيص في الفرع الأول المهمة (أ) على الآله (٢)
	تخصيص المهمة (جـ) على الآله (٣) في العمود الثالث بعد
٢	إستبعاد صف (د) وصف (أ)
	تخصيص المهمة (جـ) على الآله (٤) في العمود الرابع بعد
٧٩	إستبعاد صف (د) وصف (أ)

٩٣ الحد الأدنى للتكلفة =

أي أن التخصيص في هذا الفرع يكون:

المهمة (د)	على الآله ( ١ )
المهمة (أ)	على الآله ( ٢ )
المهمة (جـ)	على الآله ( ٣ )
المهمة (جـ)	على الآله ( ٤ )

و التكلفة في هذه الحالة هي ٩٣ ولكن يلاحظ أنه حل غير ممكن .

الفرع الثاني:

أقل تكلفة

٧	من الخطوة الثانية يتم تخصيص المهمة (د) على الآله (١)
١٤	من الخطوة الثالثة يتم تخصيص المهمة (ب) على الآله (٢)
٢	يتم تخصيص المهمة (جـ) على الآله (٣)
٧٣	يتم تخصيص المهمة (أ) على الآله (٤)

٩٦ الحد الأدنى للتكلفة =

وهذا الفرع يمثل حلاً ممكناً.

### الفرع الثالث:

أقل تكلفه

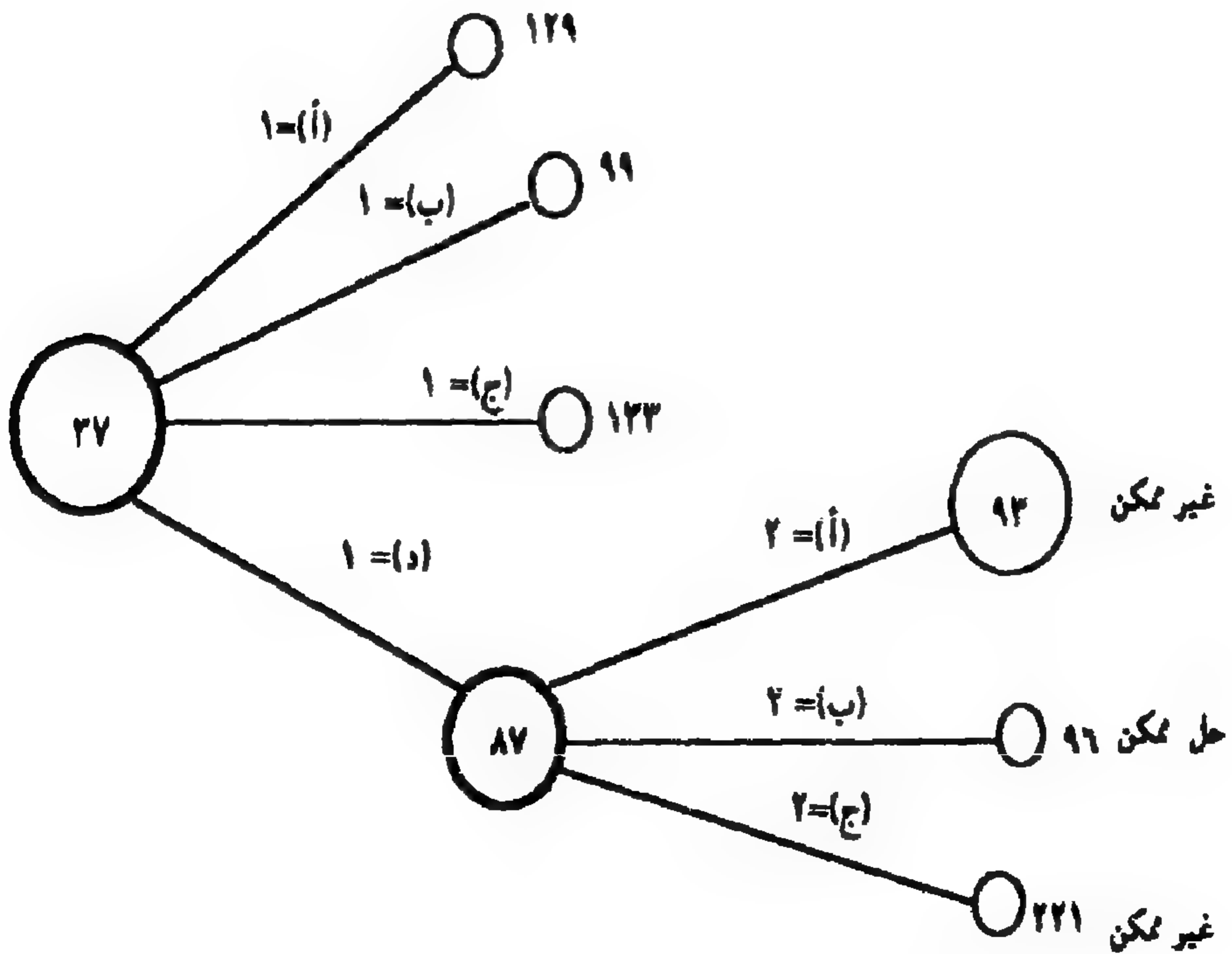
٧	من الخطوة الثانية يتم تخصيص المهمة (د) على الآلة (١)
٩٣	من الخطوة الثالثة يتم تخصيص المهمة (ح) على الآلة (٢)
٤٨	يتم تخصيص المهمة (أ) على الآلة (٣)
٧٣	يتم تخصيص المهمة (ب) على الآلة (٤)

٢٢١

الحد الأدنى للتكلفة =

وهذا الفرع كما هو واضح حل غير ممكن .

و الشجرة التالية توضح نتيجة العمليات الحسابية في الخطوات السابقة:



و يتضح من تكلفه الفروع الناتجة من الخطوة الثالثة و المنبثقة من الحد (٨٧) أن أقل تكلفة ممكنة هي ٩٣ ولذلك وضعناها في دائرة

دائرة بإعتبارها الحد الجديد الذى سننتقل منه للخطوة الرابعة.

إلا أنه قد يكون من المفيد و قبل أن ننتقل الى الخطوة الرابعة أن نوضح و نؤكد على أمر هام ، هو أننا وجدنا من الخطوة الثالثة ان الحد (٨٧) كان أقل تكلفه فإخترنا لننتقل منه برغم أنه حل غير ممكن ، و لكن لو نظرنا الى الفروع المنبثقة من ذلك الحد لوجدنا أن احداها يمثل حلاً ممكناً ، أى أنه أمكن إستخراج حل ممكن من حل غير ممكن وهذه ميزه هامه من مزايا طريقة الفرع و الحد.

#### الخطوة الرابعة:

سنركز أيضاً اهتمامنا فى تلك الخطوة على ذلك الفرع الذى يمثل أقل تكلفه بالمقارنه بالفروع الأخرى التى نتجت من الخطوة الثالثة. فقد تبين من الخطوة الثالثة ان تخصيص المهمة (د) على الآله (١)، و تخصيص المهمة (أ) على الآله (٢) فإن أدنى تكلفه فى هذه الحالة و هى ٩٣ لا تقدم تخصيصاً ممكناً، الا أن ذلك لا يمنع من البحث عن حلول أخرى ممكنه أقل تكلفه وتنبتق فى ذات الوقت من هذا الحد . ولذلك سنبدأ فى تلك الخطوة بالوقوف على الفروع التى تنبتق من الحد ٩٣. إن التخصيصين المحتملين عندما تكون المهمة (د) على الآله (١) ، و المهمة (أ) على الآله (٢) يمكن حسابهما كالآتى :

#### الفرع الأول:

(بعد تخصيص (د) على (١)، و تخصيص (أ) على (٢) ) ١٢  
تخصيص المهمة (ب) على (٢)، و المهمة (ج) على (٤) ١٦٢

---

١٧٤

و هذا حل ممكن

#### الفرع الثانى:

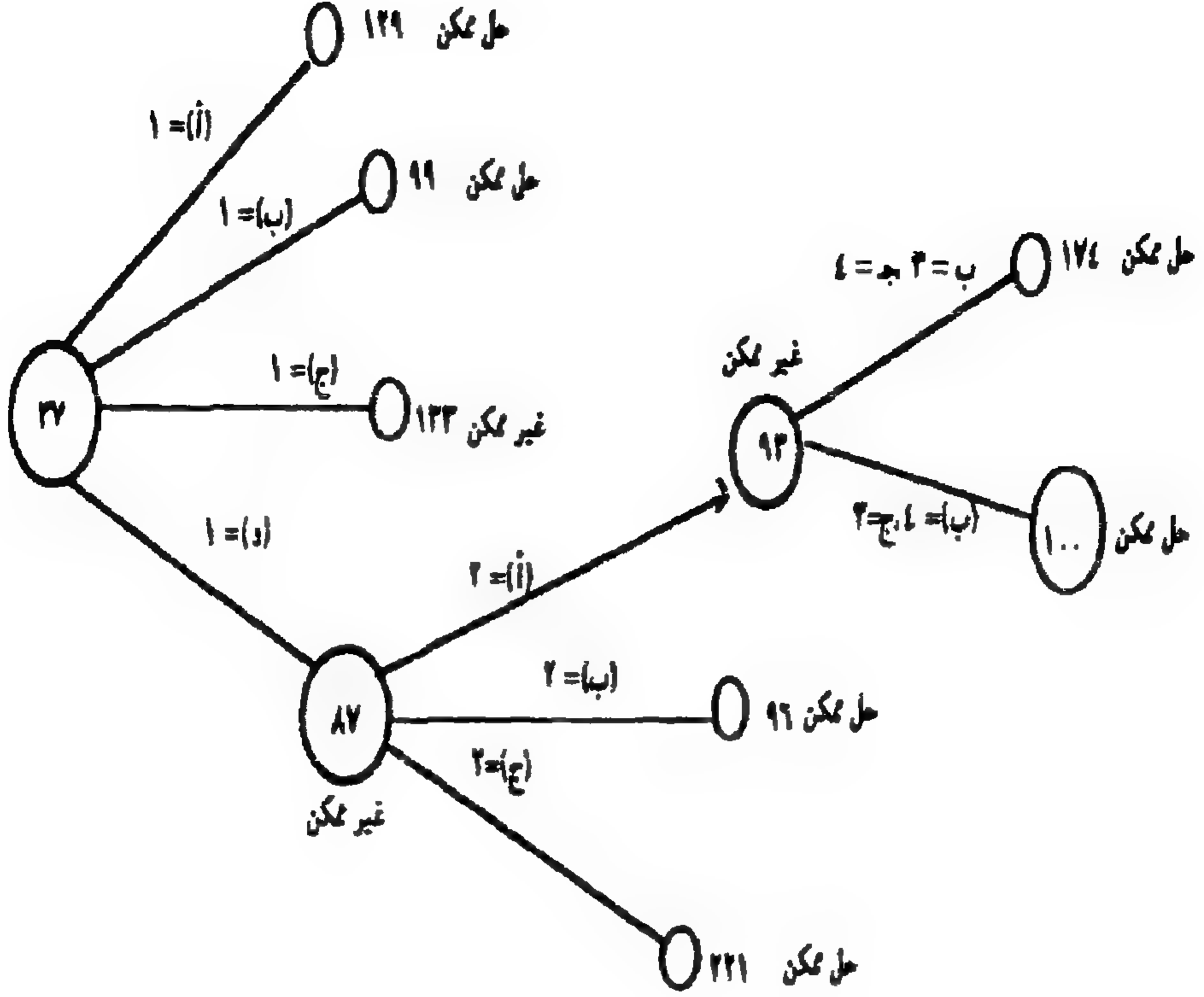
( بعد تخصيص (د) على (١)، و تخصيص (أ) على (٢) ) ١٢  
تخصيص المهمة (ب) على (٤) و تخصيص (ج) على (٤) ٨٨

---

١٠٠

وهذا حل ممكن أيضاً

و بإضافة هذين الفرعين الى فروع الشجرة السابقة تظهر خطوات الحل كالاتى:



و حيث أن التخصيصين البديلين اللذان أوجدتهما الخطوة الرابعة أعلى تكلفة من الفرع ٩٦ (تكلفة البديل الممكن فى الخطوة الثالثة)، فإننا نهملهما ونعود الى الحل الممكن الأقل تكلفه و بذلك يكون التخصيص الأمثل للمشكلة هو الفرع ٩٦ وهذا الفرع يمثل التخصيص التالى .

- تخصيص المهمة (د) على الآلة (١) بتكلفه ٧
- تخصيص المهمة (ب) على الآلة (٢) بتكلفه ١٤
- تخصيص المهمة (ج) على الآلة (٣) بتكلفه ٢
- تخصيص المهمة (أ) على الآلة (٤) بتكلفه ٧٣

ونقدم فيما يلي تلخيصاً بخطوات طريقة الفرع و الحد  
لحل مشاكل التخصيص:

**الخطوة الأولى:** تكوين أقل حد للتكلفة بصرف النظر عن أن  
الحل الذى يمثل أقل حد للتكلفة حل ممكن أم لا ؟ اذ العبرة إنه سيكون  
بمثابة حل مبدئى أو نقطة بداية وإنطلاقاً، ويتم تكوين أقل حد للتكلفة  
من خلال اختيار أقل تكلفه فى كل عمود وذلك بالنسبة لكافة الأعمدة  
، و يكون مجموع أقل تكلفه فى كل عمود للمصفوفة كلها بمثابة أقل حد  
للتكلفة .

**الخطوة الثانية:** سنعتبر أقل حد للتكلفة الذى حصلنا عليه من  
الخطوة الأولى هى نقطة البداية، ويتم وضعها فى دائرة تشع منها عدد  
من الأسهم بعدد صفوف المصفوفة كل سهم يعبر عن تخصيص كل صف  
على العمود الأول ، أى السهم الأول يمثل تخصيص الصف الأول على  
العمود الأول ، والسهم الثانى يمثل تخصيص الصف الثانى على  
العمود الأول ..... وهكذا . ويتم حساب التكلفة لهذه الفروع والعبرة  
أيضاً بأقل تكلفه بصرف النظر عن أنه حل ممكن أم لا ، و أقل حد من  
التكاليف للأسهم المنبثقة من نقطة البداية يتم وضعها فى دائره  
و تكون هى نقطة الانطلاق الى الخطوة الثالثة. و نؤكد مرة أخرى ان  
إختيار الحد معياره انه أقل تكلفه وليس معياره إنه حل ممكن .

**الخطوة الثالثة:** نبدأ بالحد الذى انتهينا اليه فى الخطوة الثانية  
ونرسم منه أسهم منبثقة بعدد الفروع التى يمكن ان تمثل حلولاً  
ونطبق عليها نفس العمليات الحسابية السابقة، و نستمر فى ذلك  
العمل الى أن نصل أن هناك حل ممكن وفى الوقت نفسه أقل تكلفه  
ممكنه عندئذ نكون قد وصلنا الى الحل الأمثل.

و الحقيقة أن هناك كثيراً من برامج الحاسب الآلى تم إعدادها  
للاستخدام فى تطبيق طريقة الحد و الفرع و بكفاءة تامة ،  
و بإستخدام حاسب آلى ذات سعة كبيرة نسبياً يكون فى الامكان  
تقييم المشاكل الكبيرة والمتعددة بإستخدام تلك البرامج وفى دقائق  
معدودة.



## مثال محلول

قد يكون من المناسب هنا أن نتناول بالحل المثال الذي بدأنا به موضوع التخصيص وهو مشكلة مكتب الاستشارات الادارية و التي كانت مصفوفة المشكله على صورة الجدول التالي:

المستشار	الازمنه التقديرية للانتهاء من الدراسه (باليوم)		
	س	ص	ع
أ	٢٠	٣٠	١٨
ب	١٨	٣٦	١٠
ج	١٢	٢٨	١٢

وفيما يلي خطوات العمل وفقاً لطريقة الفرع و الحد:  
الخطوة الاولى : الحد الأدنى للتكلفه الاجمالية لتخصيص و ذلك عن طريق جمع أقل تكلفه في كل عمود من أعمدة المصفوفة بصرف النظر عن كون ذلك الحل أو ذلك التخصيص ممكناً أم لا.

أقل زمن بالعمود الاول ١٢ (تخصيص حد للدراسة س)  
أقل زمن بالعمود الثاني ٢٨ (تخصيص حد للدراسة ص)  
أقل زمن بالعمود الثالث ١٠ (تخصيص ب للدراسة ع)

## الحد الأدنى للزمن ٥٠

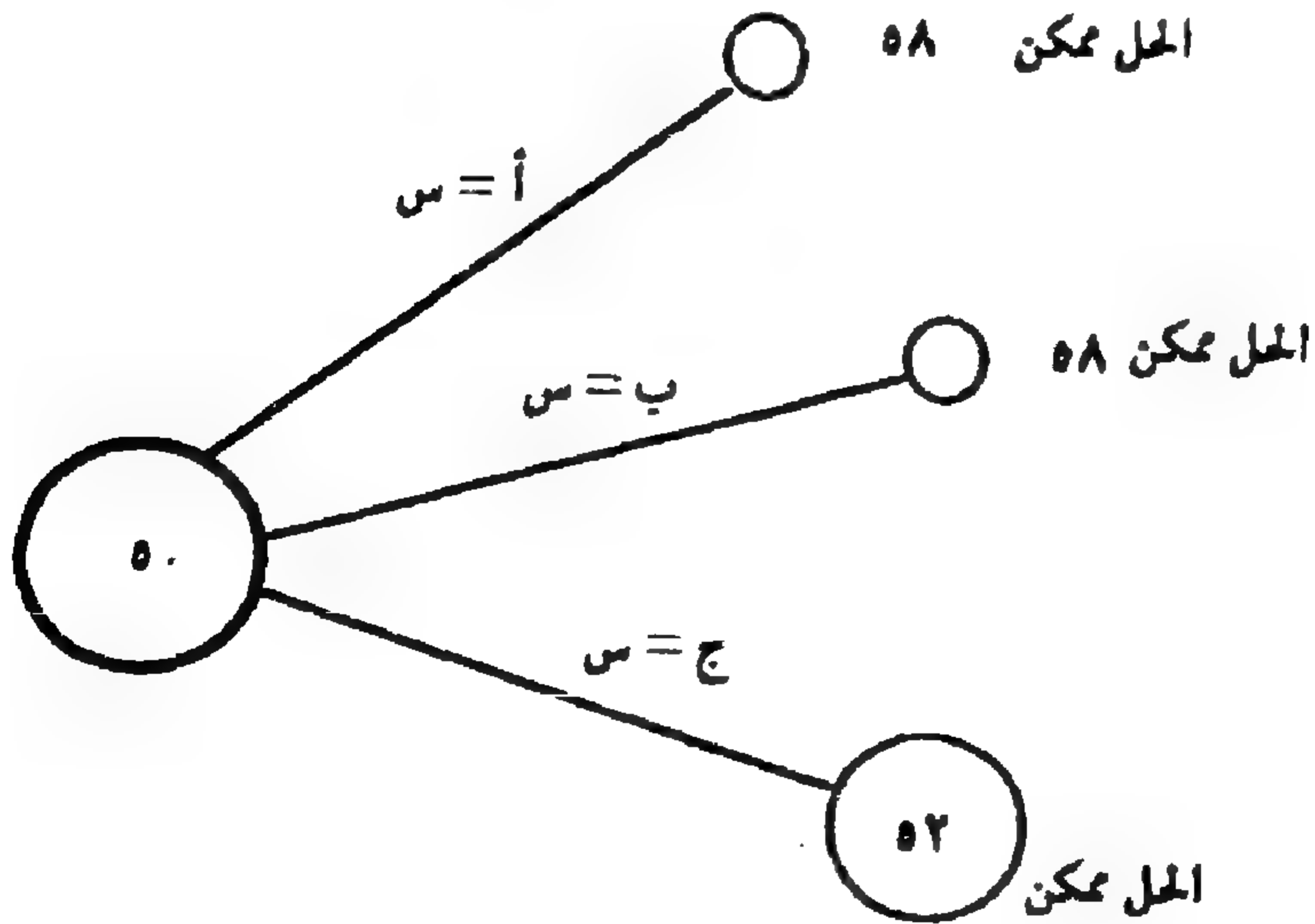
وواضح من هذا التخصيص انه حل غير ممكن لأنه يؤدي الى تخصيص المستشار (ج) ليتولى كل من الدراسه (س) و الدراسه (ص) وهذا لا يجوز وفقاً لأساسيات طريقة التخصيص ،،الا اننا ووفقاً لطريقة الحد و الفرع سنعتمد الحد الذي سننتقل منه للوصول الى الحل الأمثل.

الخطوة الثانيه : وفي تلك الخطوة نقسم مراحل

البحث عن الحلول . و يتم ذلك على أساس أن نفترض أن يتم تخصيص كل مستشار على التوالي على الدراسة (س) . و نحسب الحد الأدنى لزمن الانتهاء في كل حالة و عما اذا كان الحل ممكنا أم لا . و الجدول التالي يوضح نتيجة إجراء تلك الخطوة .

التخصيص ( الفروع )	الحد الأدنى للزمن	ملاحظات
المستشار (أ) للدراسة (س)	$٥٨ = ١٠ + ٢٨ + ٢٠$	الحل ممكن
المستشار (ب) للدراسة (س)	$٥٨ = ١٢ + ٢٨ + ١٨$	الحل ممكن
المستشار (ج) للدراسة (س)	$٥٢ = ١٠ + ٣٠ + ١٢$	الحل ممكن

و حيث أن الحد الأدنى للزمن كان ٥٢ يوما و هو حل ممكن اذاً هو الحل الأمثل ولاداعي للسير في باقي إجراءات الحل . و الشكل التالي يوضح الخطوتين الأولى و الثانية :



وعلى ذلك يكون الحل الأمثل .

المستشار (ح) للدراسة (س) ١٢ يوما

المستشار (أ) للدراسة (ص) ٢٠ يوما

المستشار (ب) للدراسة (ع) ١٠ يوما

الحد الأدنى للزمن ٥٢ يوما

وهي نفس النتيجة التي توصلنا اليها من حل ذات المشكله بطريقة التخصيص

### مثال محلول

سنعيد هنا مرة أخرى حل مثال تخصيص المقاولون الأربعة على المشروعات الأربعة ليكون لدينا تصور كامل لكل من الطريقتين المستخدمتين في حل مشاكل التخصيص. وفيما يلي الشكل الذي سبق أن أخذناه مثال المقاولون الأربعة:

المقاولون	المشروعات وتكلفتها تنفيذاً بالالف جنيه			
	س	ص	ع	ل
أ	٢٠	٣٦	٣١	١٧
ب	٢٤	٣٤	٤٠	١٢
ج	٢٢	٤٠	٣٨	١٨
د	٣٦	٣٩	٣٥	١٦

و المطلوب تخصيص المشروعات الأربعة على المقاولون الأربعة بحيث تصل تكلفة التنفيذ الى أقل حد ممكن .

الحل:

سيتم حل هذه المشكله باستخدام طريقة الفرع والحد وفيما يلي

خطوات الحل :

**الخطوة الأولى:** إيجاد الحد الأدنى للتكلفة الاجمالية للتخصيص وذلك عن طريق جمع أقل تكلفه فى كل عمود من أعمدة المصفوفة دون النظر الى ما اذا كان الحل ممكنا أم لا، وبإجراء هذه الخطوة سنجد الحد الأدنى للتكلفة كالاتى:

أقل تكلفه للعمود الأول (أ س)	٢٠	ألف جنيه
أقل تكلفه للعمود الثانى (ب ص)	٣٤	ألف جنيه
أقل تكلفه للعمود الثالث (أ ع)	٣١	ألف جنيه
أقل تكلفه للعمود الرابع (ب ل)	١٢	ألف جنيه

---

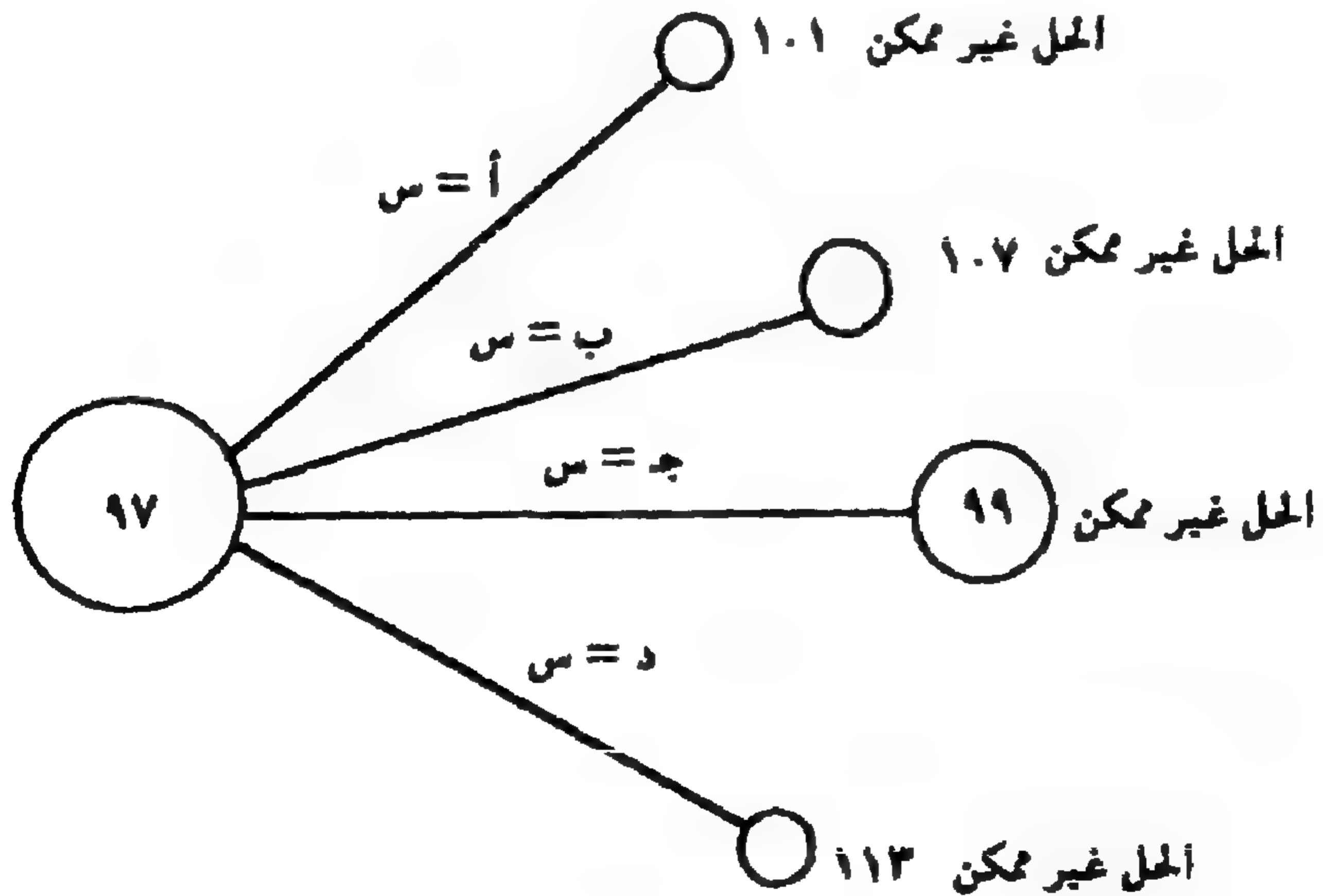
الحد الأدنى لتكلفه التخصيص ٩٧ ألف جنيه

و بالنظر الى الحل الذى يسعى الى الحد الأدنى لتكلفه التخصيص نجد أنه حل غير ممكن لأنه يخصص المقاول (أ) للمشروعين (س،ع)، وكذلك يخصص المقاول (ب) لتنفيذ المشروعين (ص،ل) و لكن كما ذكرنا لا يهم أن يكون الحل ممكنا ولكنه كما سبق القول نقطة الانطلاق للحل.

**الخطوة الثانية:** وفى تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول ، فسنبدأ بالحد الأدنى للتكلفه التى توصلنا اليها من الخطوة الأولى ، ثم نحدد فروعاً من ذلك الحد ، و يتم ذلك على أساس أن يكون هناك أربعة فروع كل فرع يتم فيه تخصيص كل مقاول [أ، ب ، ج ، د ] على المشروع (س)، والعمليات الحسابية لتلك الخطوة كالاتى:

التخصيص (الفروع)	الحد الأدنى للتكلفة	ملاحظات
المقاول (أ) للمشروع (س)	$١٠١ = ١٢ + ٣٥ + ٣٤ + ٢٠$	الحل غير ممكن
المقاول (ب) للمشروع (س)	$١٠٧ = ١٦ + ٣١ + ٣٦ + ٢٤$	الحل غير ممكن
المقاول (ج) للمشروع (س)	$٩٩ = ١٢ + ٣١ + ٣٤ + ٢٢$	الحل غير ممكن
المقاول (د) للمشروع (س)	$١١٣ = ٢١ + ٣١ + ٣٤ + ٢٧$	الحل غير ممكن

و الشجرة التالية توضح نتائج العمليات الحسابية و الفروع التي تم التوصل اليها من الخطوة الثانية .



**الخطوة الثالثة:** يتضح من شجرة الفروع و الحد التي توصلنا اليها من الخطوة الثانية ان كل الحلول التي توصلنا اليها هي



حلول غير ممكنه، و أقل حد للتكلفة هو ٩٩ ، لذلك سنسير نحو تحسين الحل و تكون نقطه بدايتنا هو ذلك الحد الأقل تكلفه ، و سنقوم بإنشاء فروع من ذلك الحل و هذه الفروع تمثل تخصيصاً للمشروع (ص)، وعلية فإن الفروع ستكون:

الفرع الأول : تخصيص المقاول (أ) للمشروع (ص)

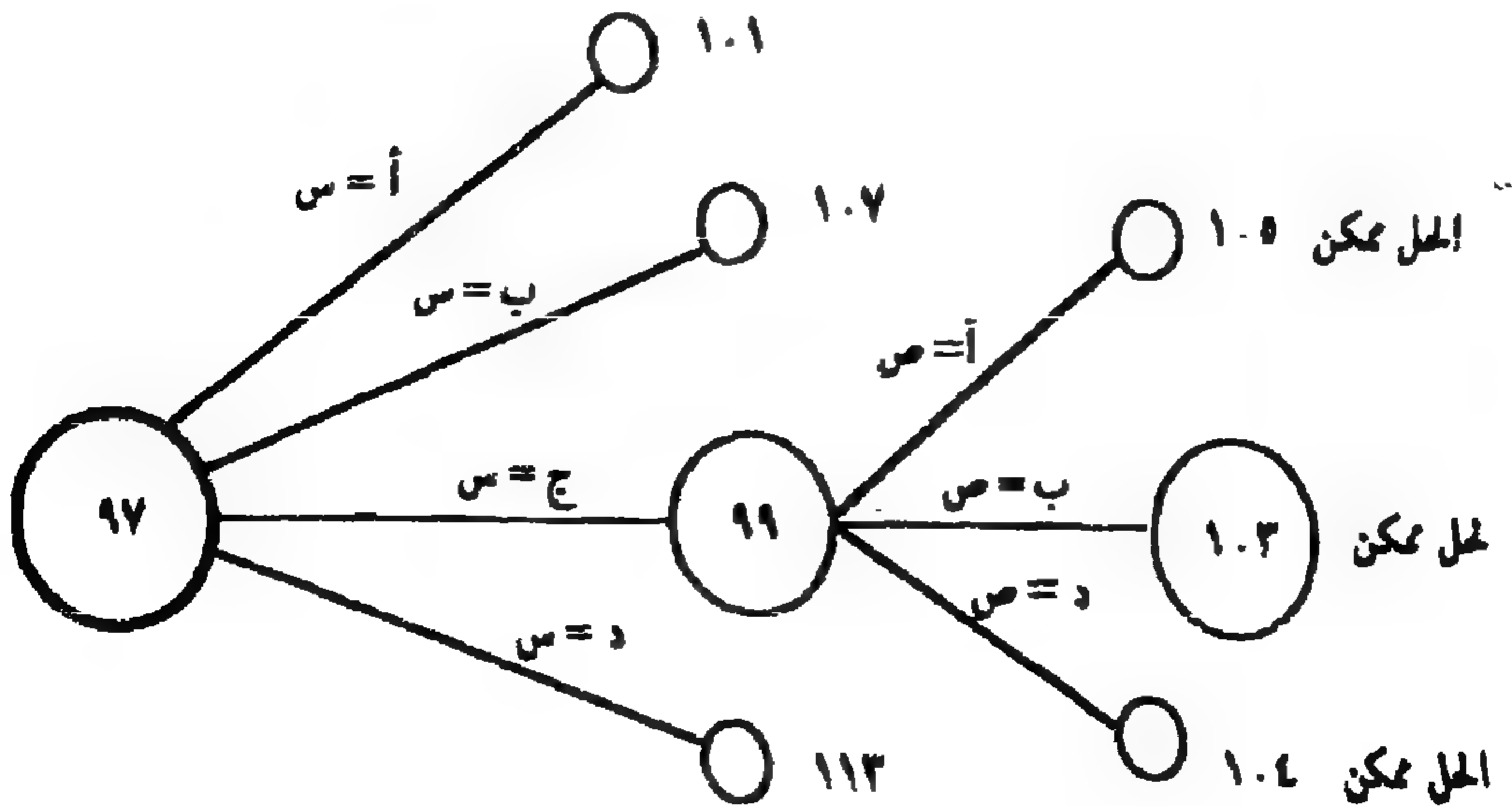
الفرع الثاني: تخصيص المقاول (ب) للمشروع (ص)

الفرع الثالث: تخصيص المقاول (د) للمشروع (ص)

وستكون العمليات الحسابيه المطلوبه لحساب تكلفه هذه الفروع كما هي في الجدول التالي:

ملاحظات	الحد الأدنى للتكلفة	التخصيص (الفروع)
الحل ممكن	$١٠٥ = ١٢ + ٣٥ + ٣٦ + ٢٢$	ج س ، أ ص ، ب ع ، ب ل
الحل ممكن	$١٠٣ = ١٢ + ٣١ + ٣٤ + ٢٢$	ج س ، ب ص ، أ ع ، د ل
الحل ممكن	$١٠٤ = ١٢ + ٣١ + ٣٩ + ٢٢$	ج س ، د ص ، أ ع ، ب ل

وستظهر شجرة الحل حتى الخطوة الثالثه كالآتي :



**الخطوة الرابعة:** يمكن أن نقول ان الخطوة الثالثة قد قادتنا بالفعل الى تعيين الحل الامثل لأن أقل تكلفه في التخصيص كانت حلا ممكنًا. و حيث أن هذا الحل جاء نتيجة تخصيص المقاول (ح) على المشروع (س) و المقاول (ب) على المشروع (ص) إذن الحل النهائي هو أحد حلين بديلين وهما:

ح س ، ب ص ، أ ع ، د ل أو

ح س ، ب ص ، أ ل ، د ع

و تكلفة الحل الأول =  $22 + 34 + 31 + 16 = 103$

و تكلفة الحل الثاني =  $22 + 34 + 17 + 30 = 103$

و على ذلك فإن التخصيص الامثل كالآتي:

المقاول (أ) للمشروع (ع)

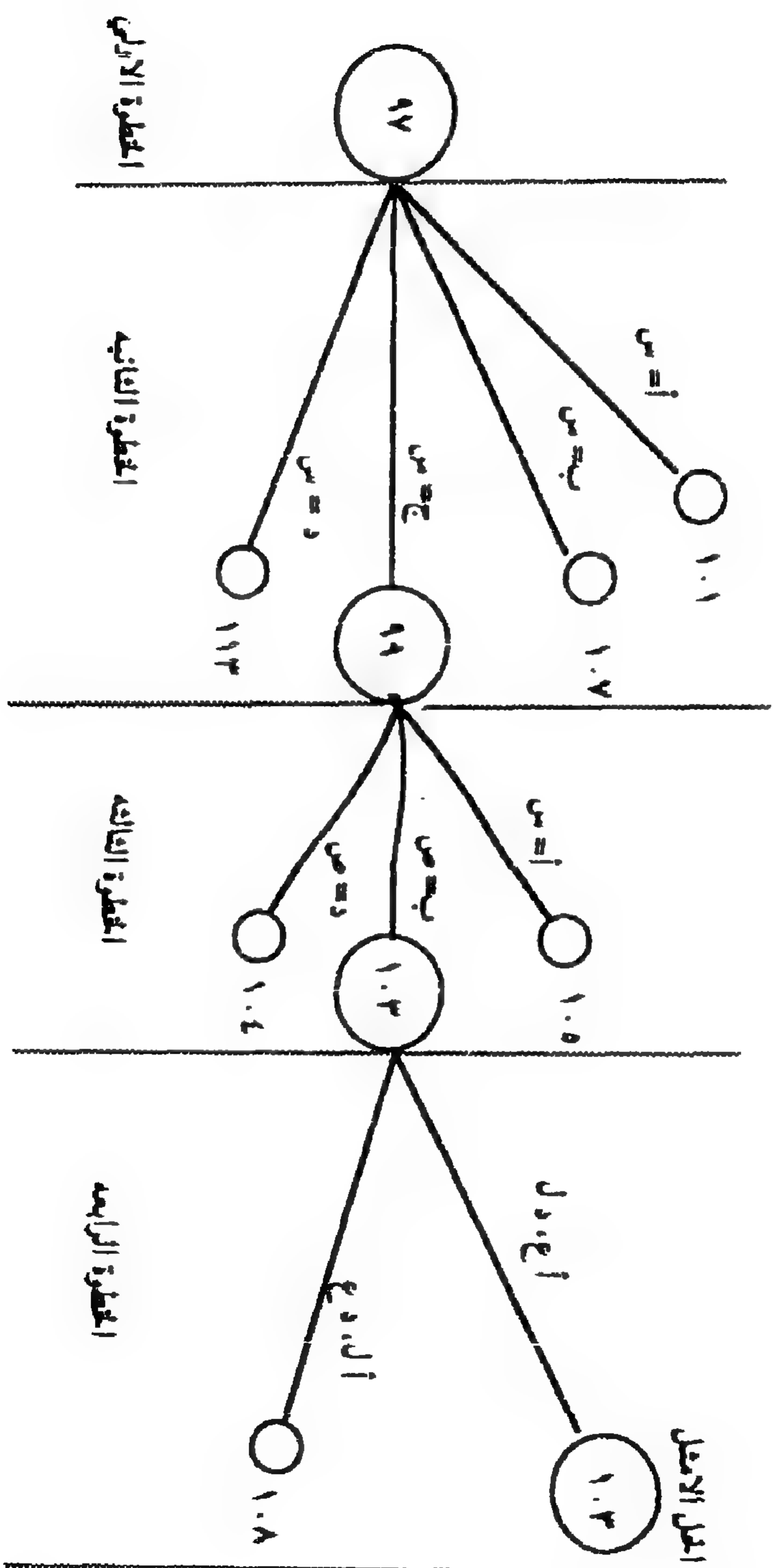
المقاول (ب) للمشروع (ص)

المقاول (ح) للمشروع (س)

المقاول (د) للمشروع (ل)

و تكون التكلفة عند حدها الأدنى وتبلغ ١٠٣ ألف جنيه

و ستكون الشجرة الكاملة للمخطوات الأربعة السابقة كالآتي:



## معالجة بعض الحالات الخاصة لمشكلة التخصيص

رأينا في الجزء السابق الطرق الثلاثة التي يمكن استخدامها وتطبيقها في حل مشاكل التخصيص ، و الجزء التالي يتعرض لبعض التعقيدات التي تنشأ من بعض الحالات الخاصة التي تواجهنا في الحياة العملية عند القيام بعملية التخصيص ، أى أن بحث ودراسة هذه الحالات الخاصة هو من قبيل التجسيد لهذه الطريقة ، إذ أنه توجد في الواقع المعلى بعض الظروف التي تحتاج الى إجراء بعض التحويلات حتى يمكن تطبيق الطرق السابقة في حلها . وهذه الحالات الخاصة هي :

أولاً : عدم تساوى عدد الأعمدة مع عدد الصفوف .

ثانياً : مشكلة التخصيص ذات هدف التعظيم .

ثالثاً : التعامل مع التخصيصات غير المقبولة .

وفيما يلي نتناول كيفية التعامل مع الحالات الخاصة :

### أولاً : حالة عدم تساوى عدد الأعمدة مع عدد الصفوف :

تبين لنا من خلال ما طرحناه من أمثلة محلوله عند شرح كيفية السير في خطوات طريقه التخصيص أن المصفوفة التي كنا نتعامل معها كانت دائماً متماثلة في عدد الصفوف ( افراد ، مشروعات ، مقاولون ... الخ ) مع عدد الأعمدة ( مهام ، عملاء ، خطوط انتاج ، آلات ، ... الخ ) . أى أن الفرضية التي كانت ساريه هي أن عدد الصفوف متساوى مع عدد الأعمدة ، لأنه في الحياة العملية نادراً ما تسرى هذه الفرضية بمعنى أن الموضوع الغالب في الواقع المعلى عدم حدوث ذلك التعادل . والحقيقة أن معالجه تلك النوعيه من المشاكل عمليه سهله ويسيرة ولا تمثل مشكله تحد من قيمه وفاعليه الطريقه الجريه للتخصيص . و سيظهر ذلك بوضوح من خلال حل المثال التالي :

### مثال محلول

بفرض أن مكتب الاستشارات الاداريه الذى وردت مشكلته في مقدمة هذا الجزء كان لديه أربعة مستشارين علميين متاحين في حين أن عدد الابحاث التي وردت الى المكتب للدراسه كانت ثلاثة دراسات

فقط ، و المطلوب التخصيص على تلك الدراسات علمائهم الزمن المتوقع لا تمام كل دراسته بالنسبة لكل مستشار كانت كما هو موضح فى الجدول التالى:

المستشار	الازمنة التقديرية (باليوم) لالتهاء من الدراسة		
	س	ص	ع
أ	٢٠	٣٠	١٨
ب	١٨	٣٦	١٠
ج	١٢	٢٨	٦
د	١٦	٣٢	١٢

الحل:

حيث أن الطريقه الجريه للتخصيص تتطلب أن يكون هناك تساوى بين عدد أعمدة وصفوف المصفوفه ، لذلك فإن أمامنا أحد حلين لايجاد هذا التساوى ، اما استبعاد الصف أو العمود (أو الصفوف و الأعمدة) الزائده، و إما اضافة صف (أو صفوف) أو عمود (أو أعمدة) الى الصفوف ( أو الأعمدة) الناقصه.

أما الحل بمحاولة استبعاد الزيادة صفوفا كانت أم أعمدة فإن ذلك شىء خطير وتدخل فى آلية ومنطقيه الحل، إذ أى الصفوف مثلاً من المثال السابق نستبعداها؟ ان ذلك يعتبر عمليه تحكميه لا يجب أن نتدخل فيها ولكن نترك عمليه الاستبعاد هذه لتقررهما العمليات الحسابيه للحل، اذيتعين ان تتاح فرصه متكافئه لكل مستشار فى التخصيص على أى من هذه الدراسات الثلاث ، و عمليه الاستبعاد هذه لا تحقق هذه الفرصه المتكافئه . إذن سنتجه الى الاسلوب الاخر و هو زياده عدد الأعمده (أو الصفوف) الناقصه بعمود (أو أعمده اضافيه) لإحداث هذا التعادل . و حيث أنه لا يوجد لدينا مشروع رابع حتى



نضيفه فائنا ببساطه نضيف عمود وهمى أو (تخيلى) DUMMY COLUMN و أو بمعنى آخر نضيف دراسه وهميه، و حيث أن هذه الدراسه الوهميه غير موجوده حقيقياً ، فان تخصيص مستشار عليها فى التخصيص الأمثل هو فى الحقيقه يعنى عدم تخصيص مستشار من المستشارين الاربعه لان عدد المستشارين أربعه وعدد الدراسات ثلاثه فقط.

والتساؤل الان، اذا كنا سنضيف الى هذه المصفوفه عمود وهمى لتكون المصفوفه متعاده فى عدد الصفوف و الاعمدة فما هى الازمنه المتوقعه لاتمام تلك الدراسه الوهميه التى ستمثل بالعمود الجديد الوهمى؟

الحقيقه أن أى قيمه جزافيه تكون مقبوله طالما تم معامله كافة المستشارين على قدم المساواه بالنسبه لهذا العمود الجديد ، فطالما أن تخصيص الدراسه الوهميه ليس لها محل ولن تأخذ مكانا ،اذن يتعين أن نضع قيمه تسهل وتيسر العمليات الحسابيه اللازمه لاتمام عمليه التخصيص، و عليه فإن المنطق يفرض أن يكون وقت الانتهاء من تلك الدراسه ولكافه المستشارين هو قيمه صفريه ، و على ذلك تصبح المصفوفه مكونه من أربعة أعمدة و أربعة صفوف وتصبح مشكله التخصيص بعد اجراء التعديلات السابقه عليها على صورة المصفوفه التاليه:

	(أ)	(ب)	(ج)	(د) وهمى
(س)	٢٠	٣٠	١٨	صفر
(ص)	١٨	٣٦	١٠	صفر
(ع)	١٢	٢٨	٦	صفر
(ل)	١٦	٣٢	١٢	صفر

وبتطبيق خطوات الطريقه الجريه على المصفوفه السابقه سيظهر الحل على الوجه التالى .

**الخطوة الاولى:** طرح أقل قيمة فى كل صف من كافة ارقام الصف ، و حيث أن أصغر قيمة فى كل صف هى القيمة صفر (الخاصة بالعمود الوهمى)، فان هذه الخطوة لن تؤثر على القيم الاصلية للمصفوفة ، وستظهر المصفوفة بعد اجراء هذه الخطوة على نفس صورتها الاصلية.

**الخطوة الثانية:** طرح أقل قيمة فى كل عمود من كافة أرقام العمود ، و باتمام تلك الخطوة نحصل على المصفوفة التالية:

(أ)	(ب)	(ج)	(د) وهمى
(س) ٨	٢	١٢	صفر
(ص) ٦	٨	٤	صفر
(ع) صفر	صفر	صفر	صفر
(ل) ٤	٤	٦	صفر

**الخطوة الثالثة:** تغطيه جميع القيم الصغريه بأقل عدد ممكن من الخطوط الافقيه أو الرأسية أو كلاهما معاً و ذلك بالنسبة للمصفوفة الناتجة من الخطوة الثانية ، و ستظهر المصفوفة بعد هذه الخطوة على الصورة التالية:

(أ)	(ب)	(ج)	(د) وهمى
(س) ٨	٢	١٢	صفر
(ص) ٦	٨	٤	صفر
(ع) صفر	صفر	صفر	صفر
(ل) ٤	٤	٦	صفر

ويتضح من هذه المصفوفة أن أقل عدد من الخطوط المرسومة هو عدد اثنين فقط ، وحيث أن المصفوفة مكونه من أربعة صفوف وأربعة

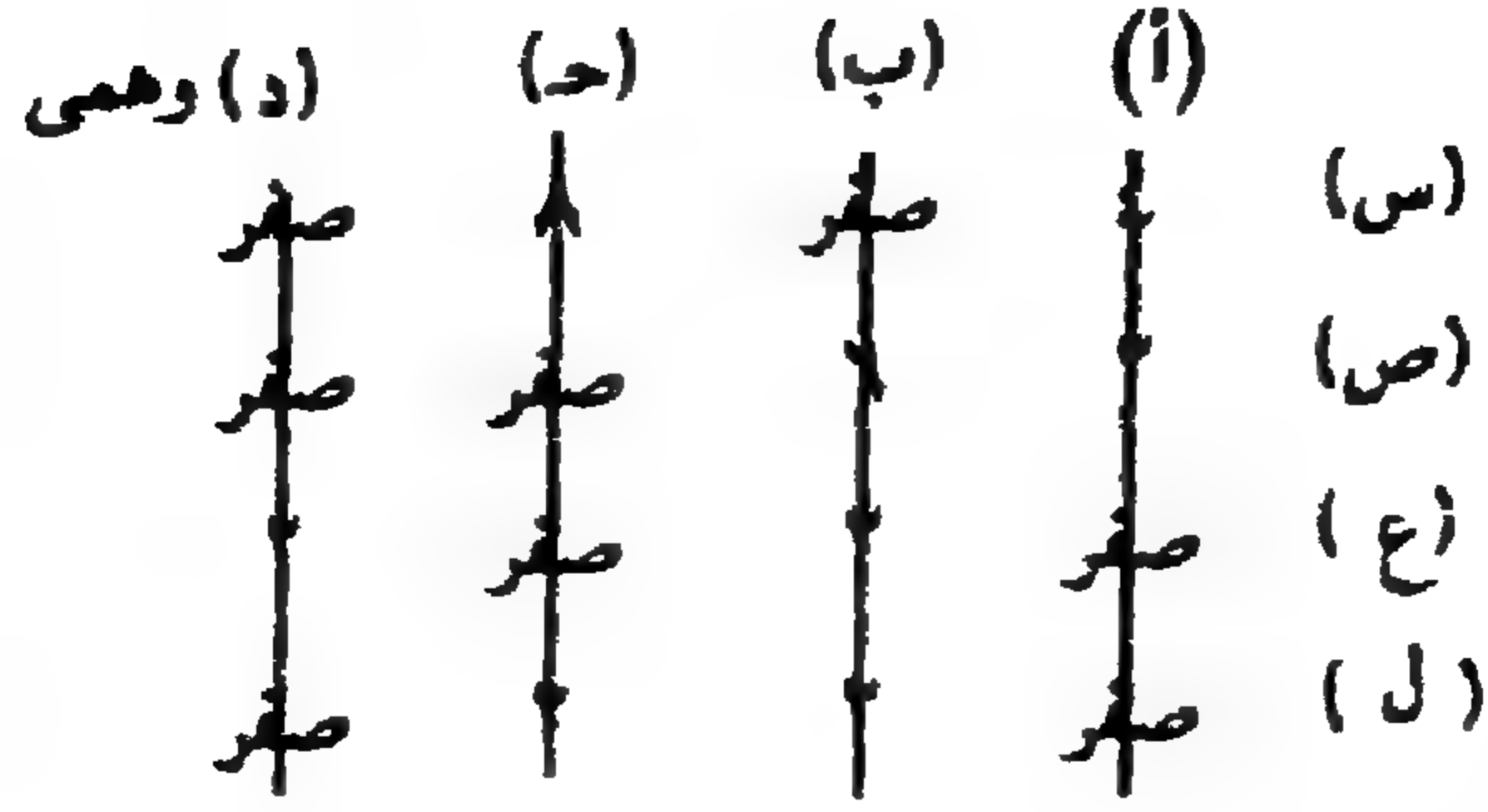
أعمدة اثن وفقاً لقاعدة اختبار المثاليه يكون الحل غير أمثل ويتمين العمل على تحسينه و لهذا سنواصل الحل الى الخطوة التاليه.

**الخطوة الرابعه :** ويتم فيها تعيين أقل قيمه غير مغطاه بالمصفوفه الناتجه من الخطوة الثالثه وهى القيمه (٤) ويتم طرح تلك القيمه من جميع القيم المغطاه ، و اضافة هذه القيمه الى القيم الموجوده عند تقاطعات الخطوط المرسومه ، وبإتمام تطبيق هذه العمليات الحسابيه ستظهر المصفوفه على الشكل التالي:

	(أ)	(ب)	(ج)	(د) وهى
(س)	٦	صفر	١٠	صفر
(ص)	٤	٦	٢	صفر
(ع)	صفر	صفر	صفر	٢
(ل)	٢	٢	٤	صفر

**الخطوة الخامسه:** ويتم فيها تكرار عمليه تغطية القيم الصفريه ، و قد قمنا بعمليه التغطية عن المصفوفه السابقه تخفيضاً للعمليات الحسابيه وللحد من كثره الجداول المستخدمه ، و يتضح من اختبار المثاليه ان الحل مازال غيراً أمثل لان عدد الخطوط المرسومه ثلاثه فقط و على ذلك سنستمر فى تحسين الحل.

**الخطوة السادسه:** اختيار أقل قيمه غير مغطاه وطرحها من جميع القيم غير المغطاه و اضافتها الى القيم الواقعه عند تقاطعات الخطوط ، و بذلك ستظهر المصفوفه بعد هذه العمليات الحسابيه وبعد التغطية على الوجه التالى :



وبالنظر الى المصفوفة السابقة يتبين انها تتضمن التخصيص الامثل و يتبقى تعيين ذلك الحل ، و لغرض ايجاد هذا التعيين يتم الاتى:

١- البحث عن صف به صفر واحد فقط ، سنجد انه لا يوجد وأن كل صف به عدد (٢) صفر وهذا يعنى انه سيحدث هناك تعدد فى التخصيصات المثلى بمعنى انه سيوجد أكثر من تخصيص أمثل واحد.

٢- البحث عن عمود به صفر واحد فقط ، سنجد أن العمود (ب) به صفر واحد وعلى ذلك يتم تخصيصه.

٣- ايجاد التخصيصات البديلة المثلى وسنجدها كالاتى.

التخصيص الاول	التخصيص الثانى
(س ب) ٢٠	(س ب) ٢٠
(ص ج) ١٠	(ص د) صفر
(ع أ) ١٢	(ع ج) ٦
(ل د) صفر	(ل أ) ١٦

### خلاصة

مما سبق يتضح أننا استطعنا معالجة مشكلة زيادة عدد المصفوف عن عدد الاعمدة وذلك باضافة عمود وهمى لتكون المصفوفة مكونة من

عدد متساوى من الصفوف والاعمده، وبطبيعته الحال يمكن اتباع هذا الاجراء نفسه اذا كانت عدد الاعمده اكثر من عدد الصفوف، فى مثل هذه الحاله يتطلب الامر اضافته عدد من الصفوف الى المصفوفه الحاليه لايجاد التساوى بين الصفوف والاعمده، والصفوف الجديده التى ستضاف ستكون و هميه كل قيمه بها متساويه و مقدارها صفر.

وهناك ملاحظه هامه يتعين ذكرها فى هذا المجال وهى أننا اما أن نضيف صف أو أكثر كمصفوف وهميه، أو أن نضيف عموداً أو أكثر كأعمده وهميه ولكن لايمكن اضافته كليهما فى آن واحد لأن ذلك غير مقبول منطقياً.

### ثانياً : حالة مشكلة التخصيص ذات هدف التعظيم.

لقد كانت كل المشاكل والأمثله التى تناولناها فى الاجزاء المتقدمه تتصف بأنها مشاكل تخصيص ذات هدف تخفيض مثل مشكلة التخصيص ذات هدف تخفيض الازمنه الاجماليه للتنفيذ ، وكذلك مشكلة المقاولون التى كانت تهدف الى تخفيض اجمالى تكلفه تنفيذ خطوط الانتاج، وكذلك تخفيض تكلفه تخصيص العمال على الآلات، وهذا قد يوحى الى البعض أن طريقه التخصيص لاتتعامل الامع تلك النوعيه من المشاكل ، ولكن هذا على خلاف الحقيقه ، فان طريقه التخصيص تتناول أيضا التخصيص مع هدف تعظيم وان كان الامر يحتاج لبعض التحوير فى المصفوفه الاساسيه حتى يتم حلها بطرق التخصيص السابق تطبيقها ( مثل مشكله النقل ذات هدف التعظيم ) ، وفيما يلى أحد الأمثله التى نسوقها و نقوم بحلها لنرى كيف يمكن التعامل مع تلك النوعيه من المشاكل .

#### مثال محلول.

استأجر أحد محلات التجزئه الكبرى مركزا تجاريا جديداً، ويحاول هذا المتجر حالياً تحديد مواقع مختلف الاقسام داخل ذلك المركز التجارى، ومدير المركز لديه اربعة مواقع لم يتم تخصيصها بعد ومطلوب منه أن يستخدم تلك المواقع الاوليه لتخصيص اربعة من





الخاصه فى مشاكل التخصيص .وبإضافة عمود وهمى الى المشكله  
الأصليه لمتجر التجزئه تصبح مصفوفه المشكله مكونه من خمس  
صفوف وخمسة أعمدة وستظهر على الصورة التاليه:

(أ) (ب) (ج) (د) (هـ) وهمى

قسم الأحذية	١٠	٦	١٢	٨	صفر
قسم لعب الأطفال	١٥	١٨	٥	١١	صفر
قسم قطع غيار السيارات	١٧	١٠	١٣	١٦	صفر
قسم الأدوات المنزلية	١٤	١٢	١٣	١٠	صفر
قسم الأجهزة الكهربائية	١٤	١٦	٦	١٢	صفر

وأحسن وأسرع طريقه للتعامل مع التخصيص ذات هدف  
التعظيم أن نقوم بتحويلها الى مشكله تخصيص ذات هدف تخفيض  
حتى نقوم بنفس الخطوات التى اتبعناها فى الطريقه المجريه  
للتخصيص.و لكن ما هو الاسلوب الذى يمكن اتباعه لتحويل تلك  
المشكله الى الصوره الأخرى التى يسهل التعامل معها ؟

للإجابة على هذا التساؤل نقول أنه يمكننا أن نحصل من تلك  
المصفوفه على مصفوفه مقابله معادله تماماً (Equivalent) تمثل مشكله  
تخصيص مع هدف تخفيض وذلك عن طريق تحويل جميع القيم  
الموجودة بالمصفوفه الى قيم أخرى تمثل فرصاً ضائعه (Opportunity  
losses) بـ هذا التحويل يتم عن طريق طرح كل قيمه فى كل عمود من  
أكبر قيمه فى ذلك العمود ،و على ذلك فان المصفوفه الناتجه سيكون  
التخصيص الأمثل لها هو ذلك الذى يعمل على تخفيض تلك الفرص  
الضائعه (أى أنها أصبحت ذات هدف تخفيض).

وعلى ذلك يمكن القول بأنه : يمكن تحويل مشكله  
التخصيص ذات هدف التعظيم الى مشكله تخصيص ذات  
هدف تخفيض عن طريق تحويل مصفوفه التخصيص الى  
الشكل الذى تكون فيه جميع قيم المصفوفه تمثل فرصاً

ضائعه.

وبهذا المفهوم نواصل حل مشكلة متجر التجزئه وذلك بأن نقوم بتحويل مصفوفه التخصيص الأصلية ( ذات هدف التعظيم ) الى مصفوفه تخصيص تمثل كل قيمه فيها فرصه ضائعه ، و بعد هذا الاجراء ستظهر مصفوفه الفرص الضائعه على الشكل التالي:

(أ) (ب) (ج) (د) (هـ) (وهي)

قسم الأحذية	٧	١٢	١	٨	صفر
قسم لعب الأطفال	٢	صفر	٨	٥	صفر
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٨	صفر	صفر	صفر
قسم الأدوات المنزلية	٣	٦	صفر	٦	صفر
قسم الأجهزة الكهربائية	٣	٢	٧	٤	صفر

وبعد أن توصلنا الى مصفوفه الفرص الضائعه كما يوضحها الجدول السابق ، يمكن أن نسير في الخطوات المعتاده للتخصيص حتى نصل الى التخصيص الأمثل الذي يعظم الأرباح.

**الخطوة الأولى:** طرح أقل رقم في كل صف من أرقام الصف ، الا أننا لن نقوم بإداء هذه الخطوه حيث أن اضافته عمود وهمي بقيم مقدارها صفر سيجعل أصغر قيمة في كل صف هي صفر و من ثم فلن تتغير القيم الحاليه ، لذلك لا داعي لاتمام هذه الخطوه.

**الخطوه الثانيه:** طرح أقل رقم في كل عمود من أرقام العمود ، و أيضا لن نقوم بإداء هذه الخطوة حيث أن الاجراء الذي اتبعناه لتحويل المشكله الى فرص ضائعه جعلت أصغر قيمه في كل عمود هي صفر لذلك فإن عملية الطرح لن تغير من قيم المصفوفه الأصلية.

**الخطوة الثالثة:** وفيها يتم تغطية جميع القيم الصفريية بأقل عدد ممكن من الخطوط المرسومة أفقية كانت أم رأسية ، و الجدول التالي يمثل عملية التغطية المشار اليها فى هذه الخطوة .

(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)	وهي
٧	١٢	١	٨	٨	قسم الأحذية
٤	٤	٤	٤	٤	قسم لعب الأطفال
٥	٥	٥	٥	٥	قسم قطع غيار السيارات
٣	٦	٦	٦	٦	قسم الأدوات المنزلية
٣	٢	٧	٤	٤	قسم الأجهزة الكهربائية

و حيث أن أقل عدد من الخطوط أمكن رسمها لتغطية جميع القيم الصفريية (٤) يقل عددها عن أى من الصفوف أو الأعمدة (٥) ، لذلك نتجه الى الخطوة الرابعة من خطوات منهج الطريقه المجريه للتخصيص .

**الخطوة الرابعة:** تحسين الحل ويتم على المراحل التالية .

- ١- تعيين أقل قيمة من القيم غير المغطاة (١)
- ٢- طرح تلك القيمة (١) من جميع القيم المغطاة وإضافتها الى القيم الواقعة عند تقاطعات الخطوط المرسومة .
- ٣- باقى القيم المغطاة وغير الواقعة على الخطوط المرسومة يتم وضعها كما هى دون تعديل ، وبعد القيام بالعمليات الحسابية فى تلك الخطوه ستظهر المصفوفه كالاتى ، علما بأنه قد تم أيضا إختبار مثاليتها برسم الخطوط التى تغطى القيم الصفريية اختصارا لتكرار كتابه المصفوفه .

(أ) (ب) (ج) (د) (هـ) وهمي

قسم الأحذية	٦	١١	٧	٧	٧
قسم لعب الأطفال	٢	٨	٨	٥	٨
قسم قطع غيار السيارات	٨	٨	٨	٨	٨
قسم الأدوات المنزلية	٣	٦	٦	٦	٦
قسم الأجهزة الكهربائية	٢	١	١	٣	٣

وسنجد أيضا من هذه المصفوفة أن أقل عدد من الخطوط التي تغطي كل القيم الصفريه بتلك المصفوفة مازال عددها يقل عن عدد أى من الصفوف أو الأعمدة الأمر الذى يتطلب تكرار الخطوه السابقه ،ثم تغطيه القيم الصفريه،و بإجراء تلك العمليات الحسابيه سنحصل على المصفوفه التاليه:

(أ) (ب) (ج) (د) (هـ) وهمي

قسم الأحذية	٥	١٠	٦	٦	٦
قسم لعب الأطفال	٢	٨	٨	٥	٨
قسم قطع غيار السيارات	٨	٨	٨	٨	٨
قسم الأدوات المنزلية	٢	٥	٥	٥	٥
قسم الأجهزة الكهربائية	١	١	١	٢	٢

وبتفحص المصفوفه السابقه نجد أنه مازال الحل غير أمثل ويحتاج الى تحسين ومن ثم نكرر خطوه تحسين الحل ،ثم تغطيه القيم الصفريه ،و ستظهر المصفوفه بعد ذلك كالآتى :



(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ) (وهي)
٤	١٠	٥	٥	٥
١	٥	١	٤	٤
٥	٥	٤	٤	٤
١	٤	٤	٤	٤
٤	٤	٤	٤	٤

قسم الأحذية

قسم لعب الأطفال

قسم قطع غيار السيارات

قسم الأدوات المنزلية

قسم الأجهزة الكهربائية

ومن هذه المصفوفة يتضح أننا وصلنا إلى الحل الأمثل لأن عدد الخطوط المرسومة خمسة خطوط وهي تعادل عدد الصفوف أو الأعمدة ، ولم يتبق سوى تعيين و تحديد هذا التخصيص الأمثل ، و بتطبيق الطريقة المتبعة في تعيين التخصيص يظهر ذلك التخصيص الأمثل في الدوائر المرسومة حول بعض القيم الصفري بالمصفوفة .

الجدول التالي يوضح الحل الأمثل و مقدار الأرباح المتوقعة لذلك التخصيص . علماً بأن الأرباح المتوقعة تم الحصول عليها من المصفوفة الأصلية .

قسم	الموقع المخصص	الأرباح المقدرة بالآلاف جنية
قسم الأحذية	الموقع الوهمي	٥
قسم لعب الأطفال	(ب)	١٠
قسم قطع غيار السيارات	(د)	٥
قسم الأدوات المنزلية	(ج)	٤
قسم الأدوات الكهربائية	(أ)	٤
الأرباح المتوقعة		٦١

ونلاحظ من هذا الجدول أنه قد تم تخصيص قسم الأحذية ليحتل

الموقع الوهمى (هـ) وهذا يعنى أن هذا القسم لن يدخل ضمن تخطيط المتجر.

### الحل بطريقة الفرع و الحد

سبق فى بداية هذا الجزء أن قمنا بشرح وتطبيق طريقه الفرع والحد للتوصل الى الحل الأمثل لمشاكل التخصيص ، الآن المشاكل التى كانت كأمثله للحل كانت كلها ذات هدف تخفيض، لذلك قديكون من المناسب هنا أن نتعرض لتطبيق طريقة الفرع والحد لمشكله تخصيص ذات هدف تعظيم وفى ذات الوقت لا تتساوى فيها عدد الأعمده مع عدد الصفوف .

إن الخطوات التى تشتمل عليها طريقة الفرع والحد هى ذاتها التى ستطبق على هذا المثال مع اختلاف بسيط مرجعه طبيعة هدف المشكله ، اذ كانت الخطوه الأولى هى إيجاد الحد الأدنى للتكلفة الاجماليه للتخصيص ويكون ذلك هو الحد الذى سننطلق منه الى إيجاد التخصيص الأمثل ، وفيما يلى تطبيق خطوات طريقه الفرع و الحد على مثال تخصيص ذات هدف تعظيم.

**الخطوه الأولى :** إيجاد الحد الأعلى للأرباح الاجماليه للتخصيص وبصرف النظر عن كون ذلك الحد ممكن أو غير ممكن ، و يتم ذلك عن طريق جمع أعلى ربح فى كل عمود من أعمده المصفوفه ( سنستخدم الرموز ص ، ع ، ل ، و على التوالى لترمز لأقسام المتجر).

فى العمود الأول أعلى ربح هو ١٧ (تخصيص ع على أ)  
وفى العمود الثانى أعلى ربح هو ١٨ (تخصيص ص على ب)  
وفى العمود الثالث أعلى ربح هو ١٢ (تخصيص ل على ج)  
وفى العمود الرابع أعلى ربح هو ١٦ (تخصيص ع على د)  
وفى العمود الخامس أعلى ربح هو صفر (تخصيص و على هـ)

---

إذن أقصى أرباح ممكنه ٦٤ ألف جنيه.

ولكن يلاحظ أن هذه الأرباح تمثل حلاً غير ممكن حيث يتم تخصيص القسم (ع)، على الموقع (أ) و الموقع (د) وهذا غير صحيح.

**الخطوة الثانية:** و في تلك الخطوة نقسم مراحل البحث عن الحلول ،و يتم ذلك على أساس أن نفترض أننا سنخصص كل قسم على التوالي على الموقع (أ)، ونحسب الحد الأقصى لأرباح التخصيص في كل حالة وعما إذا كان الحل ممكناً أم لا، والجدول التالي يوضح نتيجة إجراء تلك الخطوة.

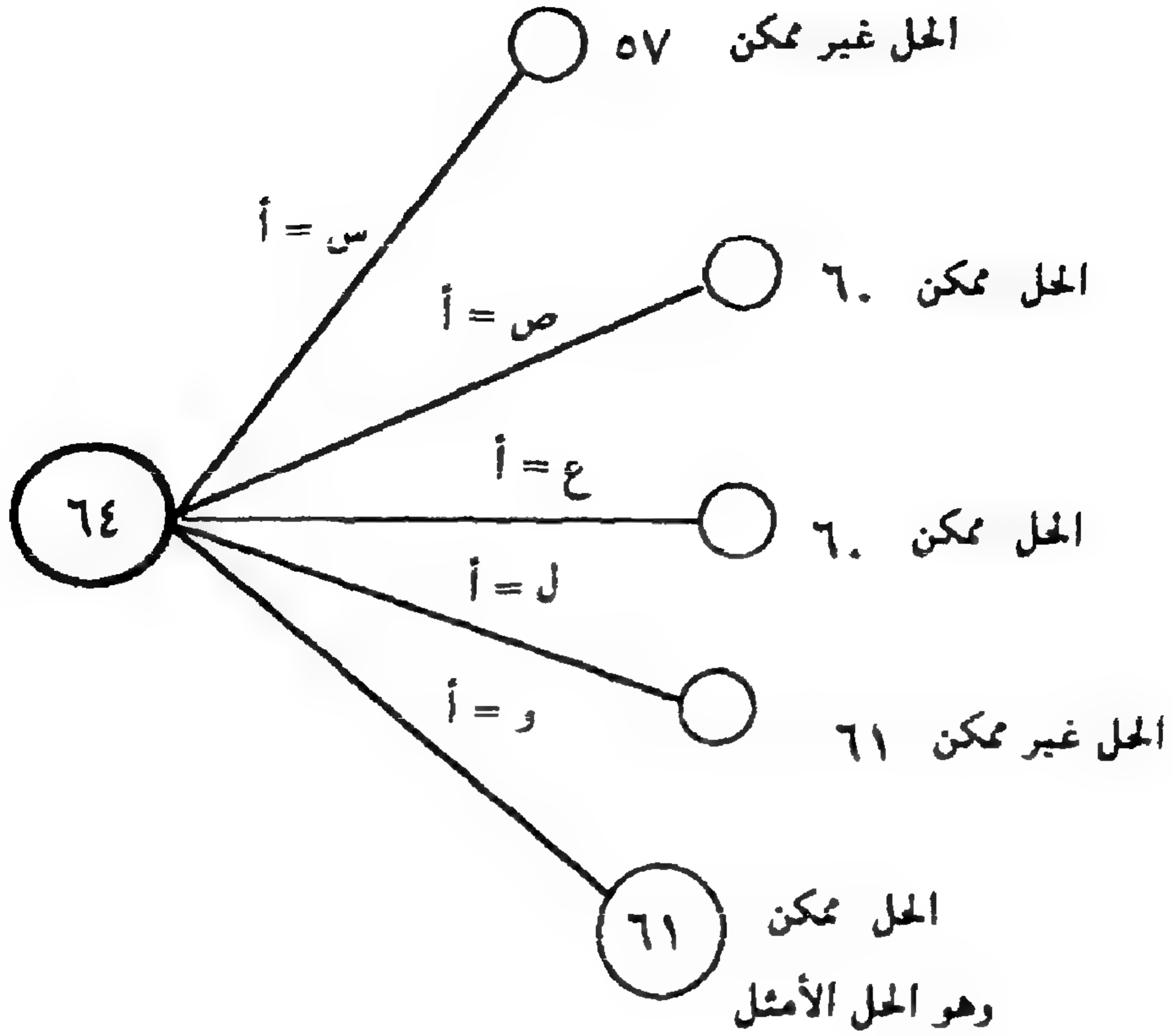
التخصيص	الحد الأقصى للأرباح	ملاحظات
القسم (س) على الموقع (أ)	$٥٧ = ١٠ + ١٨ + ١٣ + ١٦ + \text{صفر}$	الحل غير ممكن
القسم (ص) على الموقع (أ)	$٦٠ = ١٥ + ١٦ + ١٣ + ١٦ + \text{صفر}$	الحل ممكن
القسم (ع) على الموقع (أ)	$٦٠ = ١٧ + ١٨ + ١٣ + ١٢ + \text{صفر}$	الحل ممكن
القسم (د) على الموقع (أ)	$٦١ = ١٤ + ١٨ + ١٣ + ١٦ + \text{صفر}$	الحل غير ممكن
القسم (وا) على الموقع (أ)	$٦١ = ١٤ + ١٨ + ١٣ + ١٦ + \text{صفر}$	الحل ممكن

ويتبين من هذا الجدول أن أعلى ربح قد تحقق ومن خلال حل ممكن إذن هو التخصيص الأمثل وهو:

قسم الأحذية على الموقع الوهمي      صفر  
 قسم لعب الأطفال على الموقع (ب)      ١٨ ألف جنيه  
 قسم قطع الغيار على الموقع (د)      ١٦ ألف جنيه  
 قسم الأدوات المنزلية على الموقع (ح)      ١٣ ألف جنيه  
 قسم الأدوات الكهربائية على الموقع (أ)      ١٤ ألف جنيه

أقصى الأرباح      ٦١ ألف جنيه

وهي نفس النتيجة التي وصلنا إليها من الطريقة الجبرية ،  
 وستظهر شجرة الفرع و الحد على الشكل التالي :



### ثالثاً: حالة التخصيصات غير المقبولة:

كما هو الحال في مشكلة النقل عندما تعرضنا للحالة الخاصة بالطرق الممنوعة أو الطرق غير المرغوب النقل عليها لأي سبب ولأي اعتبار، فكذلك الحال بالنسبة لمشكلة التخصيص فقد تكون وجهة نظر الإدارة أن هناك تخصيص أو تخصيصات معينة غير مرغوب فيها لأسباب موضوعية ولمبررات لديها قناعة بها ، ومعنى ذلك أنه إذا تركت العمليات الحسابية تجري بطريقة آلية من خطوة لأخرى حسب خطوات الطريقة الجبرية للتخصيص فقد نفاجئ بأن التخصيص غير المرغوب فيه قد ظهر كتخصيص حقيقي في جدول الحل الأمثل وأصبح التخصيص الأمثل يتضمن هذا التخصيص غير المرغوب فيه ، إذ أن ميكانيكية خطوات الحل المعتادة لم تملك السيطرة أو لم يتم تحويلها لتواجه مثل هذا الموقف المطلوب . فمثلاً قد يكون من غير المرغوب

فيه أن يتولى أحد المستشارين القيام بدراسة معينة من الدراسات التي تعاقد عليها مكتب الاستشارات الاداريه لاعتبارات شخصية أو عائلية أو أكاديمية ، أو قد يكون من غير المرغوب فيه تخصيص عامل معين بالذات للعمل على آله معينة بالذات لظروف تتعلق بالخبرة والتدريب و الأمن ، أو قد يكون من غير المرغوب فيه أن يخصص الموقع المعين لقسم الأطفال لعدم تلاؤمهما . خلاصة القول أنه قد يكون هناك من الاعتبارات التي تفرض عدم الموافقة أو عدم قبول تخصيص مورد معين على استخدام معين .

إن التصرف حيال هذا النوع من الحالات الخاصة التي قد تواجهنا عند التعامل مع مشاكل التخصيص تفرض علينا التصرف بداية بالتحويل أو بإتخاذ الاجراء الكفيل بإحترام هذا الشرط قبل السير في خطوات الحل وترك الأمر يخرج من أيدينا لتتحكم فيه آلية الحل وفق الطريقة المستخدمة ، إن الأمر يستلزم إتباع إجراء ما قبل تطبيق خطوات الحل.

إن الإجراء الذي يضمن لنا إحترام هذا الشرط وتخليص الحل الامثل من هذا التخصيص غير المرغوب فيه هو أن نجعل هذا التخصيص سيئاً جداً الى الحد الذي تلفظه ميكانيكية خطوات الحل عندئذ نجد أن الحل الامثل يعتمد عن هذا التخصيص السيئ ونضمن بذلك ان التخصيص الامثل سيخلوا تماماً من أي تخصيصات غير مرغوب فيها .

ولكن مازال السؤال مطروحا ، وهو كيف نجعل هذا التخصيص سيئاً جداً ؟ للإجابة على هذا التساؤل يتطلب الأمر أن نذكر القارئ بموضوع سبق أن ناقشناه في الجزء الخاص بالجرامج الخطية وهو موضوع المتغيرات الصناعية Artificial variables وبصفة خاصة عندما كنا نتناول طريقة (م) الكبرى Big-M Method ، فقد كنا نحاول أن نضمن أن تلك المتغيرات لن تظهر في الحل الامثل ، وكان أسلوبنا في ذلك هو أن نعطى لتلك المتغيرات أعلى تكاليف على الإطلاق في



مشاكل التخفيض ، وأدنى أرباح على الإطلاق فى مشاكل التعظيم (راجع أيضا ما ناقشناه عن الطرق المتنوعة فى طريقة النقل ) . ويمكننا إستخدام نفس هذا المدخل لمعالجة التخصيصات غير المقبولة ، أى أنه لكى نجعل التخصيص المعين لا يتم ولا يظهر فى الحل الأمثل لأنه تخصيص غير مقبول ، أن نجعل قيمة هذا التخصيص عكس إتجاه الهدف و بقيمة مرتفعة جدا كالآتى :

١- إذا كانت المشكلة تخصيص ذات هدف تخفيض إذن يتعين أن نضع للتخصيص غير المرغوب فيه قيمة تمثل تكلفة عالية جدا بالمقارنه بقيم المصفوفة. هنا سنجد أن هذا التخصيص سيكون سيئ ولن يدخل فى الحل الأمثل حيث أن خطوات طريقة التخصيص ستلغظ من تلقاء نفسها هذا التخصيص غير المرغوب فيه ، إلا أنه بدلا من إستخدام قيمة رقمية توضع عند هذا التخصيص غير المرغوب فيه فإنه يمكن إستبدالها بإستخدام الرمز (م) حيث أن (م) قيمة مرتفعة جدا بالمقارنة بباقي قيم المصفوفة ولا تتأثر بإضافة أو خصم أى قيم منها ، عندئذ لا يمكن أن تتحول هذه القيمة (م) الى صفر وطالما أنها لن تتحول الى صفر اذا لا يمكن أن يتم اختيارها كتخصيص يقع مع الحل الأمثل وستظل محتفظة بقيمتها (م) ولا تخصص إطلاقا . و هذا هو المنطق الذى يمكن به معالجة التخصيصات غير المقبولة.

٢- أما اذا كانت المشكلة تخصيص ذات هدف تعظيم ، فإن المنطق نفسه يسرى هنا أيضا ، نريد أن نجعل قيمة هذا التخصيص غير المرغوب فيه لا تصل الى القيمة (صفر) إطلاقا ، فإذا كنا جعلنا قيمة (م) قيمة كبرى فى مشكلة التخصيص لتعبر عن أن هذا التخصيص مرتفع جدا فى التكلفة وسىء فى التخصيص ، فإن إستخدام (م) نفسها وبإشارتها لا يصلح هنا ، لأنها لو كانت فى مشاكل التعظيم قيمة كبرى موجبة الاتجاه فهذا معناه أنها تخصيص ممتاز لان أرباحها مرتفعة وهذا عكس ما نريد ، إذن يتبين عكس إتجاهها أى

تكون قيمة كبرى سالبة أى هى غير مربحة بل هى خسارة يتعين البعد عنها ، لذلك نضع فى التخصيصات غير المقبولة فى مشاكل التعظيم الرمز ( - م ) بحيث لو طرح منه أو أضيف اليه رقم لايتأثر.

#### مثال:

فى المثال السابق الخاص بمتجر التجزئة الكبرى بفرض أن مدير هذا المتجر يرى أن قسم لعب الأطفال غير متلائم مع الموقع (ب) ، و أن قسم قطع غيار السيارات غير متلائم مع طبيعته الموقع (د) وذلك إستناداً الى عدد من الاعتبارات منها مثلاً مساحة الموقع ، تجاور الأقسام ، و إعتبارات أخرى خاصة بسلوك المستهلك و من ثم نريد أن نحصل على التخصيص الأمثل للمشكلة فى ضوء هذه الإشتراطات أو التخصيصات غير المقبولة.

#### الحل:

قبل تطبيق خطوات الحل بالطريقة المجريه يتعين أن نجرى على المصفوفة الأصلية بعض التعديلات التى تفرضها هذه الاشتراطات أو التخصيصات غير المقبولة ، و حيث أن هذه هى تخصيصات ذات هدف تعظيم ، إذن يتم وضع الرمز ( - م ) بالمصفوفة محل القيم الأصلية بالمصفوفة الأصلية عند التخصيصات غير المقبولة و بذلك تظهر المصفوفة الأصلية بعد إجراء التعديل عليها كالآتى :

	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ) وهمي
قسم الأحذية	١٠	٦	١٢	٨	صفر
قسم لعب الأطفال	١٥	- م	٥	١١	صفر
قسم قطع غيار السيارات	١٧	١٠	١٣	- م	صفر
قسم الأدوات المنزلية	١٤	١٢	١٣	١٠	صفر
قسم الأدوات الكهربائية	١٤	١٦	٦	١٢	صفر

ويتم بعد ذلك إجراء الخطوات المعتادة للطريقة المجرية للتخصيص وسنصل الى الحل الأمثل دون أن يتضمن أى تخصيصات غير مقبولة ، و فيما يلى نواصل الحل لنقف على شكل المصفوفة خطوة بعد أخرى وما هى الاختلافات التى يمكن أن تحدث اذا وجدت .

**الخطوة الأولى :** تحويل المشكلة الى مشكلة تخصيص ذات هدف تخفيض .

حيث أن المشكلة التى نتناولها الآن هى مشكله تخصيص ذات هدف تعظيم ، إذن يتطلب الأمر أولاً تحويلها الى مشكلة تخصيص ذات هدف تخفيض ليسهل التعامل معها ، وسبق القول أن طريقة تحويلها يتم عن طريق إيجاد مصفوفة الفرصة الضائعة وذلك بطرح كل قيم العمود من أكبر قيمة فيه ، وبإجراء تلك الخطوة ستظهر مصفوفة الفرصة الضائعة على الصورة التالية:

	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ) وهي
قسم الأحذية	↓	١٠	↑	٤	صفر
قسم لعب الأطفال	↓	٢	↑	١	صفر
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٦	صفر	٢	صفر
قسم الأدوات المنزلية	↓	٤	صفر	٢	صفر
قسم الأدوات الكهربائية	↓	صفر	↓	صفر	صفر

من هذا الجدول يتبين أن تكلفه الفرصة الضائعة للخلايا غير المرغوب فيها أصبحت (م) فى حين أن كانت أرباحها فى المصفوفة الأصلية (-م) ، فمن أين حدث هذا التغيير . لقد سبق القول أنه لتحويل مشكلة التخصيص من مشكلة ذات هدف تعظيم الى مشكلة ذات هدف تخفيض هو طرح كل قيم العمود من أكبر قيمة فيه ، وعند تطبيق هذه الخطوة ستقلب (-م) الى (م) كالاتى:

الفرصة الضائعة بالخليه غير المرغوب فيها = أكبر قيمة بالعمود - (م - ) ، ومن ثم تتحول الى قيمة موجبه ، و عندما تكون موجبة فإنها تصبح من أكبر قيم مصفوفة الفرصة الضائعة الأمر الذى يجعلها تستبعد من التخصيص ولا يتم التخصيص عليها وهو المطلوب . كذلك يتضح أنه بتفطية جميع القيم الصفريه بالخطوط المستقيمه لم يتم بعد الوصول الى الحل الأمثل لان عدد الخطوط المرسومة أربعة فقط وهذا يقل عن عدد الصفوف (أو الأعمدة) ويتطلب الامر تحسين الحل بشكل عادى متناسين تماما ما أحدثناه من تحويل ، و نستمر فى الحل وصولا للحل الأمثل الذى سيظهر على الشكل التالى :

	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ) وهي
قسم الأحذية	٧	٩	١	٣	صفر
قسم لعب الأطفال	٢	٣	٨	صفر	صفر
قسم قطع غيار السيارات	صفر	٥	صفر	٣	صفر
قسم الأدوات المنزلية	٣	٣	صفر	١	صفر
قسم الأدوات الكهربائية	٤	صفر	٨	صفر	١

و نتيجة الحل الأمثل تظهر فى الجدول التالى مقارنة بالتخصيص القديم و الفرق بينهما :

القسم	التخصيص القديم		التخصيص الجديد		التغير في الأرباح
	الموقع	الأرباح	الموقع	الأرباح	
قسم الأحذية	هـ	صفر	هـ	صفر	صفر
قسم لعب الأطفال	ب	١٨	د	١١	٧-
قسم قطع غيار السيارات	د	١٦	أ	١٧	١+
قسم الأدوات المنزلية	حـ	١٣	هـ	١٣	صفر
قسم الأدوات الكهربائية	أ	١٤	ب	١٦	٢+
المجموع		٦١		٥٧	٤ -

اذن كان من نتيجة الاشتراطات التي وضعها مدير المتجر في عدم تخصيص بعض الأقسام في الأماكن التي ظهرت بالتخصيص القديم أن انخفضت الأرباح من ٦١ ألف جنيه إلى ٥٧ ألف جنيه بإنخفاض مقداره أربعة آلاف جنيه ، و لكن يرى أن التضحية بهذا الرقم أخف ضرراً من تخصيص بعض الأقسام على أماكن ومواقع غير مرغوب فيها .



### أسئلة وتطبيقات:

١- يوجد بأحد المؤسسات ثلاثة مهام غير مخصصة، وفي الوقت نفسه يوجد ثلاثة من الموظفين متاحين حالياً للتخصيص على تلك المهام، والجدول التالي يوضح الأزمنة المقدرة بالساعات للإنتهاء من كل مهمة بواسطة كل موظف.

المهمة / الموظف	أ	ب	ج
س	١١	١٢	١٧
ص	٧	١١	٢٠
ع	٥	٨	١٦

والمطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل للموظفين الثلاثة والذي يعمل على تدنيه اجمالي الزمن المستغرق في انجاز المهام الثلاثة.

٢- بافتراض في الحالة السابقة أنه قد انضم موظف رابع (ل) وقدرت الأزمنة الخاصة بمقدرته على الانتهاء من كل وظيفة كالتالي (٨، ١٠، ١٩) على التوالي إلا أنه يفضل ألا يتولى الموظف الجديد مهام الوظيفة (ح) لقلّة خبرته بها.

والمطلوب:

- ما هو التخصيص الأمثل؟ وهل يوجد تعدد في الحلول المثلى؟
- هل اضافة الموظف الرابع غير من الحل الأصلي؟ وماذا عن قيمة التخصيص في الحالتين؟
- من هو الموظف الذي سيظل دون تخصيص في الحل الأمثل وبماذا تفسر ذلك؟

٣- مع بداية العام الدراسي اجتمع رئيس قسم إدارة الأعمال مع خمسة من المعيدين والمدرسين المساعدين بالقسم بغرض توزيع خمس مواد دراسية عليهم، بحيث يقوم كل منهم بتدريس مادة واحدة، ولايقوم بتدريس المادة إلا

شخص واحد، وطلب رئيس القسم من كل منهم تسجيل رغبته فى المادة التى يرغب فى تدريسها بشرط ان يرتب كل منهم المواد الخمسة كلها وفقا لرغبته، فالمادة التى تمثل الرغبة الاولى تأخذ رقم (١) والمادة التى تمثل الرغبة الثانية تأخذ رقم (٢) ... وهكذا، وفعلًا قام كل منهم بترتيب تلك المواد وفق رغبته، وبتفريغ تلك الرغبات تم الوصول الى جدول الرغبات التالى:

المواد الدراسية	بحوث عمليات	بحوث تسويق	إدارة عامة	تخطيط ومراقبة إنتاج	إعلان وعلاقات عامة
س	٣	٢	١	٤	٥
ص	٤	٣	٥	١	٢
ع	٥	٢	٣	١	٤
ل	٤	٢	٥	١	٣
م	٥	٢	٤	١	٣

ولقد كلفك رئيس القسم بتقديم حلا رياضيا فى شكل تخصيصات مثلى بديلة للمعيدون والمدرسون المساعدون الخمسة على المواد الدراسية شريطة ان تحقق تلك الحلول المثلى أدنى اختلافات ممكنة مع رغبات المحاضرين علما بان كل المحاضرون يتمتعون بنفس الكفاءة العلمية فى تدريس أى من تلك المواد الدراسية، وأن هذا التخصيص يهدف بالدرجة الاولى الى تحقيق عنصرى الكفاءة والرغبة فى أن واحد كهدف يسير عليه قسم إدارة الأعمال.

٤- يواجه مدرب المنتخب القومى لكرة القدم بمشكلة الاعداد النهائى لتشكيل الفريق الذى سيمثل مصر فى تصفيات كأس العالم، ولهذا الغرض تم إعداد لجنة فنية رياضية للاشتراك فى اعداد هذا التشكيل وقد تم استعراض جميع اللاعبين المرشحين للاشتراك فى المنتخب، وتم تقييم كفاءة كل منهم على مختلف مراكز اللعب، وفيما يلى الجدول الذى يمثل نتيجة هذا التقييم:

رقم اللاعب	المراكز	قلب هجوم	جناح أيسر	جناح أيمن	دفاع أيسر متقدم	خط الوسط	دفاع أيمن متقدم	قلب دفاع	دفاع أيسر متأخر	دفاع وسط	دفاع أيمن متأخر	حارس مرمى
١		٢	٢	٣	٥	٤	٣	٧	٧	٨	٧	١٠
٢		٦	٥	٤	٧	٦	٨	١٠	٩	١٠	٩	٣
٣		١٠	٦	٥	١٠	٧	٨	٧	٨	٩	١٠	٤
٤		٧	٧	٨	٧	٨	١٠	٧	٩	٨	٧	٣
٥		٧	٧	٨	٨	٨	٩	٩	٩	٨	٨	٥
٦		١٠	١٠	٩	٩	٩	٩	٨	٨	٧	١٠	٣
٧		٣	٣	٤	٤	٣	٣	٣	٢	٣	٥	٩
٨		٦	٧	٩	٨	٨	١٠	٦	١٠	٥	٤	٦
٩		٥	٨	٧	١٠	٨	٨	١٠	٧	١٠	٥	٣
١٠		٧	٧	٨	٨	١٠	٩	٨	٦	٦	٥	٤
١١		١٠	١٠	١٠	٩	٩	٨	٨	٧	٧	٦	٣
١٢		١٠	١٠	١٠	٩	٩	٨	٨	٨	٨	٨	٢
١٣		٩	٩	٩	١٠	٩	١٠	٦	٦	١٠	٧	٥
١٤		١٠	١٠	٩	٩	٨	٨	٧	٨	٧	٦	٣

وقد وضعت اللجنة القيود التالية على التشكيل المقترح:

- أ- لا ينبغي أن يشغل اللاعب رقم (٩) مهمة دفاع أيسر متقدم.
- ب- يلتزم التشكيل بأن يتولى اللاعب رقم (١) حراسة المرمى، وأن يكون اللاعب رقم (٧) احتياطياً له.
- ج- نظراً لشعبية كل من اللاعبين (٣)، (١١)، و(١٢) فيتعين تسكينهم على الترتيب قلب هجوم، جناح أيمن، جناح أيسر.

والمطلوب: أن تقدم للمدرب التشكيل النهائي المقترح والتشكيلات البديله إن وجدت واللاعبون الاحتياطيون للفريق مستخدماً في ذلك أسلوب التخصيص.

- ٥- يلزم لاحدى الشركات تعيين خمسة كتبة لشغل خمس وظائف متاحة هي أمين صندوق، كاتب فواتير، كاتب رواتب، كاتب تكاليف، كاتب أرشيف، وقد أعلنت الشركة عن هذه الوظائف الشاغرة، فتقدم لها سبعة ممن تتوافر فيهم الشروط وعقدت لهم اختبارات تتعلق بأنشطة ومهام الوظائف الشاغرة الخمس وذلك بغرض الاختيار من بينهم من ناحية وتحديد أنسبهم لكل وظيفة من ناحية أخرى للتخصيص عليها والجدول التالي يعطى الدرجات التى حصل كل منهم عليها فى الاختبار (كل جزء من الاختبار من عشرة درجات).

الوظائف المتقدمون	أمين الصندوق	كاتب فواتير	كاتب رواتب	كاتب تكاليف	كاتب أرشيف
أ	٣	٣	١	٣	٥
ب	٥	٨	٩	٤	٤
ج	١	٧	١٠	٢	٧
د	٥	٩	٨	٦	٧
هـ	٤	٥	٩	٥	٦
و	٥	٤	١٠	٤	٨
ز	٥	٥	٤	٦	٦

والمطلوب: تقرير من سيتم قبولهم للالتحاق بالعمل ومن سترفض طلباتهم وأى الأعمال ستسند إلى المقبولين.



٦- تعتزم محافظة الشرقية القيام بعدد من المشروعات فى مدن وقرى المحافظة وهذه المشروعات هي:

إنشاء مدرسة ثانوية، مستشفى عام، حضانة أطفال، جمعية تعاونية استهلاكية، وأعمال رصف.

وقد تبين للمسئولين أن هناك ٦ مدن وقرى فى المحافظة كلها فى حاجة الى كل تلك المشروعات إلا أن المحافظة تنوى توزيع تلك المشروعات بحيث يكون نصيب المدينة أو القرية مشروع واحد فقط، بهدف إيجاد توازن فى التنمية الاجتماعية لكافة مدن وقرى المحافظة. إلا أن المشكلة هي كيفية توزيع هذه المشروعات على تلك المدن والقرى، ولهذا الغرض شكلت لجنة من المسئولين عن هذه القطاعات لتحديد درجة إلحاح الحاجة الى كل مشروع من تلك المشروعات فى المدن والقرى المعنية. وبعد الدراسة تم إعداد جدول إلحاح الحاجة (الحد الأقصى ١٠)، كما يظهر فى الشكل التالى:

المدينة أو القرية	الزقازيق	أبو كبير	منيا القمح	فرسيس	العباسة	التل الكبير
مدرسة ثانوية	٩	٧	٥	٨	٨	٦
مستشفى عام	٩	٥	٧	١٠	٨	٧
حضانة أطفال	٩	٥	٨	٢	٥	٦
جمعية تعاونية استهلاكية	٧	٦	٦	٣	٧	٨
أعمال رصف	٩	٨	٨	٤	٦	٩

والمطلوب: أن تقدم للمسئولين عن المحافظة أسلوباً علمياً رياضياً يسترشدون به لإيجاد التخصيص الأمثل لتلك المشروعات على مدن وقرى المحافظة.

٧- يقوم مخططو البرامج بالقناة الأولى بتليفزيون جمهورية مصر العربية بجدولة السهرات الأسبوعية لدورته الجديدة، ولقد استقر الراى على بعض تلك السهرات، إلا أنه مازالت لديهم مشكلة هي توزيع ثلاثة برامج يراد توزيعها على سهرات ثلاث ليالى، ومن أجل ذلك تم تقدير عدد المشاهدين المتوقعين لكل برنامج اذا تم اذاعته فى كل ليلة، والجدول التالى يوضح هذه التقديرات (الأرقام بالمليون مشاهد):



المصارعة الحرة	المسرحية	الفيلم العربى	البرنامج اليوم
٢	٧	٥	الاربعاء
٤	٩	٩	الخميس
٣	٨	٧	الجمعة

وقد تبين من الدراسات السلوكية أنه يتعين عدم عرض برنامج المصارعة الحرة فى سهرة يوم الخميس لأن بها من العنف ما يخشى من تأثيره على سلوك الاطفال فى السن الصغيرة والذين يجلسون الى التلفزيون لساعة متأخرة فى مساء تلك الليلة، حيث العطلة الاسبوعية فى اليوم التالى.

والمطلوب: ايجاد التخصيص الأمثل لهذه البرامج على سهرات أيام الاسبوع المتاحة والذي يعمل على ارضاء الغالبية العظمى من المشاهدين وفى نفس الوقت أن يكون رأى العلماء السلوكيين محل تقدير واهتمام.



## المراجع

### أولاً : المراجع العربي:

- ١- د. أحمد سرور محمد ، بحوث العمليات فى ميدان الإنتاج .  
مكتبة عين شمس ، القاهرة ، ١٩٦٤ .
- ٢- د. حازم أحمد يسن ود . محمد سمير كامل ، بحوث العمليات .  
الزقازيق ، ١٩٨١ .
- ٣- د. حمدى مصطفى المعاز ، إدارة الإنتاج ، دار النهضة العربية ،  
القاهرة ، ١٩٨٧ .
- ٤- د. حسن عبد الله أبوركيه ، بحوث العمليات و تطبيقاتها  
فى مجال الإدارة ، الطبعة الرابعة ، دار  
البيلاذ ، جدة ، ١٩٨٦ .
- ٥- د. حنفى محمود سليمان ، الإدارة — منهج تحليلى ذاتى ، دار  
الجامعات المصرية ، الإسكندرية ، ١٩٧٦ .
- ٦- د. حنفى محمود سليمان ، المنهج المتكامل فى الإدارة ، دار  
الجامعات المصرية ، الإسكندرية ، ١٩٧٩ .
- ٧- د. عبد الهادى قريطم و د. بدر الدين المصرى ، بحوث العمليات  
فى تخطيط و مراقبة الإنتاج ، دار  
الجامعات المصرية ، الإسكندرية ، ١٩٦٨ .
- ٨- د. على السلمى ، بحوث العمليات و إتخاذ القرارات  
الإدارية ، دار المعارف المصرية ،  
القاهرة ، ١٩٧٠ .
- ٩- د. على السلمى ، الأساليب الكمية فى الإدارة ، دار المعارف  
المصرية ، ١٩٧٣ .

- ١٠- د. على عبد السلام المعزاوى، بحوث العمليات فى مجال  
الانتاج و التخزين و النقل، دار النهضة  
العربية، القاهرة ١٩٧٧.
- ١١- د. لطفى لويى سيفين، بحوث العمليات و المنهج الكمي  
لاتخاذ القرارات ، دار الجامعات المصرية،  
الأسكندرية، ١٩٧٧.
- ١٢- د. محمد الحناوى، بحوث العمليات فى مجال الإدارة دار  
الجامعات المصرية، الأسكندرية، ١٩٨٦.
- ١٣- د. محمد توفيق ماضى، الأساليب الكمية فى مجال إدارة  
الانتاج و العمليات ، المكتب العربى  
الحديث، الأسكندرية، ١٩٨٦.
- ١٤- د. محمد سالم الصفدى، البرمجة الخطية وبحوث  
العمليات ، وكالة المطبوعات ، الكويت ،  
١٩٨٦.
- ١٥- د. محمد صبرى العطار، بحوث العمليات فى الحاسبة ،  
القاهرة، ١٩٨٧.
- ١٦- د. سمير بيباوى فهمى ود. محمد صبرى العطار ، بحوث  
العمليات فى الحاسبة ، مكتبة الأنجلو  
المصرية ، القاهرة، ١٩٧٩.
- ١٧- د. فريد زين الدين بحوث العمليات - النظرية  
والتطبيق، الطبعة الأولى، مكتبة المدينة،  
الزقازيق، ١٩٨٤.

## ثانياً : المراجع الأجنبية

- 1- Ackoff, R. L., and M. W. Sasieni, *Fundamentals of operations Research*, John wiley and Sons, New Yourk, 1968.
- 2- Beale, E. M. L., "*Cycling in the Dual simplex Algorithm*", Naval Research and Management, 1955.
- 3- Carlson, P. G., *Quantitative Methods for Mangers*, Harper and Row, Publshers, New York, 1967.
- 4- Churchman, C. W., & otheres, *Introduction to Operations Research*, John Wiley and Sons, New York. 1957.
- 5- Harper, W. M., *Operational Research*, Mac Donald & Evans, London, 1975.
- 6- Herrman, G. G., & Magee, J. F., *Operations Research for Management*, The New English Library LTD. London, 1969.
- 7- Hoffman, A. J., "*Cycling in the simplex Algorithm*", National Bureau of standards, report No. 2974, Dec. 1983.
- 8- Kornblinth. J., "*A survey of Goal Programming*," OMEGA, Vol. 1. No. 2, 1973.
- 9- Lee, S. M., *Goal programming for Decision Analysis*, Philadephia Publishers Inc., 1972.
- 10- Makower, M. S., *Operational Research*, Stagton, London, 1977.
- 11- Swanson, L. W., *Linear Programming*, McGraw -Hill., Inc., New York, 1980.





رقم الإيداع بدار الكتب : ١٩٩٦/٧٤١٢  
الترقيم الدولي I.S.B.N. 7: 1715 - 04 - 977







# هذا الكتاب

لاشك أن الثورة الإدارية هي السمة الظاهرة لهذا العصر الذي نهيش فيه، ومن معالم الثورة الإدارية هذه أساليب بحوث العمليات، بإعتبارها مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمنظمات، ووسيلتها في اتخاذ القرارات السليمة فيما يعترضها من مشكلات.

ويهدف هذا الكتاب إلى دراسة وتحليل وتوضيح كيفية تطبيق الأساليب الرئيسية التي تحويها بحوث العمليات وذلك بشكل مركز يؤد إلى الهدف، ويناقش بشكل تفصيلي وتطبيقية أسلوب البرمجة الخطية بإعتبارها من أهم الأساليب التي تساعد الإدارة في حل مشاكل التخصيص للموارد المتاحة ولكونها نقطة الارتكاز الأساسية التي يدور حولها العمل الإداري المعاصر في المنظمات الحديثة سواء كانت إنتاجية أو خدمية وفي مختلف بلدان العالم.

